МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 9\right)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot k_a$; $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot k_b$; $c = 2^{\delta_1} \cdot 3^{\delta_2} \cdot 5^{\delta_3} \cdot k_c$, где $k_a \not\vdots 2$; $k_a \not\vdots 3$; $k_a \not\vdots 5$. Аналогично k_b и k_c не делятся на 2; 3; 5.

Т.к. ~~ab~~ $ab = 2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2} \cdot 5^{\alpha_3 \cdot \beta_3} \cdot k_a \cdot k_b$ и $ab \vdots 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$, тогда

(1а) $\alpha_1+\beta_1 \geq 9$; (1б) $\alpha_2+\beta_2 \geq 10$; (1в) $\alpha_3+\beta_3 \geq 10$.

Аналогично для произведений bc и ac:

~~$\beta_1+\beta_2$~~ $\Rightarrow$ (2а) $\beta_1+\delta_1 \geq 14$; (2б) $\beta_2+\delta_2 \geq 13$; (2в) $\beta_3+\delta_3 \geq 13$

(3а) $\alpha_1+\delta_1 \geq 19$; (3б) $\alpha_2+\delta_2 \geq 18$; (3в) $\alpha_3+\delta_3 \geq 30$.

Сложим неравенства (1а); (2а); (3а) и разделим их обе части на 2: $\alpha_1+\beta_1+\delta_1 \geq 21$.

Сложим неравенства (2б); (1б); (3б) и разделим их обе части на 2:

$\alpha_2+\beta_2+\delta_2 \geq 20,5$

~~Сложим~~ Аналогично для неравенств (1в); (2в); (3в):

$\alpha_3+\beta_3+\delta_3 \geq 26,5$.

Т.к. a; b; c – натуральные числа, то α_1; β_1; δ_1; α_2; β_2; δ_2; α_3; β_3; δ_3 ~~не~~ неотрицательные целые.

$abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\delta_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2+\delta_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3 \cdot \delta_3} \cdot k_a \cdot k_b \cdot k_c \geq 2^{21} \cdot 3^{20,5} \cdot 5^{26,5}$.

$(\alpha_2+\beta_2+\delta_2) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha_2+\beta_2+\delta_2 \geq 21$; аналогично $\alpha_3+\beta_3+\delta_3 \geq 27$.

Тогда $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$. Но т.к. $ac \vdots 5^{30}$, то $\alpha_3+\beta_3+\delta_3 \geq 30$; $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

При чём равенство достигается при $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$;

$b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0$; $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{13}$

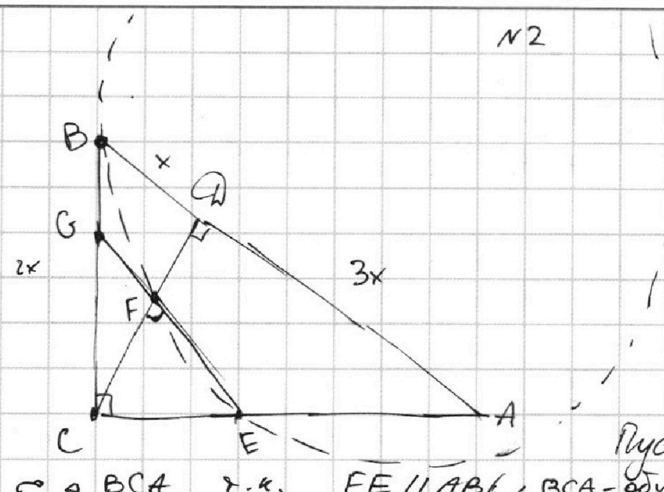
Ответ: наименьшее $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



Пусть $BD = x$, тогда $AD = 3x$.
CD - высота, проведенная из вершины прямого угла прямоугольн. треугольника, тогда $CD = \sqrt{BD\cdot AD}$
$CD = x\sqrt{3}$.
По теореме Пифагора из $\triangle BDC$: $BC^2 = BD^2 + CD^2$
$BC = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$

Пусть $G = FE \cap BC$, тогда $\triangle GCE \sim \triangle BCA$ т.к. $FE \parallel AB$ ($\angle BCA$ - общий; $\angle CEG = \angle CAB$ как соответств. при $FE \parallel AB$, секущей AC). $\frac{GC}{BC} = \frac{GE}{AB} = \frac{CE}{AC} = \alpha$.

Аналогично $\triangle CFG \sim \triangle CDB$ ($\angle DCB$ - общий; $\angle CGF = \angle CBD$), тогда $\alpha = \frac{CG}{BC} = \frac{GF}{BD}$. Тогда $GF = BD\cdot\alpha = x\alpha$; $GE = BA\cdot\alpha = 4x\alpha$.
$GB = CB - GC = 2x - 2x\alpha = 2x(1-\alpha)$

Степень т. G относительно окр, касающейся BC в т. B, проходящей через F и E: $GB^2 = GF\cdot GE$.
$4x^2(1-\alpha)^2 = x\alpha \cdot 4x\alpha$
$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^2$; $\alpha = \frac{1}{2}$.

~~Т.к. $\triangle CFE \sim \triangle AD$~~ $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC\cdot AC$; $S_{CFE} = \frac{1}{2} CF\cdot FE$

По теореме Пифагора из $\triangle ABC$: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2x\sqrt{3}$

$CE = AC\cdot\alpha = x\sqrt{3}$; $FE = 3x\cdot\alpha = 1{,}5x$

По теореме Пифагора из $\triangle CFE$ ($\angle CFE = \angle CDA = 90^\circ$ как соответственные при $FE \parallel AB$, секущей CD): $CF = \sqrt{CE^2 - FE^2} = \sqrt{3x^2 - \frac{9}{4}x^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{1}{2} BC\cdot AC}{\frac{1}{2}\cdot CF\cdot FE} = \frac{2x\cdot 2x\sqrt{3}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}x} = \frac{16}{3}$$

Ответ: $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

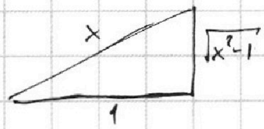
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

~~1) $\cos x \geq 0$.~~ 1) $\cos x \geq 0$; ~~$x \geq$~~

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетом 1 и гипотенузой x:



$\arcsin(\cos x) = \sqrt{x^2-1}$.

$5\sqrt{x^2-1} = x + \frac{\pi}{2}$

$25x^2 - 25 = x^2 + x\pi + \frac{\pi^2}{4}$

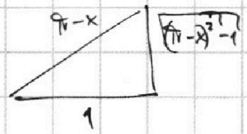
$24x^2 - x\pi - 25 - \frac{\pi^2}{4} = 0$.

$x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 2400 + 24\pi^2}}{48}$; $x = \frac{\pi \pm 5\sqrt{\pi^2+96}}{48}$

~~Ответ: $x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2+2400+24\pi^2}}{48}$~~

2) $\cos x < 0$;

Рассмотрим прямоуг. треугольник с катетом 1 и гипотенузой $\pi - x$



$\arcsin(\cos x) = \sqrt{(\pi-x)^2-1}$

$5\sqrt{(\pi-x)^2-1} = x + \frac{\pi}{2}$

$25\pi^2 + 25x^2 - 50\pi x - 25 = x^2 + \pi x + \frac{\pi^2}{4}$

$24x^2 - 51\pi x - 25 + 25\pi^2 - \frac{\pi^2}{4} = 0$

$x = \frac{51\pi \pm \sqrt{2601\pi^2 + 2400 - 2400\pi^2 + 24\pi^2}}{48}$

$x = \frac{51\pi \pm \sqrt{225\pi^2 + 2400}}{48}$; $x = \frac{51\pi \pm 5\sqrt{9\pi^2+96}}{48}$

Ответ: $x = \frac{\pi \pm 5\sqrt{\pi^2+96}}{48}$, $x = \frac{51\pi \pm 5\sqrt{9\pi^2+96}}{48}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

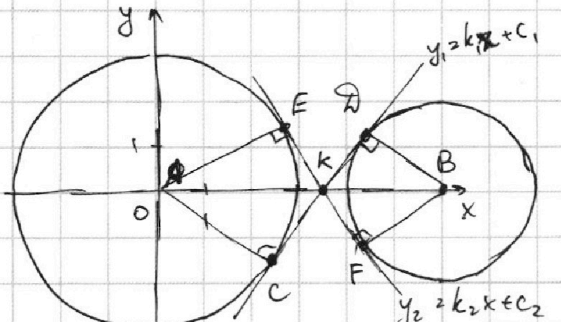
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=1{,}5b-\frac{a}{2}x \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{array}\right. \end{cases}$$



Решением совокупности являются 2 окружности.
A - центр окр. $x^2+y^2=9$; B - центр окр. $(x-6)^2+y^2=4$
Проведём их общие внутренние касательные $y_1=k_1x+c_1$ и $y_2=k_2x+c_2$

Пусть C и D - т. касания $y_1=k_1x+c_1$ с окружностями, заданными уравнениями $x^2+y^2=9$ и $(x-6)^2+y^2=4$. Т. E и F - аналогичные для прямой $y_2=k_2x+c_2$.
Т. K - т. пересечения Ox и $y_1=k_1x+c_1$
Заметим, что $k_1>0$, при этом, если $-\frac{a}{2}\geq k_1$, то система уравнений не может иметь больше 2-х решений, всегда если $k_1>-\frac{a}{2}\geq 0$, то система уравнений может иметь 4 решения.

~~Рассмотрим~~ $\triangle ACK \sim \triangle KBD$ по двум углам ($\angle AKC = \angle BKD$ как вертикальные, а $\angle ACK = \angle KDB = 90°$ как углы между касательной и радиусами, проведенными в т. касания)

$\frac{AK}{KB}=\frac{AC}{BD}=\frac{3}{2}$. $AB=6$, тогда $AK=3{,}6$; $KB=2{,}4$.

$k_1=tg_{DKB}=\frac{2}{2{,}4}=\frac{5}{6}$. $K(3{,}6;0)$; $\cancel{0=3{,}6\cdot\frac{5}{6}+c_1}$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2}\leq\frac{5}{6} \\ -\frac{a}{2}\geq 0 \end{cases} \begin{cases} a\geq-\frac{5}{3} \\ a\leq 0 \end{cases};\ a\in\left[-\frac{5}{3};0\right].$$

В силу симметрии $y_2=k_2x+c_2$ пересекает Ox в т. K.
$\triangle AEK \sim \triangle BFK$. $k_2=-tg_{AKE}=-\frac{3}{3{,}6}=-\frac{5}{6}$.

При $-\frac{a}{2}\leq k_2$ система не может иметь более 2-х решений, тогда $0>-\frac{a}{2}\geq k_2$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2}<0 \\ -\frac{a}{2}\geq-\frac{5}{6} \end{cases} \begin{cases} a>0 \\ a\leq\frac{5}{3} \end{cases}.\quad a\in\left(0;\frac{5}{3}\right].$$

Т.е. при $a\in\left[-\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right]$ найдётся такое b, что система имеет 4 решения.

Ответ: $a\in\left[-\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right]$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4 x = 2{,}5\log_x 3 - 6\log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4 x = -3{,}5\log_x 3 - 8 \quad (1)$$

$$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$$

$$\log_3^4(5y) = -2\log_{5y} 3 + 5{,}5\log_{5y} 3 - 8$$

$$\log_3^4(5y) = 3{,}5\log_{5y} 3 - 8 \quad (2)$$

Рассмотрим разность (1) - (2):

$$\log_3^4 x - \log_3^4(5y) = -3{,}5(\log_x 3 + \log_{5y} 3)$$

$$(\log_3 x - \log_3(5y))(\log_3 x + \log_3(5y))(\log_3^2 x + \log_3^2(5y)) =$$

$$= -3{,}5\,\cancel{\log}\left(\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 5y}\right)$$

$$\log_3\left(\frac{x}{5y}\right)\cdot\log_3(5xy)(\log_3^2 x + \log_3^2(5y)) = -3{,}5\left(\frac{\log_3(5xy)}{\log_3 x\cdot\log_3(5y)}\right)$$

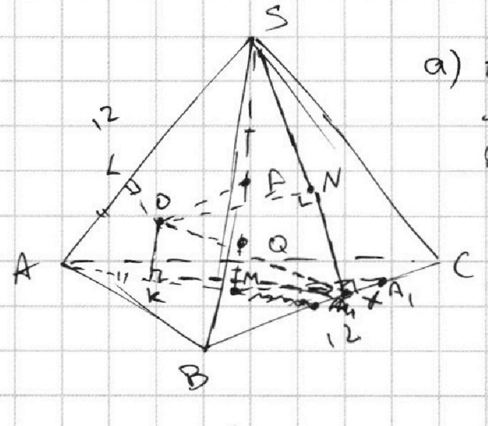
$$\left[\begin{array}{l} 5xy = 1 \quad (3) \\ \log_3\left(\frac{x}{5y}\right)\cdot(\log_3^2 x + \log_3^2(5y)) = \dfrac{-3{,}5}{\log_3 x\cdot\log_3(5y)} \quad (4) \end{array}\right.$$

4 (3): $xy = \frac{1}{5}$.

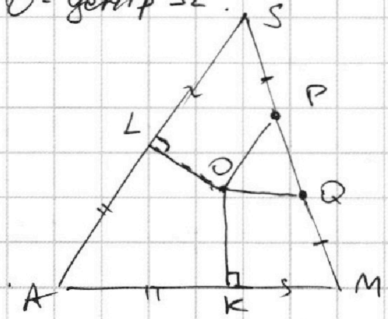
(4): $\log_3\left(\frac{x}{5y}\right)\cdot\log_3 x\cdot\log_3(5y) < 0$

Ответ: $xy = 0{,}2$

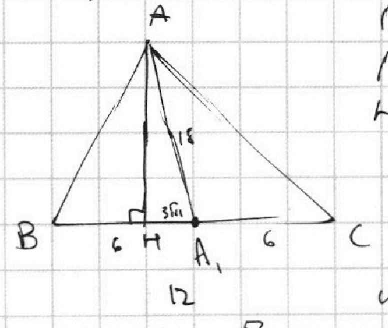
№7



а) Рассмотрим $\triangle ASM$.
Заметим, что ~~ASM~~ $O \in (ASM)$, где
O - центр Ω.



$AK = AL$ как отрезки касательных, проведенных к сечению Ω
из т. A. Степень т. S относ. сеч. Ω: $SL^2 = SP \cdot SQ = MQ \cdot MP =$
$= MK^2 \Rightarrow MK = LS$. Тогда $AM = AS = 12$.
$AM = \frac{2}{3} AA_1$ т.к. M - т. пересеч. медиан $\triangle ABC$. $AA_1 = 18$
Рассмотрим $\triangle ABC$.



Проведём в нём высоту AH.
По теореме Пифагора из $\triangle AHA_1$:
$HA_1 = \sqrt{AA_1^2 - AH^2}$. $AH = \frac{S_{ABC}}{\frac{1}{2} \cdot BC} = \frac{90}{6} = 15$.

$HA_1 = \sqrt{324 - 225} = 3\sqrt{11}$

$BH = 6 - 3\sqrt{11}$; По теореме Пифагора
из $\triangle BAH$: $AB = \sqrt{36 + 99 - 36\sqrt{11} + 225} = 6\sqrt{10 - \sqrt{11}}$

По теореме Пифагора из $\triangle AHC$: $AC = \sqrt{36 + 99 + 36\sqrt{11} + 225} = 6\sqrt{10 + \sqrt{11}}$

$BB_1 = \frac{\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{720 - 72\sqrt{11} + 288 - 360 - 36\sqrt{11}}}{2} = \frac{\sqrt{648 - 108\sqrt{11}}}{2} = \sqrt{162 - 27\sqrt{11}} =$
$= 3\sqrt{18 - 3\sqrt{11}}$

$CC_1 = \frac{\sqrt{2BC^2 + 2AC^2 - AB^2}}{2} = \frac{\sqrt{720 + 72\sqrt{11} + 288 - 360 + 36\sqrt{11}}}{2} = 3\sqrt{18 + 3\sqrt{11}}$.

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 9 \cdot \sqrt{18^2 - 99} = 18 \cdot 9 \cdot 15 = 9^2 \cdot 30 = 2430$.

б) Опустим из N перпендикуляр NX на BC.
По теореме о трёх перпендикулярах т.к. $ON \perp (BSC)$ ((BSC) касается Ω); NX - проекция OX на (BSC); $NX \perp BC$, OX - секущая, то $OX \perp BC$.
По теореме о трёх перпендикулярах $OK \perp (ABC)$ ((ABC) касается

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

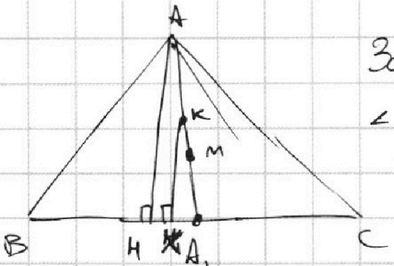
Ω); KX – проекция секущей OX на (ABC); $OX \perp BC$, значит, $KX \perp BC$. Тогда двугранный угол при ребре BC равен $\angle KXN$.

Заметим, что XO – биссектриса $\angle KXN$ т.к. Ω касается (ABC); (BSC), тогда $\angle KXO = \frac{1}{2}\angle KXN$.

Заметим, что $SL = SN$ т.к. прямоугольные $\triangle LOS = \triangle OSN$ по катету и гипотенузе ($OL = ON = 5$; OS – общая)

$AK = AL = AS - LS = 12 - 4 = 8.$

Рассмотрим $\triangle ABC$



Заметим, что $\triangle AHA_1 \sim \triangle XKA_1$ т.к. $\angle XA_1A$ – общий ($K \in AA_1$); $KX \perp BC$; $AH \perp BC \Rightarrow AH \parallel KX$.

$$\frac{KX}{AH} = \frac{A_1K}{AA_1}; \quad KX = \frac{AH \cdot A_1K}{AA_1}$$

$$A_1K = AA_1 - AK = 18 - 8 = 10; \quad KX = \frac{15 \cdot 10}{18} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$$

$$\operatorname{tg}\angle KXO = \frac{OK}{KX} = \frac{5}{\frac{25}{3}} = \frac{3}{5}; \quad \angle KXO = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$$

$$\angle KXN = 2\operatorname{arctg}\frac{3}{5}.$$

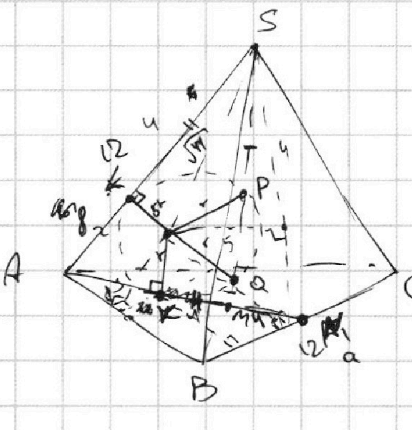
Ответ: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 2430$; $\angle KXN = 2\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$, где $\angle KXN$ – двугранный угол при ребре BC по доказанному.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$SL^2 = SP\cdot SQ = MQ\cdot MP = MK^2$

$S_{ABC} = 90$

$AM = 12$.

$AA_1 = \frac{3}{2}\cdot 12 = 18$

$\sqrt{\frac{2a^2+2b^2-c^2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2a^2+2c^2-b^2}{2}} =$

$= 4a^2 + 8a^2c^2 + 2a^2b^2 + 4b^2c^2$

$384 = \frac{-144 + \cancel{720} - 72\sqrt{11} + 720 + 72\sqrt{11}}{4} =$

$= \frac{1440-144}{4} = \frac{1296}{4} = 324$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_x 243 - 8$

$\frac{1}{\log_x^4 3} + (6-2,5)\log_x 3 + 8 = 0.$

$\log_3^4 x - \log_3^4 9 = -3,5\log_x 3$

$(\log_3 x - \log_3 9)(\log_3 x + \log_3 9)(\log_3^2 x + \log_3^2 9) = -3,5\log_x 3$

$\log_3 \frac{x}{9}\cdot\log_3 9x\,(\log_3^2 x + \log_3^2 9)$.

$9^2\cdot 30$

2430

$\log_3^4 x = -3,5\log_x 3 - 8$

$\log_3^4 x + \log_3^4(5y) = -3,5\log_{5y} 3 - 3,5\log_x 3 - 16.$

$x = 3^\alpha;\ 5y = 3^{\cancel{\beta}};$

$\alpha^4 + \cancel{\beta}^4 = -\cancel{35}$

$x = 3^\alpha$

$5y = 3^\gamma$

$(\alpha-\gamma)\alpha\cdot\gamma < 0.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6 □ 7 □

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$abc \geq [a; b; c]$ $\quad abc \vdots 2^{19}$ $\quad \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \geq 21$

$\alpha_1+\beta_1 \geq 9$

$\alpha_1+\gamma_1 \geq 19$

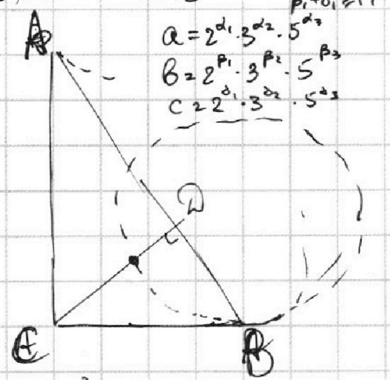
$\beta_1+\gamma_1 \geq 14$

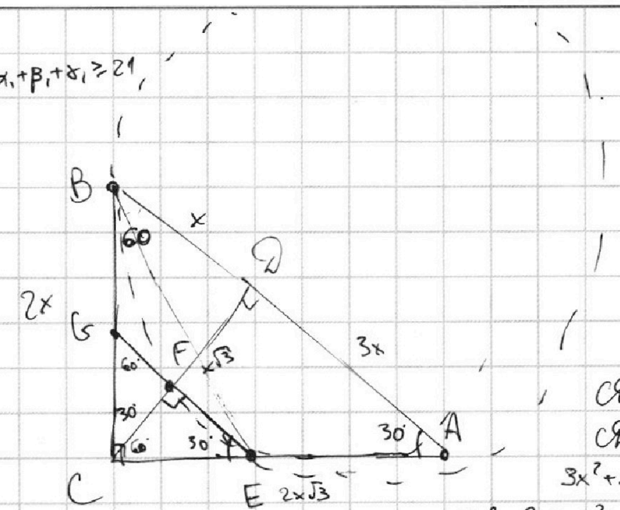
$a \not\vdots 2^{10} \Rightarrow c \vdots 2^{10}$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$





$CD^2 = AD \cdot AB$

$CD = x\sqrt{3}$

$3x^2 + x^2 = 4x^2 = CB^2$

$3x^2 + x^2 = 4x^2$ $\quad CB = 2x$

$GB^2 = GF \cdot GE$

$CB^2 = CF \cdot CD$

$4x^2 \qquad x\sqrt{3}$

$\frac{CF}{BC} = \frac{FE}{AC}$

$CF = \frac{4x^2}{x\sqrt{3}} = \frac{4x\sqrt{3}}{3}$

$\cancel{CF}\ \cancel{FE} = GE = \cancel{4} 4x \cdot \alpha$

$GF = x \cdot \alpha$

$GC = 2x \cdot \alpha$

$GB = 2x(1-\alpha)$

6 3 13 2 12 2

$AC = \sqrt{16x^2 - \frac{16x^2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 16x^2}{3}} = \frac{4x\sqrt{6}}{3}$

$4x^2(1-\alpha) = 4x \cdot \alpha \cdot 4x \cdot \alpha$

$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0.$

$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

8 2 12

$FE = \frac{CF \cdot AC}{BC} = \frac{\frac{4x\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{4x\sqrt{6}}{3}}{2x} = \frac{16x^2\sqrt{2}}{6x} = \frac{8x\sqrt{2}}{3}$

$\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{4x\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{8x\sqrt{2}}{3}}{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{4x\sqrt{6}}{3} \cdot 2x} = \frac{4}{3}$

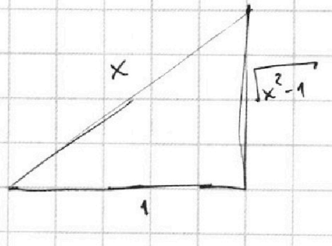
22 $\quad \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5+1-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$\frac{2400}{25} = 24 \cdot 4 = 96$

3 $\quad \frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{9-5} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

0

12



$5\sqrt{x^2-1} = x + \frac{\pi}{2}$

$25(x^2-1) = x^2 + \pi x + \frac{\pi^2}{4}$

$24x^2 - \pi x - 25 - \frac{\pi^2}{4} = 0$

$x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 4 \cdot 24(25 + \frac{\pi^2}{4})}}{48} = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 2400 + 24\pi^2}}{48} = \frac{\pi \pm 5\sqrt{\pi^2 + 96}}{48}$

$\cos\left(\frac{\pi - 5\sqrt{\pi^2 + 96}}{48}\right) =$

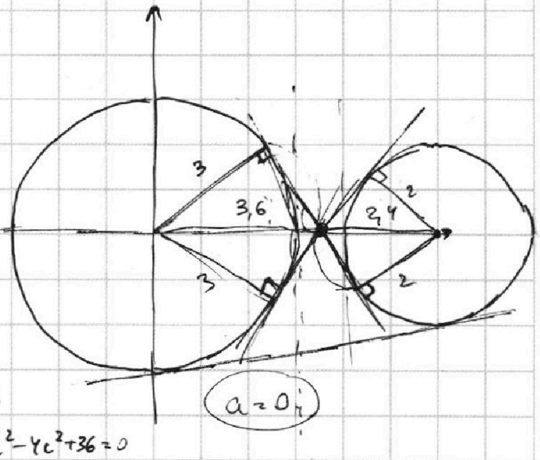
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\begin{cases} ax+2y=3b \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ x^2-12x+y^2+32=0 \end{array}\right. \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \cancel{ax+2y=3b} \\ \cancel{x^2+y^2=9} \end{cases}$ $\quad y=1{,}5b-\frac{a}{2}x$ $\quad \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{array}\right.$



$a=0;$

$\cancel{y=ax}$ $y=kx+c$

$x^2+y^2=9$

$x^2+k^2x^2+2kxc+c^2=9$

$x^2(k^2+1)+2kcx+c^2-9=0$

$\cancel{x=?}\ D=0=4k^2c^2-\cancel{4k^2c^2}-\cancel{4c^2}+36\cancel{=c=3}$

$y=kx+3$ $\quad -4(k^2+1)(c^2-9)=4k^2c^2+36k^2-4c^2+36=0$

$9k^2-c^2+9=0.$

$\frac{2}{3}\cdot 6=4$

$x+y=2{,}5y=6$ $\quad y=\frac{12}{5}=2{,}4$

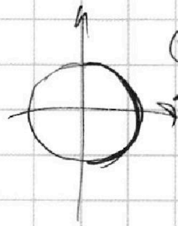
$\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$

$y(3{,}6)=0.$

$0=3{,}6k+c$

$c=-3{,}6k$

$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{\sqrt{2{,}4^2-2^2}}=\frac{2}{}$



$(x-6)^2+y^2=4$

$x^2-12x+36+k^2x^2+2kxc+c^2=4$

$x^2(k^2+1)+x(2kc-12)+32+c^2=0.$

$D=0=4k^2c^2+144-48kc-4(k^2+1)(32+c^2)=4k^2c^2-48kc+144-128k^2-4k^2c^2-128-4c^2$

$=-128k^2-4c^2+16-48kc=0$

$32k^2+c^2-4+12kc=0.$

$(6k+c)^2=4+4k^2$

$y=kx-3{,}6k$

$x^2+k^2x^2-7{,}2k^2x+\frac{6^4}{100}k^2-9=0.$

$a\in\left(-\frac{5\sqrt{11}}{11};\frac{5\sqrt{11}}{11}\right)$

$\begin{array}{r} 2{,}4 \\ \times 2{,}4 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 5{,}76 \end{array}$

$1{,}76=\frac{176}{100}=\frac{44}{25}$ $\quad k=\frac{2}{\sqrt{\frac{44}{25}}}=\frac{2}{\frac{2}{5}\sqrt{11}}=\frac{5\sqrt{11}}{11}$

$x^\alpha=3$

$x=3^{\frac{1}{\alpha}}$

$\log_3^4(5y)+2\log_{5y}3$

$\log_3^4 x+6\log_x 3=\frac{5}{2}\log_x 3-8$

Q $\quad (y_2-y_1):3$

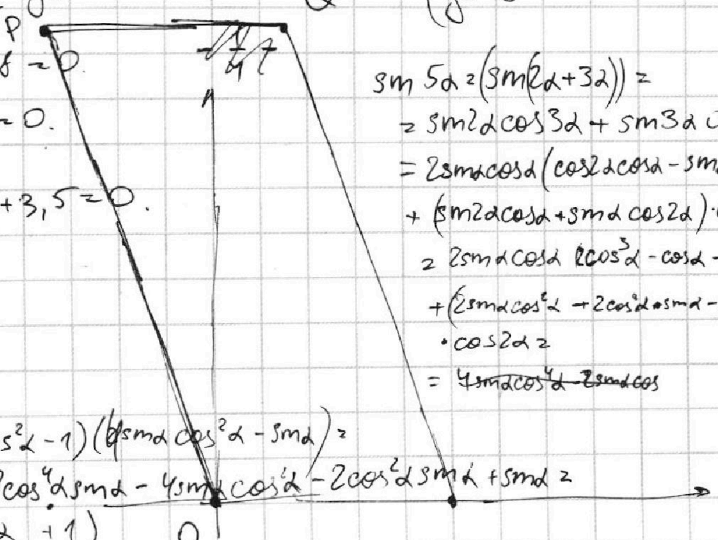
$\log_3^4 x+3{,}5\log_x 3+8=0$

$\log_3^4 x+\frac{3{,}5}{\log_3 x}+8=0.$

$\log_3^5 x+\cancel{3{,}5}+8\log_3 x+3{,}5=0.$

$2t^5+16t+7=0.$

$\log_3^4 x+\log_3^3 9$



$\sin 5\alpha=(\sin(2\alpha+3\alpha))=$

$=\sin 2\alpha\cos 3\alpha+\sin 3\alpha\cos 2\alpha=$

$=2\sin\alpha\cos\alpha(\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin 2\alpha)+$

$+(\sin 2\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos 2\alpha)\cdot\cos 2\alpha=$

$=2\sin\alpha\cos\alpha(2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha)+$

$+(2\sin\alpha\cos^2\alpha+2\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin\alpha)\cdot$

$\cdot\cos 2\alpha=$

$=\cancel{4\sin\alpha\cos^4\alpha-2\sin\alpha\cos}$

$=2\sin\alpha\cos\alpha(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)+(2\cos^2\alpha-1)(4\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin\alpha)=$

$=8\sin\alpha\cos^4\alpha-6\sin\alpha\cos^2\alpha+8\cos^4\alpha\sin\alpha-4\sin\alpha\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha\sin\alpha+\sin\alpha=$

$=\sin\alpha(16\cos^4\alpha-12\cos^2\alpha+1)$