



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 1 Числа a, b, c можно записать в виде

$$a = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot k, \quad b = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{14} \cdot n,$$

$$c = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \cdot t, \quad \text{где } k, n, t \in \mathbb{N}.$$

Перемножим эти числа:

$$(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68} \cdot (knt), \quad \text{заменим, что}$$

$2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68} \cdot kn t$ должно быть полным квадратом и каждое простое число, на которое дел. (abc) должно входить в четной степени, значит $(knt) : 3$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34} \cdot \sqrt{\frac{knt}{3}}. \quad \text{ac делится}$$

на 5^{39} , значит abc тоже делится на 5^{39} , то есть $\sqrt{\frac{knt}{3}} : 5^5$, минимальное

$$\text{значение } \sqrt{\frac{knt}{3}} = 5^5 \Rightarrow$$

$$knt = 5^{10} \cdot 3 \quad \text{и } abc \text{ минимальное}$$

$$\text{значение } abc \text{ равно } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34} \cdot 5^5 =$$

$$= 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}, \quad \text{приведем пример 2 числа,}$$

при которых это достигается:

$$a = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{12}, \quad b = 2^3 \cdot 3^4, \quad c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{24}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

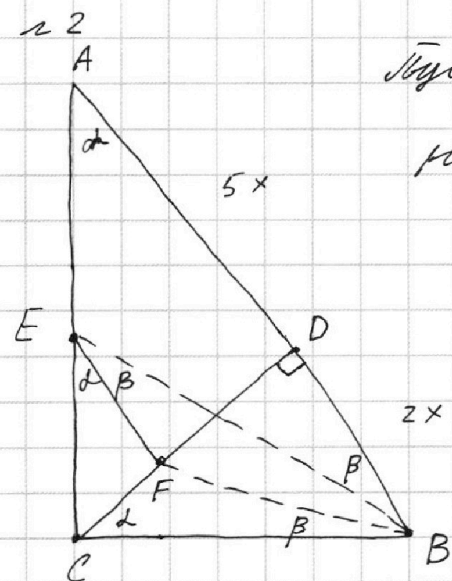
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $AD = 5x$, а $BD = 2x$. По теореме о проекции катета на гипотенузу в прямоугольном треугольнике $CD^2 = AD \cdot BD =$

$$= 10x^2 = CD = \sqrt{10}x. \text{ По т. Пифагора } AC = \sqrt{35}x \text{ и } BC = \sqrt{14}x. \text{ Пусть } \angle CAB = \alpha,$$

а $\angle BEF = \beta$. $\angle EFC = \alpha$, т.к. $EF \parallel AB$, а $\angle FEB = \angle FBC$ как углы между хордой и касательной $\Rightarrow \angle FBC = \beta$. $\angle FEB = \angle EBA$, т.к. $EF \parallel AB$. $\Rightarrow \angle EBA = \beta$. $\triangle EAB$ и $\triangle CFB$ по 2м углам. Пусть $\frac{CF}{ED} = k \Rightarrow CF = k \cdot \sqrt{10}x$,

из подобия $\triangle CEF$ и $\triangle CAD$ (т.к. $EF \parallel AD$)

$$CE = k \cdot AC = k \cdot \sqrt{35}x, \quad \frac{AB}{CB} = \frac{AE}{CF} = \frac{4}{\sqrt{14}} \Rightarrow$$

$$AE = k \cdot \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{14}}x, \quad AE + CE = kx(\sqrt{35} + \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{14}}) =$$

$$= \sqrt{35}x \Rightarrow k(\sqrt{35} + 1) \sqrt{35}(k-1) = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{14}}$$

$$k = 1 - \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{35}} = 1 - k = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{35} + \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{14}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \Rightarrow CF = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} \sqrt{10}x.$$

Из подобия $\triangle ECF$ и $\triangle ACB$ (по 2м углам)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

22

$$\frac{S_{ECF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{CF}{CB}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot x}{\sqrt{14} \cdot x}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{28}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ECF}} = \frac{28}{5}$$

Ответ: $\frac{28}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3 $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}, \quad \arcsin(\cos x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Возьмём ^{архсинус} синус от обеих частей с
учётом того, что $\frac{\pi - 2x}{10} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

I) $\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

~~$$\frac{5\pi - \pi + 2x}{10} = x \Leftrightarrow 10x = 4\pi + 2x$$~~

~~$$5\pi - 8x = \pi - 2x + 20\pi k, k \in \mathbb{Z}$$~~

~~$$-8x = -4\pi + 20\pi k$$~~

~~$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi k}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi k}{4}$$~~

~~$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi k}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -2\pi \leq 2\pi - 5\pi k \leq 2\pi$$~~

~~$$-4\pi \leq -5\pi k \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq -5k \leq 0$$~~

~~$$-\frac{4}{5} \leq k \leq 0$$~~

Проверим ~~возможное~~ $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

II) ~~$\frac{\pi}{2} - x =$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3 (трансформации)

$$I) \quad \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x + 20\pi k \Leftrightarrow -8x = -4\pi + 20\pi k$$

$$\S \quad x = \frac{\pi}{2} - \frac{20\pi k}{8}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{20\pi k}{8} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \frac{5k}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Подходим только $k=0$: $x = \frac{\pi}{2}$

$$II) \quad \frac{\pi}{2} - x = \pi - \left(\frac{\pi - 2x}{10}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$5\pi - 10x = 10\pi - \pi + 2x + 20\pi k$$

$$-12x = 4\pi + 20\pi k \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi k}{3}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi k}{3} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{3} - \frac{5k}{3} \leq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{6} \leq -\frac{5k}{3} \leq \frac{5}{6} \Leftrightarrow -5 \leq 10k \leq 1$$

Подходим только $k=0$: $x = -\frac{\pi}{3}$

Ответ:
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{3} \end{cases}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим 2 е ур-ние. Оно равно-
сильно:

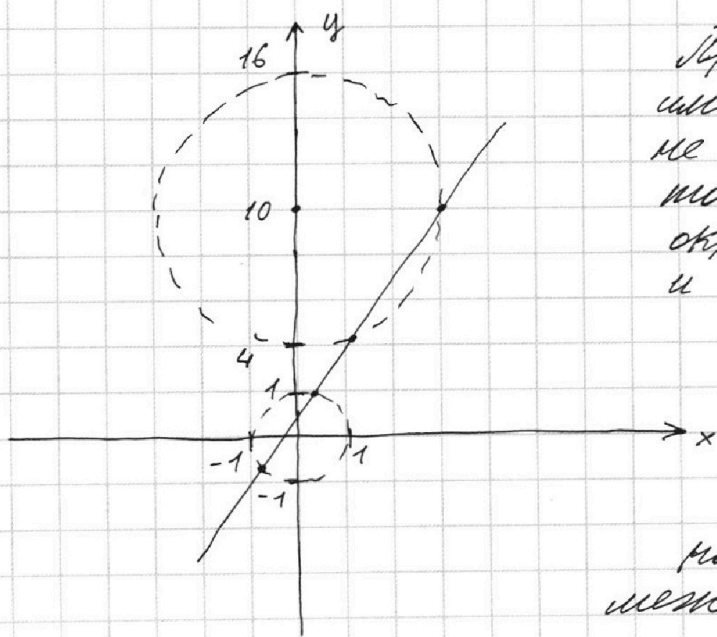
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \text{- окружность радиуса 1 с центром } (0; 0) \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 & \text{- окружность радиуса 6 с центром } (0; 10) \end{cases}$$

Второе ур-ние: $(0; 10)$

$$3y = ax - 4b$$

$$y = \frac{a}{3}x - \frac{4}{3}b \text{ - прямая с угловым коэф. } \frac{a}{3}.$$

Изобразим на декартовой плоскости.



Прямая может
иметь с окружностью
не более 2х общих
точек, причём
окр-нии $x^2 + y^2 = 1$
и $x^2 + (y - 10)^2 = 36$

не имеют
точек пере-
сечения, т.к.

расстояние
между центрами

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



54 (продолжение) больше суммы радиусов
окр-тей. Пусть $O_1(0;0)$, $O_2(0;10)$ - цент-
ры окружностей. Значит прямая
касается меньшей из окр-
тей ровно 2 общие точки, но если
расстояние от прямой до O_1 и O_2
должно быть меньше R_1 и R_2 , где $R_1 =$
 1 и $R_2 = 6$ - радиусы окр-тей. Писме-
нная ф-ла расстояния от точки

до прямой. $L(x,y) = ax - 3y + 4b = 0$

$$P(L; O_1) = \frac{|4b|}{\sqrt{a^2+9}}, \quad P(L; O_2) = \frac{|30a+4b|}{\sqrt{a^2+9}}$$

$$\begin{cases} \frac{|4b|}{\sqrt{a^2+9}} < 1 \\ \frac{|4b-30|}{\sqrt{a^2+9}} < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |4b| < \sqrt{a^2+9} \\ |4b-30| < 6\sqrt{a^2+9} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\sqrt{a^2+9} < 4b < \sqrt{a^2+9} \\ 30-6\sqrt{a^2+9} < 4b < 6\sqrt{a^2+9} + 30 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Решений нет,} \\ \text{когда интер-} \\ \text{валы} \end{array}$$

$$(-\sqrt{a^2+9}; \sqrt{a^2+9}) \text{ и } (30-6\sqrt{a^2+9}; 6\sqrt{a^2+9}+30)$$

имеют общие точки.

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

254 (школа) (семейство)

Покажем, что $6\sqrt{a^2+9} + 30 > -\sqrt{a^2+9}$

Значит решение есть тем, когда

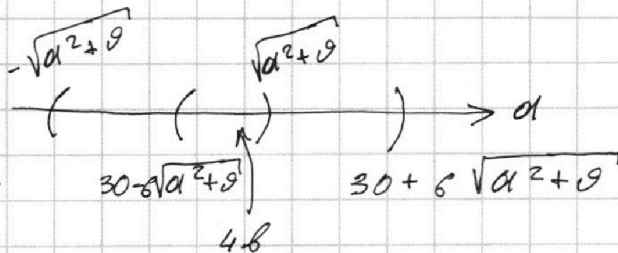
$$\sqrt{a^2+9} \leq 30 - 6\sqrt{a^2+9} \Leftrightarrow 7\sqrt{a^2+9} \leq 30$$

$$49a^2 + 49 \cdot 9 \leq 900 \quad 49a^2 \leq 9 \cdot 51$$

$$a^2 \leq \frac{9 \cdot 51}{49} \Leftrightarrow a \in \left[-\frac{3\sqrt{51}}{7}; \frac{3\sqrt{51}}{7} \right],$$

или $a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty)$ -

решения есть, то есть при данных



а можно

возьмем $4b \in (30 - 6\sqrt{a^2+9}; 30 + 6\sqrt{a^2+9})$
 $\in (\max(-\sqrt{a^2+9}, 30 - 6\sqrt{a^2+9});$
 $\sqrt{a^2+9})$, то есть

какое-то $4b$ из интервала, что
обеспечит 4 решения.

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases}
 \log_5^4 2x - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3 \\
 \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} \left(\frac{2}{10}\right) - 3
 \end{cases}$$

$$\log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{1}{\log_5 8x^3} - 3 = 0. \text{ Д. 3.}$$

$$= \frac{4}{\log_5 8x^3} - 3 \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3(\log_5 2x) \log_5 2} - 3 \quad \begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 + \frac{4}{\log_5 y} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}} y^3} - 3$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3 \log_5 y} - 3$$

Заменим: $a = \log_5 2x$, $b = \log_5 y$, $a, b \neq 0$
в силу 0. Д. 3.

$$\begin{cases}
 a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \\
 b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3
 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}
 a^4 = \frac{13}{3a} - 3 & (1) \\
 b^4 = -\frac{13}{3b} - 3 & (2)
 \end{cases}$$

Вычитаем из (1) (2):
~~сложим~~ ~~сложим~~ ~~сложим~~

$$a^4 - b^4 = \frac{13}{3a} + \frac{13}{3b}$$

$$(a^2 + b^2)(a - b)(a + b) = \frac{13(a+b)}{3ab}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(a+b) \cdot \left[(a^2+b^2)(a-b) - \frac{13}{3ab} \right] = 0, \quad a = -b \text{ - решение.}$$

$$(a^2+b^2)(a-b) = \frac{13}{ab} \quad | \cdot ab \neq 0$$

$$\begin{aligned} \log_5 2x + \log_5 4y &= \\ &= \log_5 2xy = 0 \\ xy &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$ab(a^3 - a^2b + b^2a - b^3) = 13$$

$$ab(a^3 - a^2b + b^2a - b^3) = 13$$

$$(a+b)(a^3 - a^2b + b^2a - b^3) = a^4 - b^4, \text{ значим}$$

$$\text{если } (a+b) \neq 0, \text{ то } a-b = 0 \Leftrightarrow a=b$$

Тогда $a=b$ система примет вид:

$$a^4 = \frac{13}{3a} - 3$$

$$a^4 = -\frac{13}{3a} - 3$$

$$ab(a^3 - a^2b + b^2a - b^3) = 13$$

$$a^4b - a^3b^2 + b^3a^2 - b^4a = 13$$

Умножим уравнение на $a+b$, приведем к нулю, что

$$\text{Ответ: } xy = \frac{1}{2}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot k$

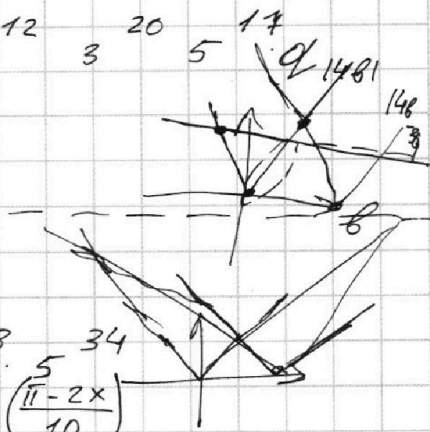
$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \cdot t$

$(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68} \cdot p \cdot q \cdot t$

$(pqt) : \begin{matrix} 3 \\ a & b & c \end{matrix} \quad abc = 2^{14} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

$14 = 4 + 8$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$



3 $t = \sqrt{a^2 + 9} - \epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$ $x^2 + (y - 10)^2 - 36 = 0$

$a \quad b \quad c$

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{5\pi}{10}$

$a = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^{12}$

$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0$

$c = 2^0 \cdot 3^{14} \cdot 5^{24}$

2 $14 \quad 5 \quad 3 \quad 9$

3 $28 \quad 4 \quad 4 \quad 14$

$ax - 3y + 4z$

5 $34 \quad x \quad y \quad z$

$\pi - \frac{5\pi}{30} = 14b$

$\pi - \frac{\pi}{6} = 14b - 30$

$= \frac{5\pi}{6} \times 0 \quad y$

$2 \cdot 3 \cdot 5^{12}$

$x + y \geq 12$

$t^2 < a^2 + 9$

$2 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 5^{24}$

$5 \Delta x$

$y + z \geq 14$

$x \cdot \frac{1}{6} \cdot (14b - 30) \cdot t - 30$

$2 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 5^{39}$

$x + z \geq 39$

$12 \quad 0 \quad 2 \quad 4$

$4b =$

$12 + 24 = 36$

$4^2 - 20 \cdot 4 + 64 = 0$

$16b^2 < a^2 + 9$

$16b^2 - 240b + 900 < 36a^2 + 36 \cdot 9$

$a + b \neq 0$

$2(x + y + z)$

$a^4 + b^4 = \frac{13(b-a)}{1308} - 6$

$a^4 = \frac{13}{3a} - 3$

