



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Решим  $ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2$ .~~

~~Отсюда  $z = \frac{14 + 17 + 20}{7} = \frac{10 + 17 + 37}{7}$~~

~~$= 2^{51} \cdot 7^{64}$~~

~~разделим на  $b^2 c^2$ , получим  $a^2$ ,  
который кратен~~

Обозначим  $x_a, x_b, x_c$  — суммы  
входящих звонков в числа  
 $a, b, c$  соответственно, и  $y_a, y_b, y_c$  —  
суммы входящих звонков

туда же. Заменим  $y$  на  $x$

$$\begin{cases} x_a + x_b \geq 14 \\ x_b + x_c \geq 17 \\ x_a + x_c \geq 20 \end{cases}$$

случае получаем

$$2(x_a + x_b + x_c) \geq 51, \quad x_a + x_b + x_c \geq 25,5.$$

$$x_a, x_b, x_c \in \mathbb{N}, \quad \text{значит } x_a + x_b + x_c \geq 26$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пример:  $x_a = 17$   $x_a =$

$$\begin{cases} x_a + x_b = 15 \\ x_b + x_c = 17 \\ x_a + x_c = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_c - x_a = 2 \\ x_c + x_a = 20 \end{cases}$$

$x_c = 11$ ;  $x_a = 9$ ;  $x_b = 6$  пример

на  $x_a + x_b + x_c = 26$

Вторая система:

$$\begin{cases} y_a + y_b \geq 10 \\ y_b + y_c \geq 17 \\ y_a + y_c \geq 37 \end{cases} \quad 2(y_a + y_b + y_c) \geq 64$$

$$y_a + y_b + y_c \geq 32$$

Но  $y$  как есть и более сильное

утверждение:  $y_a + y_c \geq 37$  (т.к.  $y_b \geq 0$ )

Отсюда  $y_a + y_b + y_c \geq 37$

Пример на  $y_a + y_b + y_c = 37$

$y_a = 10$ ;  $y_c = 27$ ;  $y_b = 0$ .

Мы получили две минимальные  
суммы переменных в системе.

Ответ:  $26 \cdot 37$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2  
Ну, давайте повернём граф

$$\frac{a^2 - 6ab + b^2}{a} \cdot \frac{a^2 - 6ab + b^2}{a+b} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - 8ab}{a+b} =$$
$$= \frac{(a+b)^2 - 8ab}{a+b}$$

Ну, пусть  $a+b = m$ ; мы хотим  
чтобы сверху тоже делилось на  $m$   
 $(a+b)^2 \div m$ . Надо чтобы  $8ab \div m$   
заменим, что числа  $(a+b)$  и  $ab$   
взаимнопросты (т.к. число  $ab$  делит  
на все простые делители  
чисел  $a$  и  $b$  и ни на какие боль-  
ше, а число  $a+b$  не делится  
на них, т.к.  $a$  и  $b$  взаимнопро-  
сты).

$$\begin{cases} a+b \div m \\ 8ab \div m \\ \text{НОД}(a+b, 8ab) = 1 \end{cases} \begin{cases} \text{случай } m \nmid 8 \\ \text{т.к. } 8 \div m \text{ и } ab \div m \\ \text{т.к. } a+b \div m \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пример для  $m = 8$

$$a = 5; b = 3$$

$$\frac{5+3}{5^2+3^2-6 \cdot 15} = \frac{8}{34 - \frac{60}{90}} = -\frac{8}{56}$$

Умнож. сокр. на 8, получаем  $-\frac{1}{7}$ .

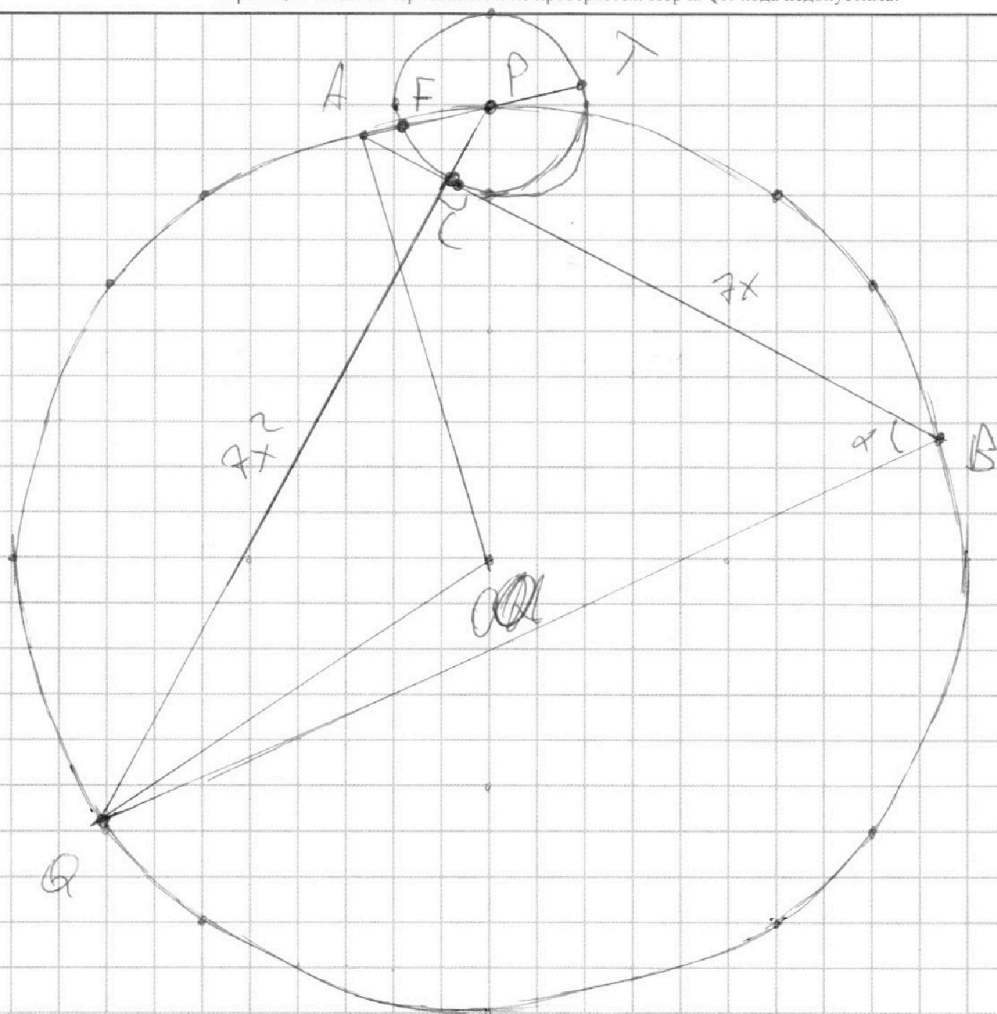
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Проведем диаметр центра  $P$ ,  $O$   
перпендикуляр  $ω$  и  $Ω$  совм.

Проведем  $PC$  до перпендикуляра  $Ω$  в м.  $Q$

Пусть  $OA = OB = 5$  см;  $PC = 1$  см

(введем размерности);

$AC = x$  см;  $BC = 7x$  см. Сфера  $(O, R)$ :

получим  $7x^2 = PC \cdot CQ$ ;  $CQ = 7x^2$  см

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$PC \perp AB$  м.к. касание.

$$BQ = \sqrt{BC^2 + QC^2} = \sqrt{4ax^2 + 4ax^4} =$$

$$= 2x\sqrt{1+x^2} \text{ теорема Пифагора}$$

$$\angle ABQ = \angle APQ = \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{BC}{BQ} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \frac{1+x^2}{x^4+2x^2+1} - 1 =$$

$$= \frac{2+2x^2-x^4-2x^2-1}{x^4+2x^2+1} = \frac{1-x^4}{x^4+2x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2(x^2+1)(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{x^2+1}$$

Ну и пишем две теоремы косинусов.

~~Для~~ Из  $\triangle ABQ$  и  $\triangle PAQ$   
выразим  $AQ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle ABQ$

$$AQ^2 = 64x^2 + (49x^2 + 49x^4) - 2 \cdot 7x \sqrt{1+x^2} \cdot 8x$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} = 113x^2 + 49x^4 = 112x^2 \quad \text{см}^2 =$$

$$= 49x^4 + x^2 \quad \text{см}^2$$

$\triangle AOQ$  ~~н~~:

$$AQ^2 = 50 \neq 50 \cdot \frac{1-x^2}{x^2+1} = 50 \left( 1 - \frac{1-x^2}{x^2+1} \right) =$$

$$= 50 \left( \frac{2x^2}{x^2+1} \right)$$

$$49x^4 + x^2 = \frac{100x^2}{x^2+1}$$

$$(49x^4 + x^2)(x^2+1) = 100x^2$$

$$50 \cancel{49}x^6 + 50x^4 + x^2 = 100x^2 \quad x^2 = -\frac{99}{49} \text{ неок}$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$x^4 + \frac{50}{49}x^2 - \frac{99}{49} = 0; \quad \left( x^2 - 1 \right) \left( x^2 + \frac{99}{49} \right) = 0$$

$$x^2 = 1; \quad x = 1. \quad AB = 8 \text{ см} \quad \text{Объем} = 18$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нч

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Повыжаем парные квадраты

~~$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$~~

~~$$\sqrt{2x^2 - 5x}$$~~

$$\sqrt{2x^2 - 5x + \frac{25}{8} - \frac{1}{8}} - \sqrt{2x^2 + 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{\left(x\sqrt{2} - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{8}} - \sqrt{2x^2 + 2x + \frac{1}{2}} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{\left(x\sqrt{2} - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{8}} = 2 - 7x + \sqrt{\left(x\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

1)  $x > \frac{5}{4}$ . Тогда  $x \geq 1,5$  и  
поэтому  $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$ ;

$$x \in (-\infty; 1] \cup [1,5; +\infty)$$

Слева это — то меньше, чем

~~$$x\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{2}}{4}$$~~

$$x\sqrt{2} - \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5



$O(0; 0)$

$P(15; 0)$

для любой точки  $A(x_1; y_1)$

ГМТ возможных точек  $B(x_2; y_2)$  —  
прямая вида

$$2x_2 + y_2 = (12 + 2x_1 + y_1) = \text{const}$$

так как у всех точек прямых  
одинаков для любой выбранной т. А.

~~Получим, что уравн - 2~~

Интересно что ровно 16 точек  
прямых пересекают параллелограмм  
исчерпан  $P_0$  и  $QR$  на прямых и лежат.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

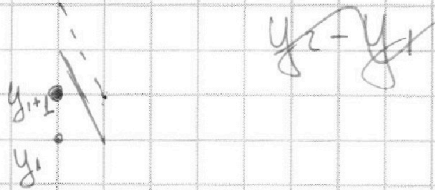
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим, как складывается  
матрица для  $m.A$  при выборе  $m.A$ .  
При увеличении  $x_1$  на единицу  
матрица складывается ~~выше~~ на 1  
~~ряд~~ ~~сумма~~  $2x_1 +$

справа на 1, т.е.  $y$ -координата  
 $m.A$  не меняется, и разность

$2x_2 - 2x_1$  тоже должна быть  
не меняется. Аналогично

при сдвиге ~~на~~  $y_1$  на 1 вверх  
матрица складывается на 1 вверх  
для сокращения разности  $y_2 - y_1$



Ну и ~~последнее~~ еще так скажыва-  
ется что  $y$  может  $A(x_1, y_1)$  лежа-  
щая на прямой вида  $2x_1 + y_1 - C = 0$   
где  $C = \text{const}$ , Т.е.  $m.A$  может  $B$  одинаковое.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Посмотрим, на сколько  
при этом размотаем  
ТМТ в обратном А и В для  
этого А

$$\begin{matrix} x_1, y_1 & & x_2 = x_1, y_2 \\ x_2 = y_2 = y_1 \end{matrix}$$

$$2x_2 - 2x_1 = 12$$

$$x_2 - x_1 = 6$$

Считаем кол-во  
матриц пар грани в паралле-  
лограмме. Их (пар) будет как 10

( $x_1$  варьируется от 0 до  $15-6=9$   
при выборе  $y_1 = y_2 = 0$ )  
пар грани

10 пар матриц, на каждой  $\overset{13}{\text{матрица}}$  точек.

$$\text{Итого точек } 12 \cdot 12 \cdot 10 = 1440 \quad \text{или} \quad 13 \cdot 13 \cdot 10 = 1690$$

Ответ: ~~1440~~ 1690

Я забыл еще  
матрицы, см.  
предыдущее решение.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

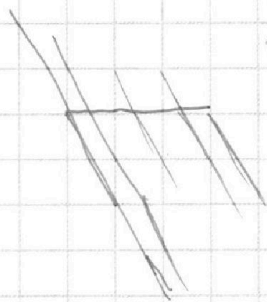
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Но это только те прямые, которые  
проходят через точки на границе.

есть другие прямые



вида  $2x + y + c - c = 0$ :

Такая прямая

у нас не 16, а 15.

Теперь прямая со сдвигом

6 6 не 10, а 9. Число точек

прямой  $12^2$  точек внутри паралле-  
граммы

$$12 \cdot 12 \cdot 9 = 1440 - 144 = 1296$$

$$1296 + 1690 = 2986$$

$$\begin{array}{r} 1690 \\ + 1296 \\ \hline 2986 \end{array}$$

Ответ: 2986

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



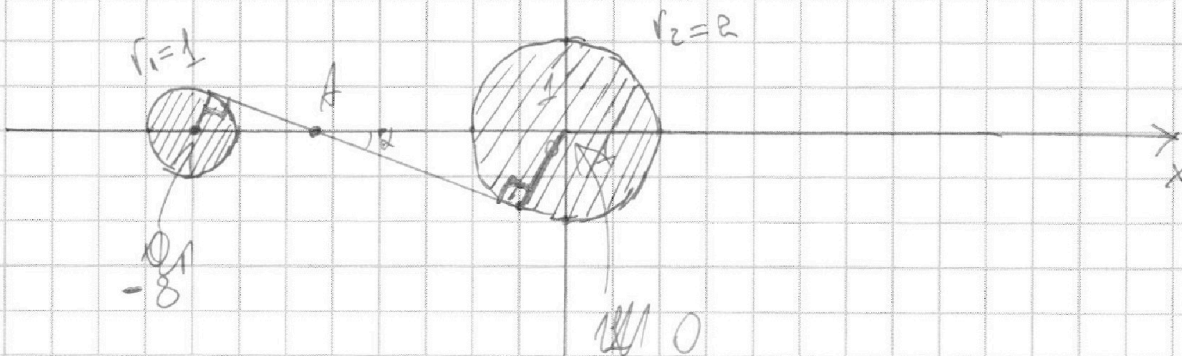
№6

Заметим, что то, что скetched  
это два пересечения круга.

Давайте изобразим  
(изобразим решение пер-во  
визу). Зашифрован.

точка касания  
Если  $\leq 0$ , то можно, чтобы  
тогда касательная внутри  
радиуса одного круга.

Графика круга-  
точка решения



Если решение равно 0, то прямая  
 $ax - y + 10b = 0$  должна касаться  
одного из кругов. Такая прямая  
существует: две внешние касательные

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.  
 Отметьте крестиком номер задачи,  
 решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
 страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и две внутренние.

Воздух внутреннюю нарисован на графике. Найдем  $\tan \alpha$  сначала изордиатуры м. А. пересечения в правдойной касательной с  $O_x$

А делаем отрезок  $[-8; 0]$

в о.к. - там  $\frac{1}{2}$  из подобия двух прямоугольных треугольничков. Отсюда  $A(-\frac{16}{3}; 0)$

$$\sin \alpha = \frac{9}{16} \cdot \frac{8}{3}$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha \quad \tan \alpha = \sqrt{\frac{9 \cdot 64}{64 \cdot 64 - 81}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{55}} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

Эти же  $\tan \alpha$  совпадают с  $\tan \alpha$

$$\alpha = \frac{3\sqrt{55}}{55} \quad \text{и} \quad \alpha = -\frac{3\sqrt{55}}{55} \quad \text{или} \quad \alpha \text{ с осью}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



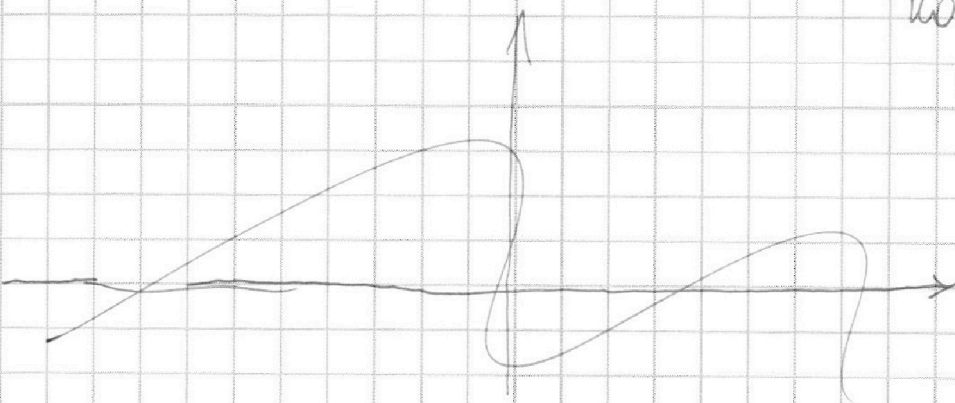
$\sqrt{3} \neq 1$  - это отнюдь не  
коэффициенты при  $y$  и  
при  $x$ .

~~$\frac{-1}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$~~   $a = \text{tg } \alpha$  заданной с  
обычн. кан.  
 ~~$a = \frac{-1}{\text{tg } \alpha} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$~~   $a = \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}$

$a = \frac{-3\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}$   $a = \frac{-\sqrt{3}}{3}$  тоже подходит

и соответствует второй  
внутренней касательной  
(она из семейства и проходит через  $A$ )  
Внешней касательной:

касатель-  
ные





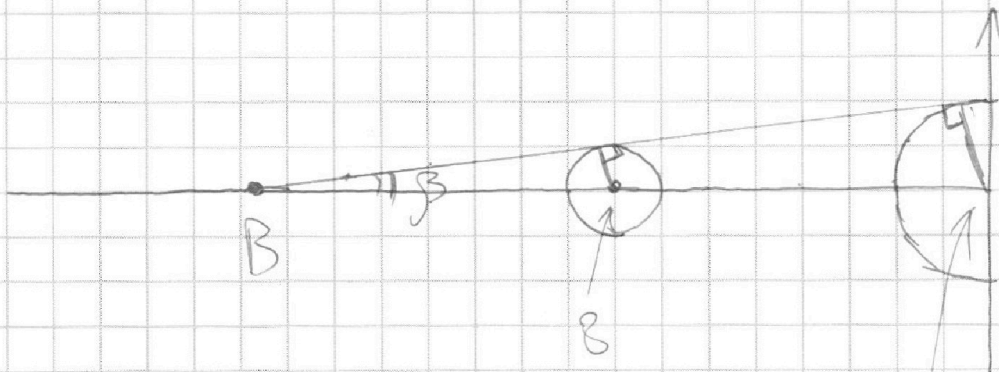
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Найдем м. В. Из условия

$$B(-16; 0). \quad \sin \beta = \frac{1}{8}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{1}{64} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{64}}} = \sqrt{\frac{1}{64} \cdot \frac{64}{63}} = \sqrt{\frac{1}{63}}$$

~~Нам не нужна.  $\operatorname{tg} \beta$  совпадает с углом  
одной из касательных к окружности.~~

~~$$a = -\operatorname{tg} \beta = -\sqrt{63}$$~~

~~$a = \sqrt{63}$  так как не подходит.~~

~~Ответ:  $\{\sqrt{63}; -\sqrt{63}\}$~~

$a = \operatorname{tg} \beta$  для одной из в.п.  
касательных к в.п.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a = \sqrt{\frac{\sqrt{63}}{63}} \\ a = -\frac{\sqrt{63}}{63} \end{cases}$$

для другой  $a = -\frac{\sqrt{63}}{63}$   
отв. от продолжения В  
из симметрии

Ответ:  $\left( \frac{\sqrt{63}}{63}, -\frac{\sqrt{63}}{63}, -\frac{3\sqrt{55}}{55}, \frac{3\sqrt{55}}{55} \right)$

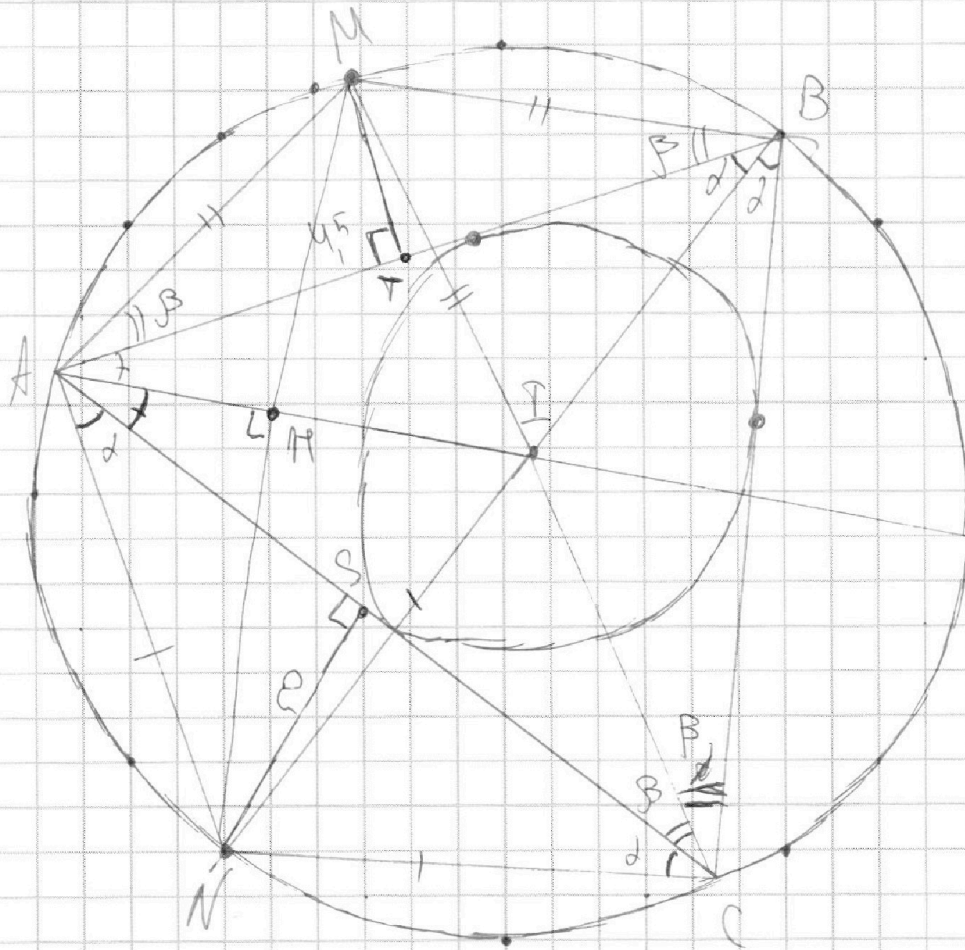
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Лемма о медиане. В треугольнике I -  
центр впис.  $NI = NA = NC$  ;  
 $MI = MA = MB$ .

2) обозначим углы как на  
рисунке. И можно  
показать  $C-I-M$  и  $B-I-N$  коллине-  
арны т.к. M - середина дуги

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



значит лемма Кэ Шиссера  
 $\angle C$ ;  $CI$  тоже Шиссера

м.к.  $I$  — центр вл. сф.  
Аналогично  $B-I-N$

Введём  $\angle ABI = \alpha$ ;  $\angle ACI = \beta$ ,  
через окружность проводим

углы.  $AI$  тоже Шиссера  $\angle BAC$   
 $\angle ABN = \angle NBC = \angle ACN = \angle NCI = \alpha$ ;  $\angle MAB = \angle MBA = \angle MCA = \angle MCB = \beta$

3) Построим  $MN$ ,  $MN \perp AI = H$ .  
 $MINM \neq$  — ромб,  $MH \perp AI$ .

Выразим стороны  $AM$ .

$$AM = \frac{4R}{\sin \beta} \cos \alpha; \quad AM = \frac{4R}{\sin \beta} \cos \alpha; \quad AM = \frac{4R}{\sin \beta} \cos \alpha$$

~~$AM = \frac{4R}{\sin \beta} \cos \alpha$~~

~~$(\cos \frac{\pi}{2} - \alpha)$~~

$$\begin{aligned} \angle MAN &= \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ м.к. } \angle BAC = \\ &= \pi - 2\alpha - 2\beta; \quad \angle M \angle BAI = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta; \\ \angle MAN &= \angle BAI + \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AH = \frac{4,5 \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} \quad \cos\left(\frac{\sqrt{17}}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

Аналогично  $AN = \frac{2}{\sin \alpha}$ ;

$$AH = \frac{2 \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\frac{2 \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{4,5 \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} = 2,25$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 1,5$$

Или суммируем

$$AH = \frac{4,5}{1,5} = 3 \quad \text{или} \quad 4,5 \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{4,5}{1,5} = 3$$

$$\triangle NAI - \text{р/б}; AI = 2AH = 6$$

Ответ: 6

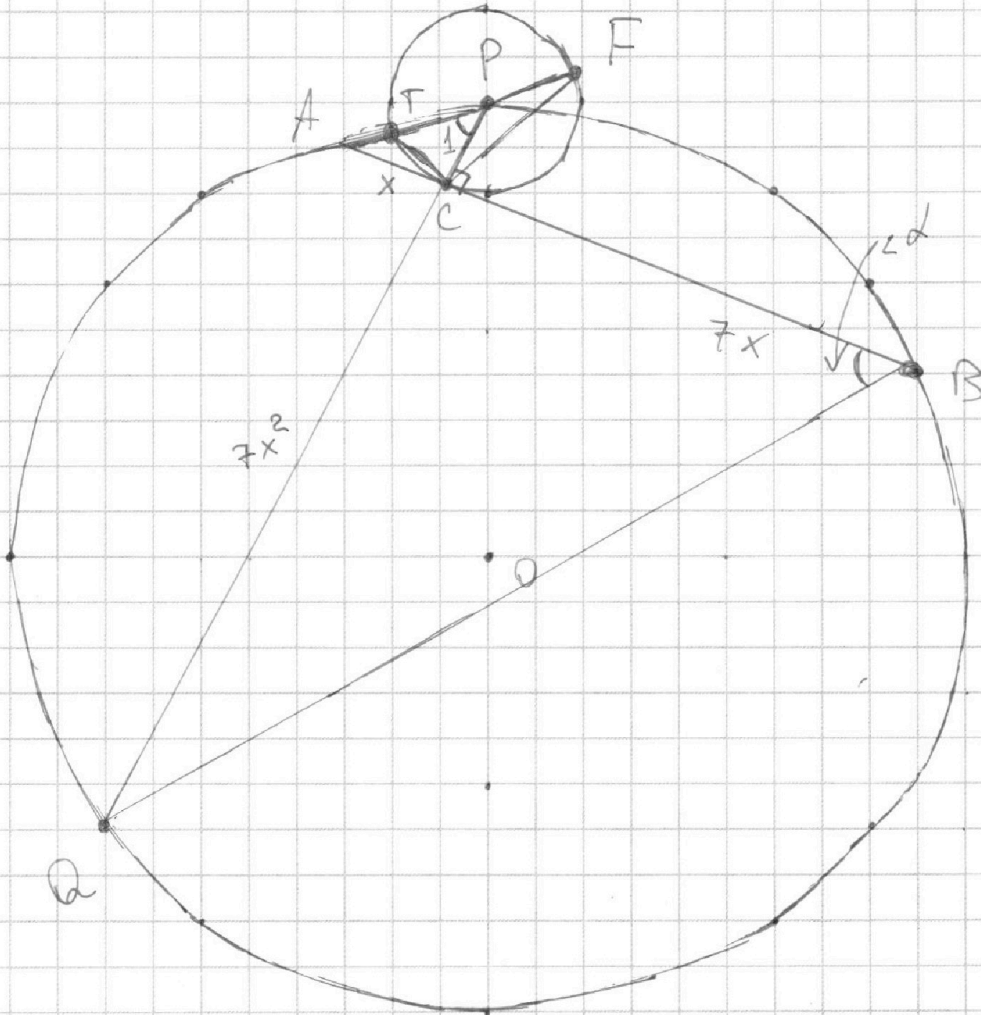
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Проведем дугу  $\omega$  с центром  $P$ ,  $O$  — центр  $\omega$ ,  $\Omega$  — центр  $\omega$ .

Проведем  $PC$  и продолжим до пересечения с  $\Omega$  в м.  $Q$ .

Смелее м.  $Q$  — центр  $\Omega$

$AC \cdot BC = PC \cdot CQ$ . Возьмем и скажем, что



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

~~вспомогательная функция~~

~~ОДЗ:  $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$~~

~~$x^2 - 2,5x + 1,5 \geq 0$~~

~~$x \in (-\infty; 1) \cup (1,5; +\infty)$~~

~~$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$~~

~~$x^2 + x + 0,5 \geq 0$   $D = 4 - 8 = -4$ ,~~

~~$2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$~~

~~$f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$~~

~~$g(x) = 2 - 7x$~~

~~$g(x)$  монотонно убывает на  
ин-ве вещ. чисел.~~

~~$\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$  убывает на промежутке  
 $(-\infty; 1)$  и возрастает на~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Возведем в квадрат, помем будем

$$2x^2 - 5x + 3 + (2x^2 + 2x + 1) -$$

будем

$$- 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 49x^2 - 182x + 4$$

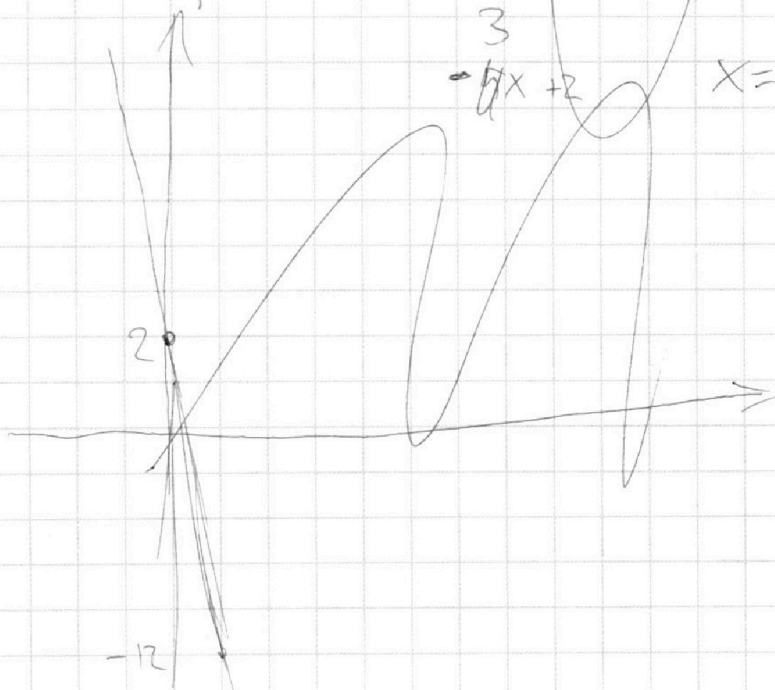
$$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} =$$

$$= 49x^2 - 28x + 4$$

$$49x^2 - 25x = -2\sqrt{4x^2}$$

$$3 - 5x + 2$$

$$x = -1$$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~справочно-мо больше, тем~~

