



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Т.к. $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$; $bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$; $ac: 2^{23} \cdot 7^{35}$; $a, b, c \in \mathbb{N}$,

то можно записать:

$$\begin{cases} ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{35} \end{cases} \quad \text{тогда:}$$

$$abc = \sqrt{k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot n \cdot 2^{23} \cdot 7^{35}} = \sqrt{2kmn} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39}$$

если $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$, то $abc: ab$, то $abc: 2^{15} \cdot 7^{11}$, аналогично

$abc: 2^{17} \cdot 7^{18}$ и $abc: 2^{23} \cdot 7^{35}$, т.е. $\sqrt{2kmn} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39} : 2^{17} \cdot 7^{18}$,

значит если $\sqrt{2kmn} \neq 7^5 \cdot x$, то $abc \neq 2^{27} \cdot 7^{39}$,

т.е. $\sqrt{2kmn} = 7^5 \cdot x$, но т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $abc \in \mathbb{N}$, т.е.

$\sqrt{2kmn} \in \mathbb{N}$, т.е. $\begin{cases} k: 2 \\ m: 2 \\ n: 2 \end{cases}$, значит $\sqrt{2kmn} = 7^5 \cdot 2 \cdot y$, где

$y \in \mathbb{N}$, тогда

Умно $abc = 2^{27} \cdot 7^{39} \cdot 7^5 \cdot 2 \cdot y = 2^{28} \cdot 7^{39} \cdot y \leq 2^{28} \cdot 7^{39}$, т.е.

$abc =$ ~~мысли~~ наименьшее значение abc равно $2^{28} \cdot 7^{39}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2.

$\frac{a}{b}$ - не сократится по условию.

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-2ab-7ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

1) если $a+b:m$, то $(a+b)^2:m$, значит тогда

дробь можно было сократить как на m так и на m^2

$(a+b)^2-9ab:m$, т.к. $(a+b)^2:m$, то $9ab$ должно делиться на m .

2) если $a:m$, то тогда $\frac{a+b}{m}$, т.е. $b:m$ если b

делится одно из чисел, значит делится и второе - то есть b делится на m , то и другое число должно делиться на m

это число, b делится на m значит $b:m$

тогда $\frac{a}{b} = \frac{m}{m}$, т.е. $\frac{a}{b}$ - сократится, т.е. $a:m$.

Аналогично $b:m$

3) если $9:m$, то т.к. $9ab:m$, значит $ab:m$,

попробуем $\begin{cases} a+b:n \\ ab:m \end{cases}$, т.е. можно записать: $\begin{cases} a+b=kn \\ a \cdot b = km \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{m \cdot k}{b} \\ \frac{m \cdot k}{b} + b = m \cdot n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{m \cdot k}{b} \\ nk + b^2 = \frac{m \cdot n \cdot b}{n} \end{cases}, \text{возведем } b^2:m,$$

т.е. $b:\sqrt{m}$, а значит \sqrt{m} значит $9:m \Rightarrow m_{\max} = 9$

Ответ: 9

$$\frac{a+b}{\sqrt{m} \cdot \sqrt{m}}, \text{ то } a:\sqrt{m}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

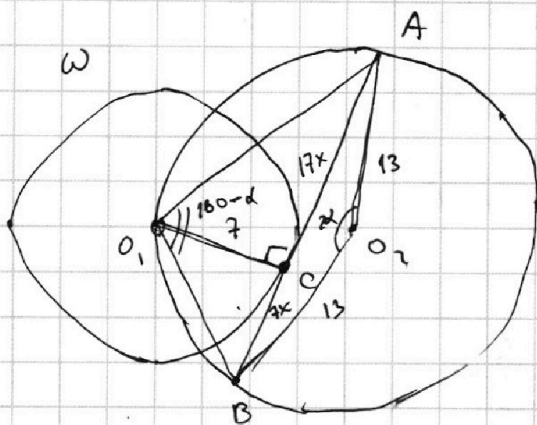
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №3



Дано:

- ω, Ω - окружности
- O_1 - центр ω
- O_2 - центр Ω
- $O_1 \in \Omega$
- AB - хорда Ω
- $AB \perp O_1O_2$ в C
- $AC:CB = 17:7$
- $R_1 = 7$
- $R_2 = 13$

Найти: α

Решение:

1. Так как AB - хорда окружности ω , то $O_1C \perp AB$ как радиус, проведенный к хорде перпендикулярно.
 2. Пусть $\angle AO_2B = 2\alpha$, тогда $\angle BO_2A = 2\alpha$, $\angle AOB = 360^\circ - 2\alpha$, значит $\angle AO_1B = 180^\circ - \alpha$ или $180^\circ - 2\alpha$ или $180^\circ - \alpha$ или $180^\circ - \alpha$.
 3. Пусть x - косинус угла α , тогда $AC = 17x$, $CB = 7x$.
 4. По т. Пифагора из $\triangle O_1CA$ ($\angle C = 90^\circ$): $O_1A^2 = O_1C^2 + CA^2$
 - По т. Пифагора из $\triangle O_2CB$ ($\angle C = 90^\circ$): $O_2B^2 = O_2C^2 + CB^2$
 5. $S_{\triangle O_1AB} = \frac{1}{2} O_1C \cdot AB = \frac{1}{2} O_1A \cdot O_2B \cdot \sin \angle O_1AO_2B$
- значит $O_1C \cdot AB = O_1A \cdot O_2B \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{O_1C \cdot AB}{O_1A \cdot O_2B}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6. По т. косинусов $\triangle O_1O_2D$:

$$AO^2 = AO_1^2 + DO_2^2 - 2 \cdot AO_1 \cdot DO_2 \cdot \cos 2\alpha$$

$$AO^2 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot (1 - 2 \sin^2 \alpha)$$

$$AO^2 = 2 \cdot 13^2 (1 - 1 + 2 \sin^2 \alpha)$$

$$AO^2 = 2 \cdot 13^2 \sin^2 \alpha$$

$$AO^2 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot \frac{O_1D^2 \cdot AD^2}{O_1B^2 \cdot OA^2}$$

$$1 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot \frac{7^2}{(7^2 + 17x)^2 (7^2 + 17x^2)}$$

$$(17x^2 + 7^2)(17x^2 + 7^2) = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 7^2$$

$$17^2 x^4 + 17^2 x^2 \cdot 7^2 + 7^2 \cdot 7^2 x^2 + 7^2 \cdot 7^2 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 7^2$$

$$289x^4 + (17^2 + 7^2)x^2 = 2^2 \cdot 13^2 - 7^2$$

$$289x^4 + 328x^2 - 627 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{627}{289} \end{cases} \emptyset$$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$, т.к. x - коэффициент при AO_1 .

$$7) AB = 17x + 7x = 24x = 24 \cdot 1 = 24$$

Ответ: 24.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 9, \text{ тогда } 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 - 9x + 1 =$$

$$= 1 - 9x$$

$$1 - 9x = b$$

Умножим на b : $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} = b$.

$\sqrt{a+b} = \sqrt{a+b}$, возведем в квадрат с помощью формулы

$$a+b = a + 2\sqrt{ab} + b^2$$

$$b = 2\sqrt{ab} + b^2$$

$$\begin{cases} b=0 \\ 1 = 2\sqrt{a+b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ \sqrt{a} = \sqrt{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 - 2\sqrt{a} \\ \sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1} = \sqrt{9 + 2\sqrt{a} + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 - 2\sqrt{a} \\ \sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1} = 1 - \sqrt{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 - 2\sqrt{a} \\ |\sqrt{a} - 1| = 1 - \sqrt{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a \geq 0 \\ b = 1 - 2\sqrt{a} \\ \sqrt{a} \leq 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a \geq 0 \\ b = 1 - 2\sqrt{a} \\ 0 \leq a \leq 1 \\ b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пробуем.

$$\begin{cases} b=0; & a \neq 0 \\ a \geq 0 \end{cases} \quad \sqrt{a} - \sqrt{a} = 0 \quad - \text{верно.}$$

$$\begin{cases} b = 1 - 2\sqrt{a} \\ 0 \leq a \leq 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} \sqrt{a - 2\sqrt{a} + 1} &= 1 - \sqrt{a} \\ \sqrt{(\sqrt{a} - 1)^2} &= 1 - \sqrt{a} \\ |\sqrt{a} - 1| &= 1 - \sqrt{a} \\ 1 - \sqrt{a} &= 1 - \sqrt{a} \quad - \text{верно} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} b=1 \\ a=-1 \end{cases}; \quad \sqrt{2} - \sqrt{1} = 1 \quad - \text{не верно.}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 1 - 9x \geq 0 \\ a \neq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - 9x = 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ 0 \leq 3x^2 + 3x + 1 \leq 1 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad - \text{верно} \\ \begin{cases} 9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad (*) \\ 0 \leq 3x^2 + 3x + 1 \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$(*) \quad \begin{cases} 9x \geq 0 \\ 81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 69x^2 = 12x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 69x^2 - 12x + 4 = 0, \quad D < 0 \quad \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 0 \leq 3x^2 + 3x + 1 \leq 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

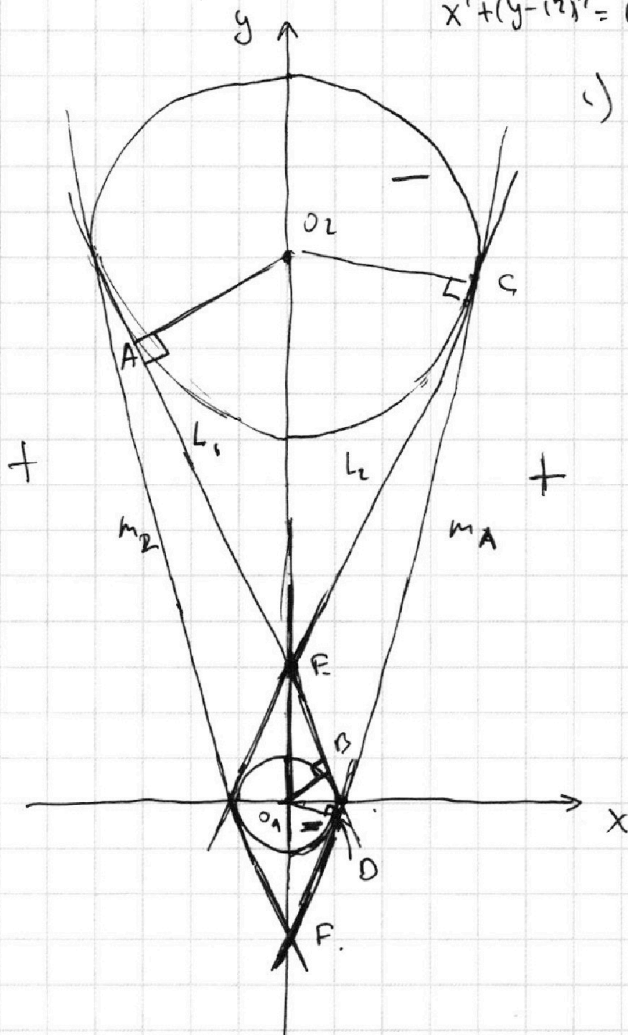


Задача №6.

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \quad (*) \end{cases}$$

Изобразим ~~$ax+y-8b=0$~~ $x^2+y^2=1$.

(*) Траектория: $x^2+y^2=1$ — окружность $O_1(0;0); R_1=1$
 $x^2+(y-12)^2=16$ — окружность $O_2(0;12); R_2=4$



1) Прямая ~~верно~~ только

или точки ~~на границе~~ ~~или на границе~~

~~или~~ внутри \vee большей или

меньшей окружности, тогда

система будет иметь

ровно 2 решения ~~только~~ \vee тогда, когда

прямая $ax+y-8b=0$ будет

касательной обеих окружностей.

2) Пусть общие касательные к \vee двум окружностям

пересекет линию $ax+y-8b=0$ между осями Ox и Oy

в точке E. ($E \in O_1O_2$)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) Тогда ось l касат. окруж. из центра O_2 касательной

горизонталь L_1 : $L_1 \cap \text{Окр}(O_2, R_2) = A$, тогда
 $L_1 \cap \text{Окр}(O_1, R_1) = B$

$O_2A \perp L_1$ и $O_1B \perp L_1$ или радиусы, проведенные к
точке касания

4) $\triangle O_2AE \sim \triangle O_1BE$ по двум углам, т.к.

$\angle A = \angle B = 90^\circ$ и $\angle AEO_2 = \angle BO_1E$ как вертикальные,

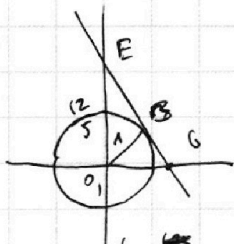
тогда $\frac{O_1E}{O_1B} = \frac{O_2E}{O_2A} \Rightarrow \frac{4}{1} \Rightarrow O_2E = 4O_1E$ и

$O_2E + O_1E = 12$, т.к. $O_2E = 4O_1E = 12 \Rightarrow O_1E = \frac{12}{5}$,

т.к. $E(0; \frac{12}{5})$

5) $E \in l$, т.к. $a \cdot 0 + \frac{12}{5} - 8b = 0 \Rightarrow b = \frac{12}{5 \cdot 8} = \frac{3}{5} = 0,6$.

6) Пусть $L_1 \cap O_x = G$, тогда.



По т. Пифагора $EG^2 = O_1G^2 + O_1E^2$

$\triangle O_1EG \sim \triangle O_1AE \Rightarrow \frac{O_1G}{O_1E} = \frac{O_1E}{O_1A} \Rightarrow EG = O_1E \cdot \frac{O_1A}{O_1E} = O_1A = 0,6$

$O_1E^2 + O_1G^2 = O_1A^2 \Rightarrow \frac{12^2}{5^2} + O_1G^2 = \frac{12^2}{5^2} + 0,6^2 \Rightarrow O_1G^2 = 0,6^2$

т.к. $(O_1G + O_1A)^2 = O_1G^2 + O_1A^2 + 2 \cdot O_1G \cdot O_1A \Rightarrow O_1G = \frac{1}{2} O_1A = 0,3$
 $\Rightarrow \frac{1}{5^2} O_1G^2 = \frac{12^2}{5^2} \Rightarrow O_1G = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}$
 $\Rightarrow \frac{1}{2 \cdot 0,3} = \frac{1}{0,6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

2) $G \in l$, значит $a \cdot \frac{12}{\sqrt{43}} + 0 - 8 \cdot \frac{3}{10} = 0 \Rightarrow a = \frac{12 \cdot 12}{5 \cdot \sqrt{43}} = \frac{144}{5\sqrt{43}}$

8) Эти касательные вторую касат L_2 как
по двум т.к. L_1 и L_2 - симметр. озн. Оу

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

а) значение a в этом случае будет равно $\frac{\sqrt{143}}{5}$

г) Расм. касательна m_1 и m_2 , которые пересекаются в центре O_1 окружности, т.е. $m_1, m_2 \perp F$; $F \notin O_1 O_2$

тогда m_1

10) Аналогично с касат. b_1 и b_2 расм. Тогда касательная m_1 :

угол $m_1 \cap O_1 O_2 = \alpha$, $m_1 \cap O_1 O_2 = \beta$.

н) $\triangle F O_1 C \sim \triangle F O_1 D$ по двум углам, т.к.

$\angle C = \angle D = 90^\circ$ т.к. радиусы, проведенные к ~~касат.~~ касательной

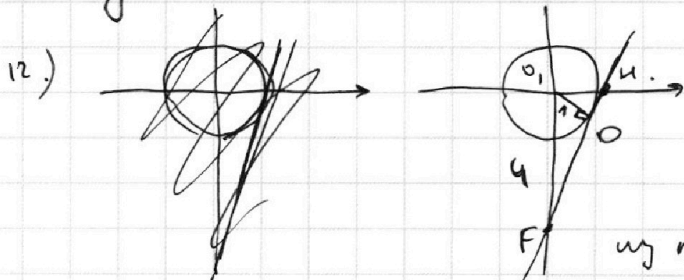
касательные перпендикулярны касательной по т.

$\angle F$ - общий, тогда: $\frac{O_2 F}{O_1 F} = \frac{O_2 C}{O_1 D} = \frac{4}{1} \Rightarrow O_2 F = 4 O_1 F$

Также $O_2 F - O_1 F = 12$, значит $4 O_1 F - O_1 F = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1 F = 4$, т.е. $F(0; 4)$; $F \in m_1$, значит

$$0 \cdot x + 4 - 8b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$



угол $m_2 \cap O_1 O_2 = \alpha$,

тогда по т. Пифагора

$$FH^2 = OF^2 + O_1 H^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{So } FO_{1K} = \frac{1}{2} O_1 \hat{D} \cdot F_{1K} = \frac{1}{2} O_1 F \cdot O_{1K}, \text{ т.е. } F_{1K} = O_1 F \cdot O_{1K}$$

Получаем: $O_1 F^2 \cdot O_{1K}^2 = O_1 F^2 + O_{1K}^2$

$$4^2 \cdot O_{1K}^2 = 4^2 + O_{1K}^2 \Rightarrow (4^2 - 1) O_{1K}^2 = 4^2 \Rightarrow O_{1K} = \sqrt{\frac{4^2}{4^2 - 1}} = \frac{4}{\sqrt{15}}, \text{ т.е.}$$

$K(0; \frac{4}{\sqrt{15}})$

13) $K \in m_1$, значит: $a \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} + 0 - b \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \Rightarrow a = \sqrt{15}$.

14) Рассматриваем каска псевдоуглов m_2 или осевыми
сплюснутыми L_1 и L_2 , то $a = -\sqrt{15}$

Ответ: $a = \pm \frac{\sqrt{143}}{5}$; $a = \pm \sqrt{15}$



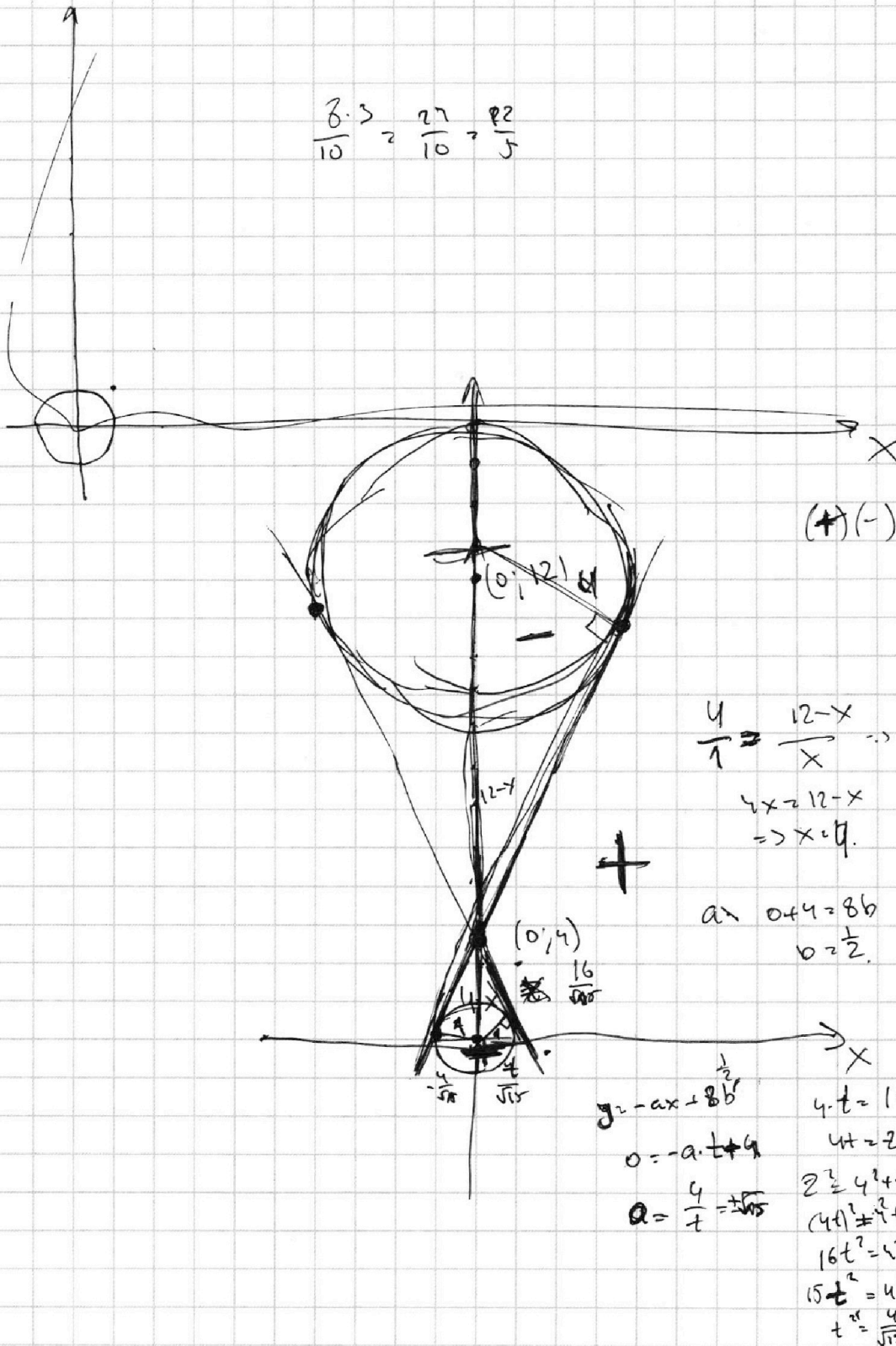
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$(1-9x) = b$$

$$3x^2 - 6x + 2 = t - 3x + 1 = t + (1-9x)$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$a+b = a + 2\sqrt{ab} + b^2$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \quad b = 2\sqrt{ab} + b^2$$

(0; 0)

(16; 0)

(0; 0)

(16; 0)

P (-13; 26)

Q (3; 26)

$$\Rightarrow b = -2\sqrt{a}$$

$$\sqrt{a-2\sqrt{a}} = \sqrt{a} - 2\sqrt{a}$$

$$\sqrt{a-2\sqrt{a}} = -\sqrt{a}$$

$$a-2\sqrt{a} = a = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

$$b^2 + 2\sqrt{ab} - b = 0$$

$$b + 2\sqrt{a} - 1 = 0$$

$$16 + 13 = 29$$

$$20^2 + 29^2 \geq 14^2$$

$$x_2 > x_1$$

$$2|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = 14$$

$$-1 \leq x_2 - x_1 \leq 16$$

$$2 \leq y_2 - y_1 \leq 26$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 1 \\ y_2 - y_1 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 3 \\ y_2 - y_1 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 2 \\ y_2 - y_1 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 4 \\ y_2 - y_1 = 6 \end{cases}$$

$$a - 2\sqrt{a} + 1 = (\sqrt{a} - 1)^2$$

$$\frac{81}{162}$$

$$\begin{array}{r} -10 \\ 162 \\ \hline 54 \\ + 108 \\ \hline 111 \end{array}$$

$$\sqrt{a-1} = 1 - \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a-1} = 1 - \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a-1} = \sqrt{a-1} = 1 - \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a} = 1$$

$$\sqrt{a} \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{30}{81} - \frac{6}{9} + 2} - \sqrt{\frac{3}{81} + \frac{3}{9} + 1} = 0$$

$$\frac{3}{81} - \frac{54}{81} + \frac{162}{81}$$

$$181 + 29 + 3 = 93$$

$$\frac{81}{108}$$

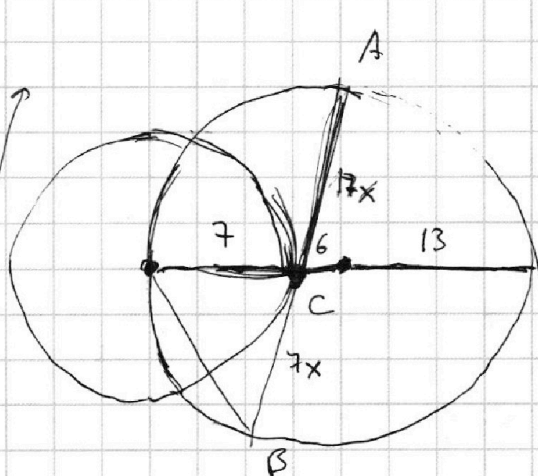
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется! Порча QR-кода недопустима!



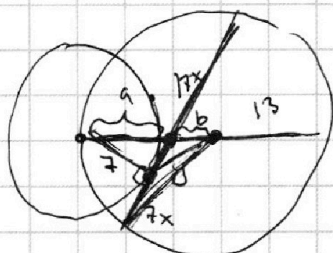
$$D: \begin{cases} 17x^2 + 4 \cdot 2 \cdot 49 \cdot 169 \cdot 169 \\ 17x \cdot 7x = x \cdot 19 \\ 17x^2 = 19 \\ x = \sqrt{\frac{19}{17}} \\ 24x = 24 \sqrt{\frac{19}{17}} \end{cases}$$

$$(289t + 49)(49t + 49) = 2 \cdot 49 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 65$$

$$17^2 t + 7^2 t + 17t + 7t + 7t + 7t + 2^2 \cdot 2^2 \cdot 19^2 = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 19^2$$

$$(17^2 + 7^2)t + (17+7)t + 2^2 \cdot 2^2 \cdot 19^2 = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 19^2$$

$$392t^2 + 168t + 64 \cdot 2 \cdot 49 \cdot 169 = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 19^2$$

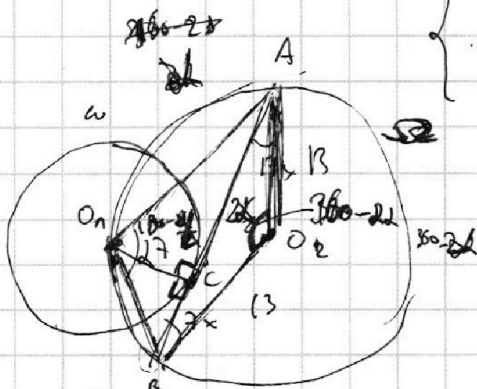


$$(7x+y)(17x-y)$$

$$(7x+y)17x = a(13+b)$$

$$a = \sqrt{7^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} 17 \cdot 7x^2 + 10xy - y^2 = a(13+b) \\ a+b=13 \\ a^2 = 7^2 + y^2 \end{cases}$$



$$17x + 7x = 24x$$

$$(17x)^2 + 7^2 = AO_1^2$$

$$(7x)^2 + 7^2 = AO_2^2$$

$$AO_1^2 + AO_2^2 - 2 \cdot AO_1 \cdot AO_2 \cdot \cos(180-x)$$

$$AB^2$$

$$1 = \frac{2 \cdot 7^2 \cdot x^2 - 13^2}{((17x)^2 + 7^2)(7x^2 + 7^2)}$$

$$AB^2 = \sqrt{13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos 2\alpha}$$

$$\cos(180-x) = -\sin x \quad 180-x = \alpha + \beta$$

$$24x \cdot 7 = \sqrt{17x^2 + 7^2} \cdot \sqrt{7x^2 + 7^2} \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{24x \cdot 7}{\sqrt{(17x^2 + 7^2)(7x^2 + 7^2)}}$$

$$(24x)^2 = \left(2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos 2\alpha + 2 \cdot \frac{2 \cdot 7^2 \cdot x^2 - 13^2}{((17x)^2 + 7^2)(7x^2 + 7^2)} \right)$$

$$(24x)^2 = 2 \cdot (24x) \cdot 7 \cdot 2 \cdot 13^2$$

$$\frac{(17x^2 + 7^2)(7x^2 + 7^2)}{(17x^2 + 7^2)(7x^2 + 7^2)} = 2 \cdot 7^2$$

$$7 = x^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \quad ; a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$2^{27} \cdot 7^{34}$$

$$abc = \sqrt{k \cdot m \cdot n \cdot 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+18+39}} = \sqrt{k \cdot m \cdot n \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}} = 2^{27} \cdot 7^{34} \sqrt{kmn}$$

$$c = \frac{m \cdot n \cdot 2^{17+18+23} \cdot 7^{27+39}}{n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}} = \frac{m \cdot n \cdot 2^{46} \cdot 7^{66}}{n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}} = \frac{m \cdot n \cdot 2^{23} \cdot 7^{27}}{n} = 2^{23} \cdot 7^{27} \cdot \frac{m}{n}$$

$$abc : ac = b \Rightarrow abc : n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} = b \Rightarrow 2^{27} \cdot 7^{34} \sqrt{kmn} : n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} = b$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39} \cdot X = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$c = \frac{2^{28} \cdot 7^{39}}{2^{23} \cdot 7^{27}} = 2^5 \cdot 7^{12}$$

$$b = \frac{2^{28} \cdot 7^{39}}{2^{23} \cdot 7^{27} \cdot 2^5 \cdot 7^{12}} = \frac{2^{28-23-5} \cdot 7^{39-27-12}}{k \cdot m} = \frac{2^0 \cdot 7^0}{k \cdot m} = \frac{1}{k \cdot m}$$

$$a = \frac{2^{28} \cdot 7^{39}}{2^{23} \cdot 7^{27} \cdot \frac{1}{k \cdot m}} = 2^5 \cdot 7^{12} \cdot k \cdot m$$

$\frac{a}{b}$ - др. - сократимся.

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{\frac{a^2-7ab+b^2}{m}}$$

$a=2^5 \cdot 7^{12} \cdot k \cdot m$; $b=1/(k \cdot m)$; $a=2^5 \cdot 7^{12}$; $b=1$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{4}{u^2-9v}$$

$a+b=4$; $ab=v$

$$8-2=4.$$

$$\frac{2+u}{2-u \cdot 7 \cdot n + m} = \frac{u}{2-2+u} = \frac{u}{2+u} = \frac{u}{u}$$

$$5-3=2.$$

$$\frac{u+u}{n-n \cdot n \cdot n + n} = \frac{2}{n-n+n} = \frac{2}{1}$$

$$7ab : a+b$$

$$\frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b} =$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1 = \frac{2^2 - 7^2 - 13^2}{(10x^2 + 7x^2 + 7^2)(17x^2 + 2^2)}$$

$$x = 1$$

$$(209 + 49)(7^2 + 2^2) = 338 \cdot 98 = 2$$

$$\begin{array}{r} + 48 \\ + 48 \\ \hline 98 \\ \times 2 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$(209x^2 + 49)(7^2x^2 + 2^2) = 17^2 \cdot 7^2 \cdot x^4 - x^2 + 17^2 \cdot 7^2 \cdot x^2 + 7^2 \cdot 2^2 \cdot x^2 + 2^2 \cdot 7^2 = 17^2 \cdot 7^2 \cdot x^4 + (17^2 + 7^2) \cdot 7^2 \cdot x^2 + 2 \cdot 7^2 = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2$$

$$289(x^2)^2 + 338x^2 + 2 = 2 \cdot 13^2$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2 - 2ab} =$$

$$a+b \equiv m$$

$$(a+b)^2 \geq 2ab$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$$

$$\frac{a+b}{(a+b+3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab})} = \frac{a+b}{a+b}$$

$$\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + 2\sqrt{a} \cdot b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

a - num
b - num.
a - num.
b - num.

$$\frac{2}{2^2 - n} = \frac{2}{2-n} = \frac{2}{n} = k$$

g

g

g

same $a+b \equiv m$, to $(a+b)^2 \equiv x$
 $\rightarrow a \equiv x$ and $b \equiv x$ where b given. $\equiv x$, i.e. $\frac{a}{b}$ - const.

$$(a+b)^2 \equiv m$$

$$-2ab \equiv m \quad \text{where}$$

same $g \equiv m$, to $a \cdot b \equiv m$, i.e. $a \cdot b \equiv m$
 $a \cdot b \equiv m$

$$a \cdot b \equiv m \cdot k$$

$$a \cdot b \equiv m \cdot n$$

$$a = \frac{m \cdot k}{b}$$

$$\frac{m \cdot k}{b} + b \equiv m \cdot n$$

$$m \cdot k + b^2 = b \cdot m \cdot n$$

$$b^2 \equiv m$$

$$a \cdot b \equiv m$$

$$b \equiv \sqrt{m}$$

$$a + \sqrt{m} \cdot x = m \cdot y$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

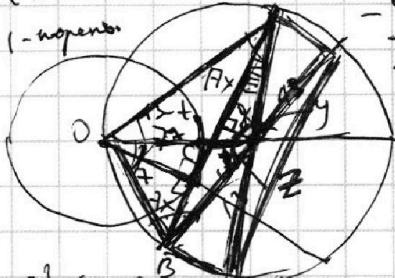


$$7t^2 + (17+7^2)t = 2^2 - 13^2 - 7^2$$

$$285t^2 + 378t - 627 = 0$$

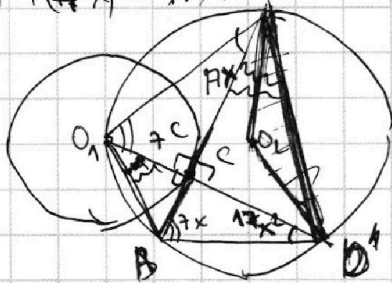
$$\frac{285}{7} + \frac{378}{7}$$

$t = 1$ - корень



$$AO^2 = 7^2 + (17x)^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos \gamma$$

$$AO^2 = 7^2 + (17x)^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos \gamma$$



$$(17x)^2 - (7x)^2 = \cos \gamma - \cos \gamma = 0$$

$$-2 \cos \gamma \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$\cos \gamma + (-\cos \gamma) = 0$$

$$17x \cdot A \times z = A \cdot a$$

$$a = 17x$$

$$\frac{7x}{7} = x$$

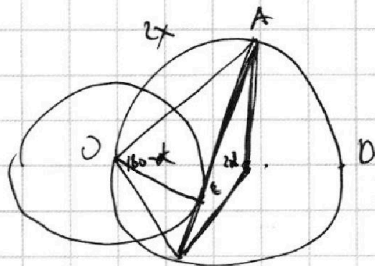
$$\frac{17x}{17} = x$$

$$\frac{17}{17} = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 9x + 1} = 4 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 9x = \sqrt{3x^2 + 9x + 1} + 4$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 18x\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 81x^2 = 3x^2 + 9x + 1 + 4\sqrt{3x^2 + 9x + 1} + 16$$



$$AB^2 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos 2\alpha$$

Ans

$$AB \cdot OC = AO \cdot OB \cdot \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \frac{AB \cdot OC}{AO \cdot OB} \Rightarrow$$

=>

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \frac{AB^2 \cdot OC^2}{AO^2 \cdot OB^2}$$

$$AO^2 = 2 \cdot 13^2 \left(1 - 1 + 2 \frac{AB^2 \cdot OC^2}{AO^2 \cdot OB^2} \right) = 1 = \frac{2^2 - 13^2 \cdot 7^2}{((17x)^2 + 7^2) (17x^2 + 7^2)}$$

$$17^2 x^4 + (17^2 + 7^2) x^2 + 7^2 = 2^2 - 13^2 \cdot 7^2$$