



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-16;80)$ ,  $Q(2;80)$  и  $R(18;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Есть  $ab: 2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc: 2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac: 2^{14} 3^{21} 5^{39}$ .  
То можно сразу в вывод, что  $ab \geq 2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  
То же  $bc \geq 2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac \geq 2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Т.к. числа  
 $a, b, c$  попарно взаимно простые, то мы можем перемножить  
эти неравенства, получим  $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{34} 3^{55} 5^{68}$ . Значит  
 $abc \geq 2^{17} 3^{27} 5^{34}$ . Заметим, что если показатели  
степеней меньше, то решение из условия  
невозможно. Т.к. числа  $a, b, c$  натуральные, то минимальный  
возможный показатель при 3 это 28. Также  
заметим, что  $abc: 5^{39}$ , а  $a^2 b^2 c^2: 5^{68}$ , значит  $abc: 5^{39}$ ,  
тогда минимальный показатель у  $abc$  при  
5 это 39. Таким образом получено неравенство  
 $abc \geq 2^{17} 3^{28} 5^{39}$ . Проверим номер чисел  
для которых выполняется условие и их  
произведение будет  $2^{17} 3^{28} 5^{39}$ .

$$\begin{cases} a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17} \\ b = 2^3 \cdot 3^7 \\ c = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{22} \end{cases}$$

Несомненно заметить, что все решения  
из условия выполняются, и  $abc = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$ .  
То есть минимальное значение  $abc$  это  
 $2^{17} 3^{28} 5^{39}$

Ответ:  $2^{17} 3^{28} 5^{39}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

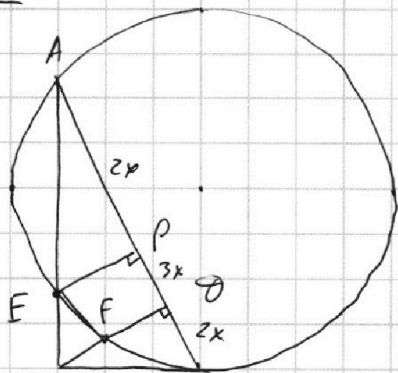
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



Точки  $A, E, F, B$  лежат на одной окружности, также  $AB \parallel EF$  и  $EF > AB$ . Значит  $ABFE$  - трапеция и в силу симметрии, равнобедренная трапеция. Пусть  $EP \perp AB$ . Т.к трапеция равнобедренная, то  $AE = FB$  и  $\angle EAP = \angle FBP$ . Следовательно

$\triangle AEP \cong \triangle BFP$ , значит  $BP = AP$ . Пусть  $BP = 2x$ , тогда по условию  $AD = 5x$ . Т.к  $AP = BP = 2x$ , значит  $PD = 3x$ .  $EFDP$  - прямоугольник, значит  $EF = 3x$ . Т.к  $EF \parallel AD$ , то  $\triangle CEF \sim \triangle CAD$ , значит  $\frac{S_{CEF}}{S_{CAD}} = \left(\frac{EF}{AD}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ .  $S_{CEF} = \frac{9}{25} S_{CAD}$ .

$\triangle ACD$  и  $\triangle ACB$  имеют общую сторону, значит  $\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AB} = \frac{5}{7}$ .  $S_{ACD} = \frac{5}{7} S_{ABC}$ , подставим это в ранее полученное равенство  $S_{CEF} = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{7} \cdot S_{ABC} = \frac{9}{35} S_{ABC}$ . Таким образом

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{35}{9}$$

Ответ:  $\frac{35}{9}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

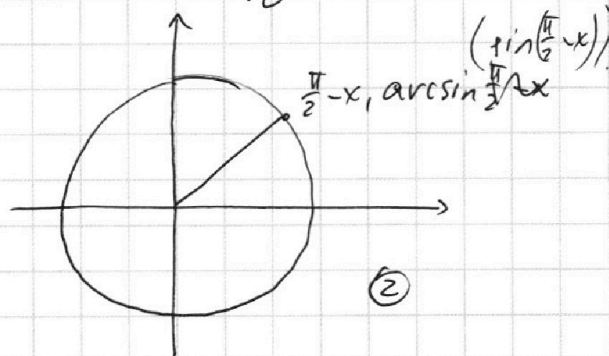
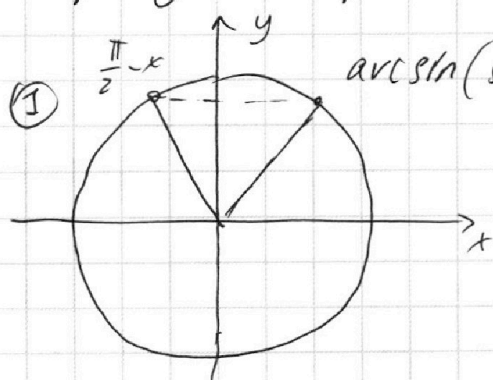
$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

Заметим, что  $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin t \leq \frac{\pi}{2}$ , значит

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2}, \quad -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi,$$

$$-6\pi \leq -2x \leq 4\pi, \quad 4\pi \geq 2x \geq -4\pi, \quad 3\pi \geq x \geq -2\pi.$$

Нарисуем тригонометрические окружности



Возможно два случая в зависимости от того, попадет ли  $\frac{\pi}{2} - x$  на промежутки  $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$  или нет. Они соответствуют

на картинке, значит уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3\pi \geq x \geq -2\pi \\ \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi - 2x}{10} = (2n+1)\pi & \text{1 случай } n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi - 2x}{10} = 2k\pi & \text{2 случай } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Тригонометрические задачи №3. (1 листок)

$$\begin{cases} 3\pi \geq x \geq -2\pi & \text{Решим систему.} \\ \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi - 2x}{10} = (2n+1)\pi & (1) \\ \frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi - 2x}{10} = 2k\pi & (2) \end{cases}$$

$$1) \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi - 2x}{10} = (2n+1)\pi.$$

При  $k = -1$

$$5\pi - 10x + \pi - 2x = 10(2n+1)\pi.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{6}\pi = \frac{8}{6}\pi = \frac{4}{3}\pi.$$

$$6\pi - 12x = 10(2n+1)\pi$$

При  $k = 0$ .

$$12x = 6\pi - 10(2n+1)\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}(2n+1)\pi.$$

При  $n = 1$

$$3\pi \geq \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}(2n+1)\pi \geq -2\pi.$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi = -2\pi.$$

$$3 \geq \frac{1}{2} - \frac{5}{6}(2n+1) \geq -2$$

При  $n = -2$ .

$$18 \geq 3 - 5(2n+1) \geq -12.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{6} \cdot 3\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi = 3\pi.$$

$$15 \geq -5(2n+1) \geq -15.$$

~~2n+1~~

~~2n+1~~

$$3 \geq \frac{1}{2} - 1 \geq -3.$$

$$-3 \leq -2n - 1 \leq 3.$$

$$-2 \leq -2n \leq 4$$

$$-2 \leq n \leq 1$$

$$n = -1$$

$$n = 0$$

$$n = 1$$

$$n = -2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжите задачи ~3 (2 листок)

$$2) \frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi - 2x}{10} = 2\pi k$$

$$5\pi - 10x - (\pi - 2x) = 20\pi k$$

$$5\pi - 10x - \pi + 2x = 20\pi k$$

$$4\pi - 8x = 20\pi k$$

$$\pi - 2x = 5\pi k$$

$$2x = \pi(1 - 5k)$$

$$x = \frac{1 - 5k}{2} \pi$$

$$3\pi \geq \frac{1 - 5k}{2} \pi \geq -2\pi$$

$$3 \geq \frac{1 - 5k}{2} \geq -2$$

$$6 \geq 1 - 5k \geq -4$$

$$5 \geq -5k \geq -5$$

$$1 \geq -k \geq -1$$

$$-1 \leq k \leq 1$$

$$k = 0, 1$$

$$k = 1$$

$$k = -1$$

При  $k = -1$

$$x = \frac{1 + 5 \cdot 1}{2} \pi = 3\pi$$

При  $k = 0$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

При  $k = 1$

$$x = \frac{1 - 5}{2} \pi = -2\pi$$

Таким образом решившим  
систему и учитывая  
числа  $-2\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{4}{3}\pi, 3\pi$

Ответ:  $-2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{4}{3}\pi, 3\pi$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

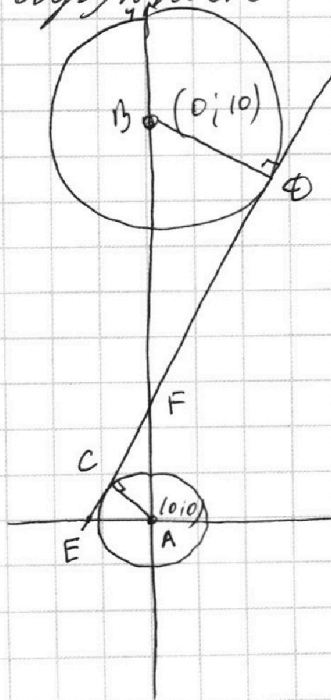
№4

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 5)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = ax + 4b \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ (y - 10)^2 + x^2 = 36 \end{cases}$$

Изобразим уравнения на схематичном графике, два уравнения из совокупности это две окружности  $A$  с координатами центров  $(0,0)$  и  $(0,10)$ , при  $a$  и радиусами  $5$  и  $6$ . А первое уравнение это прямая. Прямая пересекет окружность  $A$  не более двух раз, так же второе уравнение имеет ровно 4 решения, прямая пересекет окружность  $B$  ровно два раза.



Рассмотрим общую касательную двух окружностей. Заметим, что если тангенс угла наклона будет больше, чем у общей касательной, то мы сможем построить такое  $b$ , когда прямая пересекет каждую окружность в двух точках. Найдем  $\neq$  тангенс угла наклона этой касательной.

(см. обозначения на рисунке.)

$$\Delta ACF \sim \Delta BFD. \frac{AF}{FB} = \frac{CA}{BD} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{AF}{10 - AF} = \frac{1}{6} \quad \angle CAF = 10 - \angle AFB, \quad \angle AFB = 10$$

$$AF = \frac{10}{7}. \text{ То } i. \text{ Тиратора найдем } CF.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи 4.

$$CF = \sqrt{AF^2 - AC^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{7}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{100 - 49}}{7} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

В силу подобия  $\triangle AEF$  и  $\triangle CAF$ ,  $\angle CAF = \angle FEA$ .

~~$\angle FEA$~~   $\angle CAF = \frac{CF}{CA} = \frac{\frac{\sqrt{51}}{7}}{1} = \frac{\sqrt{51}}{7}$ .

$$\angle FEA = \angle CAF = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

То есть если  $\frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7}$ , то подобие имеет место и решение

$a > \frac{3\sqrt{51}}{7}$ . Также заметим, что с.и. параболы относительно симметрии относительно оси  $Ox$ ,

то при  $a < -\frac{3\sqrt{51}}{7}$ , также уравнение подобия  $b$ , чтобы уравнение системы имело решение. При остальных

значениях  $a$  та координата  $b$  не подбирается. Таким образом  $\begin{cases} -a > \frac{3\sqrt{51}}{7} \\ a < -\frac{3\sqrt{51}}{7} \end{cases}$

Ответ:  $(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty)$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

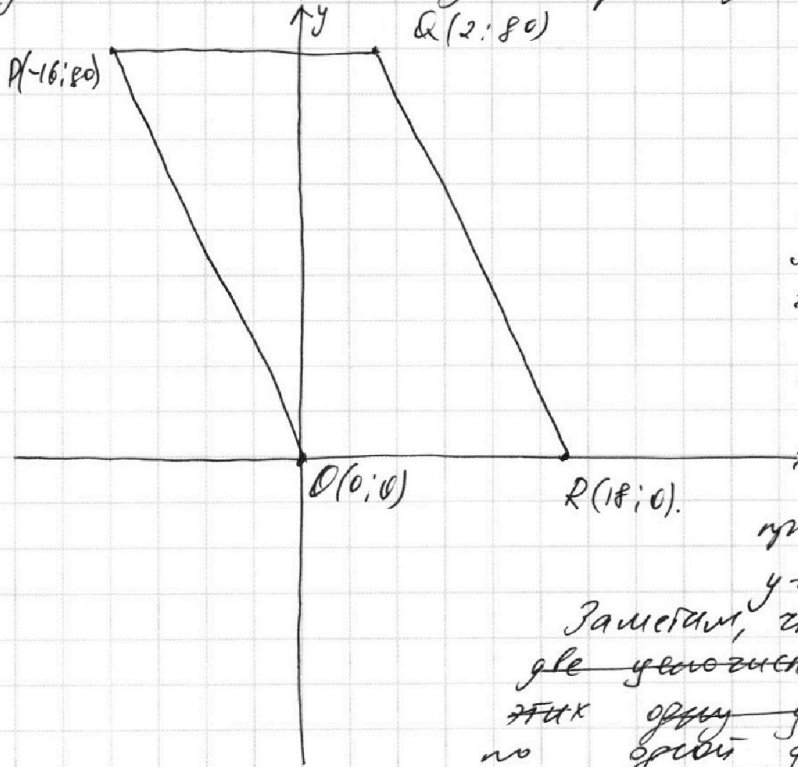


- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6  
Сделаем схематичную картинку



Предположим, что

$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45.$$

тогда

$$5x_2 + y_2 = 45 + 5x_1 + y_1.$$

Прибавим к обеим частям  $-d$

$$5x_2 + y_2 - d = 45 + 5x_1 + y_1 - d$$

Рассмотрим две прямые  $y = -5x + d$  и  $y = -5x - 45 + d$ .

Заметим, что если мы возьдем две параллельные прямые на одной из этих осей, то для каждой из этих осей

их ординат будет выполняться условие. Заметим, что  $d \in \mathbb{Z}$  т.к.  $5x_2 + y_2 - d = 0$ , а  $5x_1 + y_1 \in \mathbb{Z}$  т.к.  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

Рассмотрим все прямые вида  $y = -5x + d$ , где  $d \in \mathbb{Z}$  и предположим, что прямая проходит хотя бы один раз через одну из осей нашего параллелограмма. Это происходит если  $d = 0, \dots, 80$ . (прямые PQ и QR имеют тот же наклон, что и наши прямые)

Теперь рассмотрим все прямые, проходящие через стороны и углы параллелограмма. Заметим, что каждая такая прямая имеет целую абсциссу. Значит, если  $d \neq 0, \dots, 80$ , то прямая содержит 17 точек параллелограмма, а если  $d = 5, \dots, 75$ , то прямая содержит 16 целых точек параллелограмма.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Профитеске зарази б.

Рассобьем условия на парот тура  $y = -5x + d$   
 $y = -5x + d - 45$ .

$$y = -5x \quad y = -5x + 45.$$

$$y = -5x + 1 \quad y = -5x + 46$$

⋮

$$y = -5x + 45 \quad y = -5x + 90.$$

Заметим, что пара точек  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  удовлетворяет условию только тогда и только тогда, когда  $A$  и  $B$  лежат на разных уровнях и  $y$  одной пары. У нас есть 10 пар  $(\frac{45}{5} + 1)$ , где на каждой точке внутри параллелограмма лежит по 17 точек. Для этих  $(d:5)$ .

Для этих уровней существует ~~17~~  
~~17~~  $17 \cdot 17 \cdot 10 = 2890$  способов выбрать две точки, чтобы удовлетворилось условие.

Остаточных пар 36, на каждой из них по 16 точек внутри параллелограмма, значит для них существует  $36 \cdot 16 \cdot 16 = 9216$  пар,

тогда удовлетворяющих условию.  
Значит всего существует  $9216 + 2890 =$   
 $= 12106$ .

Ответ: 12106.





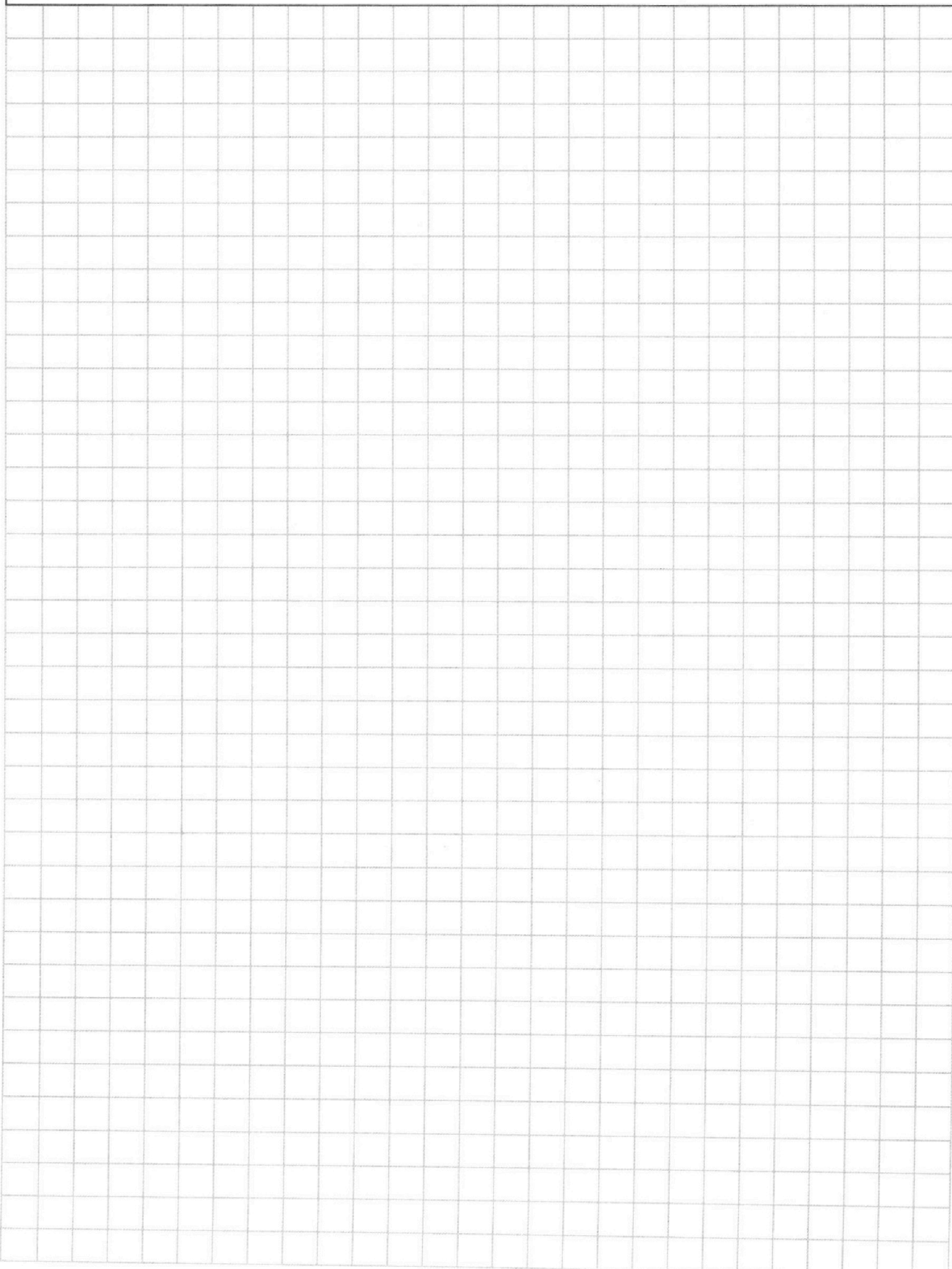
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x.$$

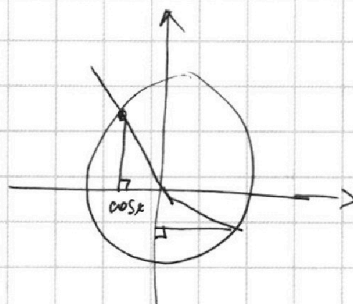
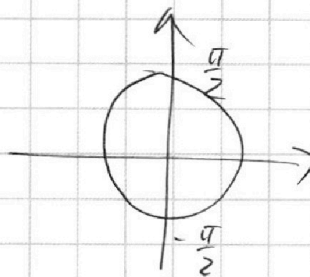
$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}.$$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi - 2x}{10} < \frac{\pi}{2}$$

$$-5\pi < \pi - 2x < 5\pi.$$

$$-6\pi < -2x < 4\pi.$$

$$3\pi \leq x \leq 2\pi - 2\pi$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos x - \sin x \cos \frac{\pi}{2} = \cos x$$

$$10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi - 2x}{10}.$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}.$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3.$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y 0.2 - 3$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = \frac{1}{3} \log_y 0.2 - 3$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \log_y 5 - 3$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3 \log_5 y} - 3.$$

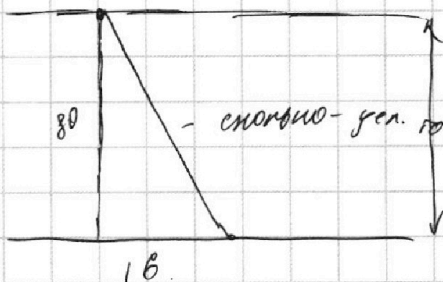
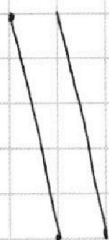
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

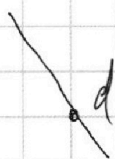
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 80 \\ 80 \overline{) 5} \end{array}$$



$$d + 5x = 7$$

$$80 > d + 5a > 0$$

$$80 - d > 5a > -d$$

$$y = -5x + 18$$

$$y = -5x + a$$

$$a = -5x + 18$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 18 \\ \times 5 \\ \hline 90 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ + 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 36 \\ \times 16 \\ \hline 216 \\ + 36 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ 576 \\ \times 16 \\ \hline 3456 \\ + 576 \\ \hline 9216 \end{array}$$

$$-160 + 91 = -156$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ 256 \\ \times 36 \\ \hline 1536 \\ + 768 \\ \hline 9216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9216 \\ + 2890 \\ \hline 12106 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9216 \\ + 2890 \\ \hline 12106 \end{array}$$



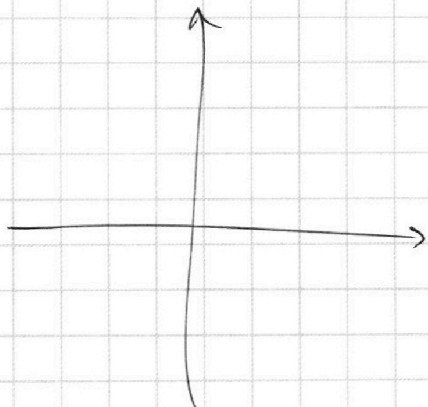
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 2\pi &\geq x \geq -2\pi \\ \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi - 2x}{10} &= (2n+1)\pi \quad (1) \\ \frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi - 2x}{10} &= 2k\pi \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi - 2x}{10} = (2n+1)\pi$$

$n =$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} - \frac{6}{5}x = (2n+1)\pi$$

$$9x^2 - 9 = y^2 + 12$$

$$\frac{5\pi - \pi}{10} - (2n+1)\pi = \frac{6}{5}x$$

~~12~~

$$\frac{4\pi}{10} - (2n+1)\pi = \frac{6}{5}x$$

$$\begin{aligned} n=0 \quad \frac{2-5}{6}\pi &= \\ &= \frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

$$\frac{2\pi}{5} - (2n+1)\pi = \frac{6}{5}x$$

$$n=1 \quad \frac{2-15}{6}\pi = -\frac{13}{6}\pi$$

$$2\pi - 5(2n+1)\pi = 6x$$

$$x = \frac{2\pi - 5\pi(2n+1)}{6} = \frac{2 - 5(2n+1)}{6}\pi$$

$$n=-1 \quad \frac{2+5}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$$

$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3}t - 3$$

$$t^4 - \frac{3}{t} - \frac{4}{3}t + 3$$

$$n=-2 \quad \frac{2+25}{6}\pi =$$

$$t^4 + \frac{4}{t} = -\frac{1}{3}t - 3$$

$$t^4 + \frac{4}{t} + \frac{1}{3}t + 3 = 0 \quad = \frac{9}{2}\pi = 4\frac{1}{2}\pi$$

$$3t^5 - 9 - 4t^2 + 9t = 0$$

$$3t^5 - 4t^2 + 9t - 9$$

$$3t^5 + 12 + t^2 + 9t$$

$$3t^5 + t^2 + 9t + 12$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 3 \cdot 0.25 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3.$$

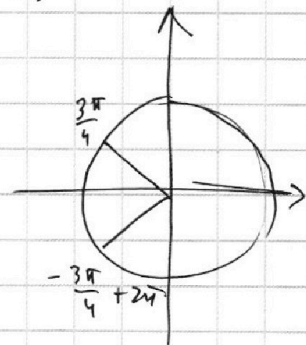
$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3 \log_5 2x} - 3.$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y 3 \cdot 0.2 - 3$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} 4 \log_y 5 = \frac{1}{3} \log_y \frac{1}{5} - 3.$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = -\frac{1}{3} \log_y 5 - 3.$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3 \log_5 y} - 3.$$



$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x.$$

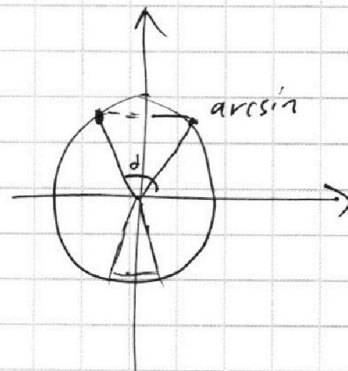
$$3\pi \geq x \geq -2\pi$$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi - 2x}{10}.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pm$$

$$3\pi \geq x \geq -2\pi$$

$$\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi - 2x}{10} = \pi(2n+1)$$



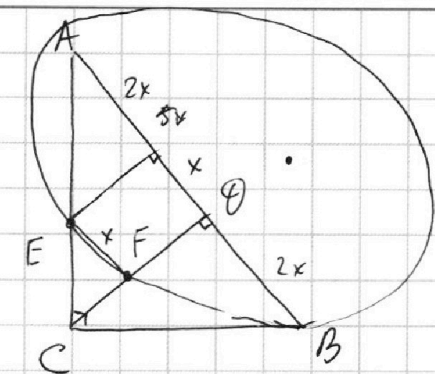
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AB \parallel EF$

$$\frac{AO}{OB} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{9} S_{ACB}$$

$$S_{ACB} = \frac{3}{5} S_{ABC}$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{5} S_{ABC} =$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = 15.$$

$$= \frac{1}{15} S_{ABC}$$

~3

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x.$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}.$$

~~$\sin(\arcsin x)$~~

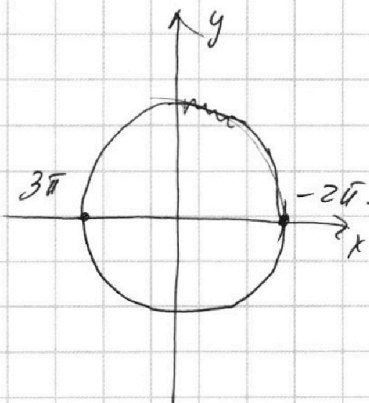
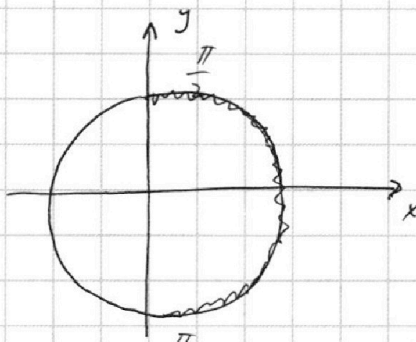
$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi.$$

$$-6\pi \leq -2x \leq 4\pi.$$

$$-3\pi \leq -x \leq 2\pi$$

$$\underline{3\pi \geq x \geq -2\pi}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^8 3^{14} 5^{12}, \quad bc: 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac: 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$8 + 12 + 14 = 34$$

$$21 + 14 + 20 = 21 + 34 = 55$$

$$ab \geq 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc \geq 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{34} 3^{55} 5^{68}$$

$$ac \geq 2^{17} 3^{21} 5^{39}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ -17 \\ \hline 22 \\ 54 \end{array}$$

$$12 + 17 + 39 = 29 + 39 = 38 + 30 = 68$$

$$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{27} \sqrt{3} \cdot 5^{34}$$

$$2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

т.к.  $abc \in \mathbb{Z}$   $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{37}$   $z = 9$

$$x = 5 \quad y = 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17} \\ b = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^{\cancel{17}} \\ c = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{\frac{22}{16}} \end{array} \right.$$

$$\frac{54}{2} = 27$$

$$\text{И} \quad x + y = 8 \quad ab$$

$$x + z = 14 \quad ac$$

$$z + y = 12$$

$$x + y = 14$$

$$x = 7.5$$

$$2x = 8 + 14 - 12$$

$$x + z = 21$$

$$y = 6.5$$

$$2x = 21 - 12$$

$$z + y = 20$$

$$z =$$

$$x = 5$$

$$2x = 14 + 21 - 20 = 15$$

$$x + y = 12$$

$$x = 7.5$$

$$2x = 15 + 21 - 20$$

$$x + z = 39$$

$$z + y = 17$$

$$\boxed{x = 8} \quad \boxed{y = 7}$$

$$2x = 39 - 5 = 34$$

$$z = 13$$

$$\boxed{x = 17} \quad y = 1$$

$$z = 16$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

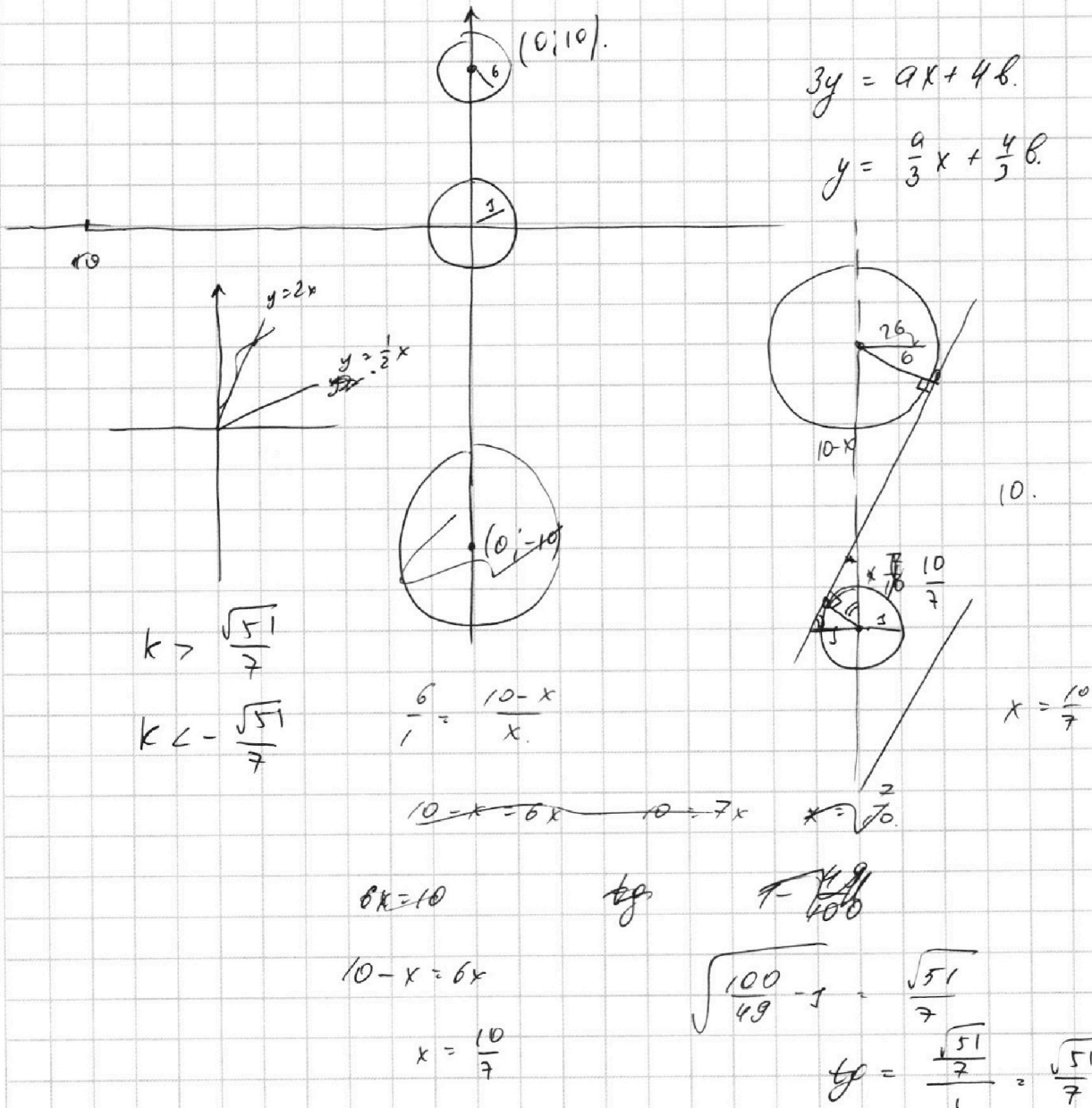
1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 5) (x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 20y + 64 = \cancel{x^2 - 20y + 100} y^2 - 20y + 100 + x^2 - 36 = (y - 10)^2 + x^2 - 36 = 0$$



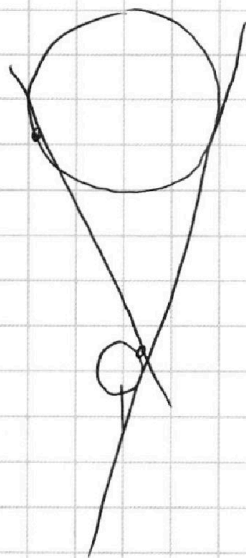
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3}^{25} - 3$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \cdot \frac{1}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3 \log_5 2x} - 3$$

$$\frac{\log_5^5 3 \log_5^5(2x)}{3 \log_5 2x} - \frac{9}{3 \log_5 2x} = \frac{4}{3 \log_5 2x}$$

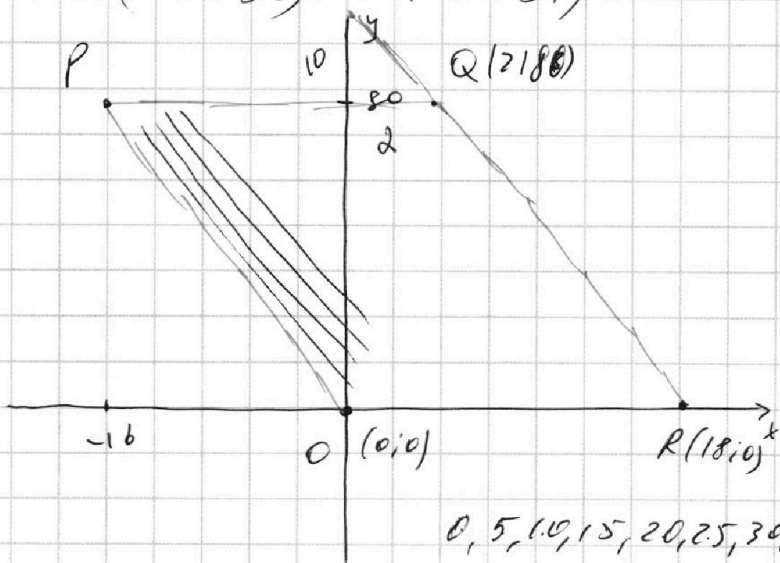
$$\frac{3 \log_5^5 2x + 9 \log_5 2x - 9 - 4}{3 \log_5 2x}$$

$$3t^5 + 9t - 13.$$

$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45.$$

~~$$5(x_2 + y_2) = 5(x_1 + y_1)$$~~

$$(5x_2 + y_2) - 5(x_1 + y_1) = 45.$$



$$t = -1$$

~~$$-5x^2 - 5x + y_1$$~~

$$45 + 5x_1 + y_1 - d = 0$$

$$y_1 = -5x_1 - 45 + d$$

$$5x_2 + y_2 = 5x_1 + y_1 + 45$$

$$5x_2 + y_2 + d = 5x_1 + y_1 + 45 + d$$

$$y_2 = -5x_2 - d$$

$$y_1 = -5x_1 - d - 45.$$

(10)