МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

$\beta \geqslant 10$, $\gamma \geqslant 7$

$2^{\alpha_1} 7^{\alpha_2}$ $2^{\beta_1} 7^{\beta_2}$ $2^{\gamma_1} 7^{\gamma_2}$

наим. возм.

$\beta - 10$, $\gamma -$

$\alpha_1 + \beta_1 \geqslant 15$
$\beta_1 + \gamma_1 \geqslant 17$
$\gamma_1 + \alpha_1 \geqslant 23$
$\beta_1 \geqslant 15 - \alpha_1$
$15 - \alpha_1 + \gamma_1 \geqslant 17$
$\gamma_1 \geqslant 2 + \alpha_1$
$2 + 2\alpha_1 \geqslant 23$
$2\alpha_1 \geqslant 9$
$\alpha_1 \geqslant 5$

√ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

√ 2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$(a+b, a^2-7ab+b^2) =$
$=$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

√ 4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x.$$

$1 - 9x = (1-9x)$

$3x$

$(1-3\sqrt{x})(1+3\sqrt{x})$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

$2x = y$ $(2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) = 14$

$\frac{y_2 - x_2}{x_1} = kx_2 + 6$ $y_2 = kx_2 + 6$ $y_1 = kx_1 + 6$ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$

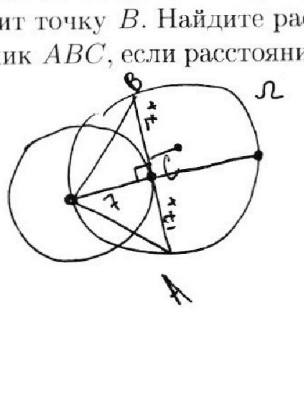
$S = 1$ $\Gamma = 4$ $B = 0$ $\frac{\Gamma}{2} + B - 1$ $\Gamma = 3$ $B = 0$ $\frac{\Gamma}{2} + B - 1$ $\Gamma = 6$ $B = 0$ $\frac{\Gamma}{2} + B - 1$

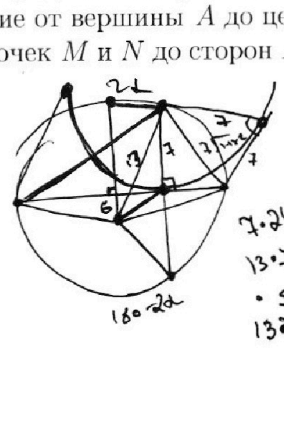
√ 6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.





$7 \cdot 24x$
$13 \cdot 7 \cdot \sqrt{1+x^2}$
$\cdot \sin(90-\alpha)$
$132.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1.

$ab \vdots 2^{15}7^{11} \Rightarrow ab \geq 2^{15}7^{11}$, аналогично $ac \geq 2^{23}7^{39}$, $bc \geq 2^{17}7^{18}$

~~Идея~~ Заметим, abc – наименьшее $\Leftrightarrow$ $a = 2^{\alpha_1}7^{\alpha_2}$, $\beta = 2^{\beta_1}7^{\beta_2}$, $c = 2^{\gamma_1}7^{\gamma_2}$, т.е. каждое из чисел a, b и c не делится ~~только~~ на простые p, отличные от 2 и 7 (если делится, то это не влияет на делимость их попарных произведений на 2^x7^y из условия, но увеличивает произведение, т.е. делает не наименьшим из возможных).

Тогда $ab = 2^{\alpha_1+\beta_1}7^{\alpha_2+\beta_2} \geq 2^{15}7^{11}$, $ac = 2^{\alpha_1+\gamma_1}7^{\alpha_2+\gamma_2} \geq 2^{23}7^{39}$, $bc = 2^{\beta_1+\gamma_1}7^{\beta_2+\gamma_2} \geq 2^{17}7^{18}$

Тогда
$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \geq 15 \\ \alpha_2+\beta_2 \geq 11 \\ \beta_1+\gamma_1 \geq 17 \\ \beta_2+\gamma_2 \geq 18 \\ \alpha_1+\gamma_1 \geq 23 \\ \alpha_2+\gamma_2 \geq 39 \end{cases}$$

~~① $\alpha_1+\beta_1 \geq 15 \Rightarrow \beta_1 \geq 15-\alpha_1 \Rightarrow (15-\alpha_1)+\gamma_1 \geq \beta_1+\gamma_1 \geq 17 \Rightarrow 15-\alpha_1+\gamma_1 \geq 17 \Rightarrow \gamma_1 \geq 2+\alpha_1 \Rightarrow (2+\alpha_1$~~

① $(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_1+\gamma_1)+(\beta_1+\gamma_1) \geq 15+17+23$

$2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) \geq 55$

но $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – целые неотрицательные, т.к. a, b и c – натуральные $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$ – целое неотрицательное

$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \geq \frac{55}{2}$, $(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \geq 28 \Rightarrow$

$\Rightarrow \min(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) = 28$

② $(\alpha_2+\beta_2)+(\alpha_2+\gamma_2)+(\beta_2+\gamma_2) \geq$
$\geq 11+39+18 = 68$

$(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2) \geq 34$,

но $\begin{cases} \beta \geq 0, \\ \alpha_2+\gamma_2 \geq 39, \end{cases}$ $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geq \alpha_2+\gamma_2 \geq 39 \Rightarrow$

$\Rightarrow \min(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2) = 39$

$$abc = (2^{\alpha_1}7^{\alpha_2}) \cdot (2^{\beta_1}7^{\beta_2}) \cdot (2^{\gamma_1}7^{\gamma_2}) = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} \geq$$
$$\geq 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow \min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Докажем, что такой случай возможен:

$$\begin{matrix} a = 2^{11} \cdot 7^{19} \\ b = 2^{4} \cdot 7^{0} \\ c = 2^{13} \cdot 7^{20} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ab = 2^{15}7^{19} \vdots (2^{15}7^{11}) \\ bc = 2^{17} \cdot 7^{20} \vdots (2^{17} \cdot 7^{18}) \\ ac = 2^{24} \cdot 7^{39} \vdots (2^{23} \cdot 7^{39}) \end{cases}, \text{ ч.т.д.}$$

Ответ: $\min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.

Т.к. дробь $\frac{a}{b}$ несократима и $a, b \in \mathbb{N}$, то $НОД(a,b)=1$ (иначе, если $НОД(a,b)=d$, $a \vdots d$ и $b \vdots d \Rightarrow \frac{a}{b}$ можно сократить на d).

Тогда $a+b \vdots m$, $a^2-7ab+b^2 \vdots m$.

$a+b \vdots m$, $НОД(a,b)=1$. Предположим, $НОД(a,m)=d$ $(d \in \mathbb{N})$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow a=kd$, $m=nd$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. $a+b \vdots m \Rightarrow$
$\Rightarrow a+b=rm=rnd$, $r \in \mathbb{N} \Rightarrow a+b=kd+b=rnd \Rightarrow$
$\Rightarrow b=rnd-kd=(rn-k)d \Rightarrow b \vdots d \Rightarrow НОД(a,b) \geq d$, но
$НОД(a,b)=1 \Rightarrow d=1 \Rightarrow НОД(a,m)=1$. Аналогично
$НОД(b,m)=1 \Rightarrow$ a и b взаимно просты с m

Если $(a+b) \vdots m$, то $(a+b)^2 \vdots m$
$(a+b)^2 \vdots m$, $a^2-7ab+b^2 \vdots m \Rightarrow (a+b)^2-(a^2-7ab+b^2) \vdots m \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2+b^2+2ab-a^2+7ab-b^2=9ab \vdots m$
a и b взаимно просты с $m \Rightarrow НОД(ab,m)=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ если $9ab \vdots m$, то $9 \vdots m \Rightarrow \max(m)=9$

Докажем, что случай $m=9$ возможен:

$a=1$, $b=8$ (дробь $\frac{1}{8}$ несократима)

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}=\frac{1+8}{1-7\cdot1\cdot8+64}=\frac{9}{65-56}=\frac{9}{9} \leftarrow \text{можно сократить на } m=9$$

Таким образом, мы доказали, что $m \leq 9$ (m - делитель числа 9, т.е. $m \leq 9$) и привели пример для $m=9 \Rightarrow$
$\Rightarrow \max(m)=9$

Ответ: $\max(m)=9$

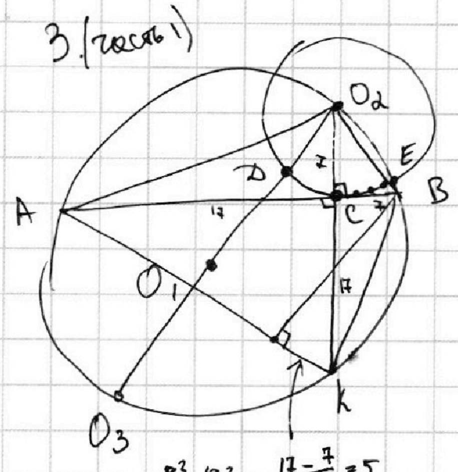
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3.(часть 1)



$R^2 = 12^2 + 24^2 = 313$ $\quad \frac{17-7}{2} = 5$ $\quad 5^2 + x^2 = 7^2 + 17^2$

Пусть O_1, O_2 — центры Ω и ω. Будем выбирать C на окружности ω, проводить в ней касательную к ω AB, пересекать (O_2C) с Ω в точке K. Начнем двигать C вправо от диаметр (влево будет то же из симметрии).

Нетрудно заметить, чем дальше C от $D = O_1O_2 \cap \omega$, тем больше $\angle O_1O_2K$, тем больше дуга $\overset{\frown}{O_3K}$, где $O_3 = (O_1O_2) \cap \Omega$, тем дальше K от O_3, тем меньше дуга O_2K, тем меньше $[O_2K]$ тем меньше $CK = O_2K - 7$ т.е. тем меньше $CK \cdot CO_2 = 7CK$, тем меньше $AC \cdot CB = O_2C \cdot CK$. Но при отдалении точки C по окружности от D к Ω $AC \uparrow$, $CB \downarrow$, значит, отношение $AC : CB \uparrow \Rightarrow$ есть только одна C на $\overset{\frown}{DE}$ такая, что $AC : CB = 17 : 7$.

$E = \omega \cap \Omega$ справа от (O_1O_2)

$O_2C = 7$, $AC : CB = 17 : 7$. Пусть $AC = 17x$, $CB = 7x$, x — единица измерения.

$CK = \frac{AC \cdot CB}{O_2C} = 17x^2$ из $CK \cdot O_2C = AC \cdot CB$.

~~Заметим, $x = 1$ подходит~~

Для x посчитаем площадь $\triangle AO_2B$ по т. Пифагора в $\triangle ACO_2$ и $\triangle O_2CB$

$S = \frac{abc}{4R}$

AB на высоту / 2

$$\frac{7 \cdot 24x}{2} = \frac{\sqrt{7^2 + (17x)^2} \cdot \sqrt{7^2 + (7x)^2} \cdot 24x}{4 \cdot 13}$$

$$2 \cdot 7x \cdot 13 = \sqrt{49 + (17x)^2} \cdot \sqrt{49 + (7x)^2}$$

$$2 \cdot 13 = \sqrt{49 + 289x^2} \cdot \sqrt{1 + x^2} \quad |^2$$

$$4 \cdot 169 = (49 + 289x^2)(1 + x^2)$$

$$4 \cdot 169 = 289x^4 + (289 + 49)x^2 + 49 \qquad y = x^2$$

$$289y^2 + (289 + 49)y + (-4 \cdot 169 + 49) = 0$$

$$D = (289 + 49)^2 + 4 \cdot 289 \cdot 4 \cdot 169 - 4 \cdot 289 \cdot 49$$

~~Пусть корень этого уравнения ≥ 0 ... $24x = AB$.~~

$$289^2 + 49^2 - 289 \cdot 49 \cdot 2 + 16 \cdot 289 \cdot 169 = (289 - 49)^2 + (4 \cdot 17 \cdot 13)^2 =$$

$$= (240)^2 + (4 \cdot 17 \cdot 13)^2$$

$$x = \frac{-289 - 49 + \sqrt{240^2 + (13 \cdot 17 \cdot 4)^2}}{289 \cdot 2}$$

если «−» перед $\sqrt{D}$, то $x < 0$, что невозможно $\Rightarrow$ только 1 корень

т.к. один корень отрицательный, а положительный не больше 1, верх

$y = x^2 \geq 0$

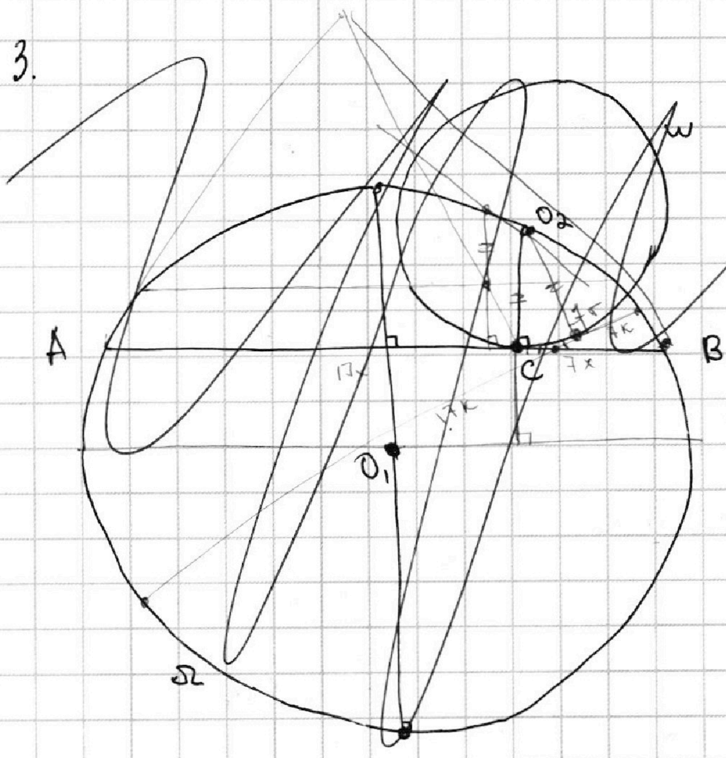
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3.



~~Заметим, т.к. $AC : CB = 17 : 7$, если $AC = 17x$, $CB = 7x$.~~

$X = 1$

$2R\cdot O_2C = O_2B\cdot AO_2$

$2\cdot 13 = \sqrt{1+x^2}\,\sqrt{289+49x^2}$

$4\cdot 169 = (1+x^2)(289x^2+49)$

$2\cdot 338$

3 (часть 2)

Итого мы посчитали площадь $\triangle AO_2B$ двумя способами: $\frac{AB\cdot O_2C}{2}$ и $\frac{AB\cdot O_2B\cdot AO_2}{4R}$

$O_2C = 7$, $O_2B = \sqrt{49+(7x)^2}$, $O_2A = \sqrt{289+(17x)^2}$ по т. Пифагора

где $AC = 17x$, $BC = 7$. $R = 13$ (радиус Ω).

Приравняв 2 значения площади, найдем x,

квадратного

~~$AB = 7x + 17x = 24$~~

~~Т.к. у уравнения на предыдущей странице один корень < 0, что невозможно для x, у уравнение не больше 1 корня~~

~~Ответ: $AB = 24$~~

$\frac{-338+\sqrt{240^2+(52\cdot 17)^2}}{289\cdot 2}$

$4\cdot 169 = (1+x^2)(289x^2+49)$

$x = 1 \leftarrow$ решение ур-е $\Rightarrow AB = 7x + 17x = 24x = 24$

Ответ: $AB = 24$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4. Ответ: $x=\frac{1}{9}$

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$$

~~Уравнение имеет ненулевую область определения~~

Выражение под корнем должно быть неотрицательным ⇒

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+2\geq 0 \\ 3x^2+3x+1\geq 0 \end{cases}$$

Домножим обе части ур-е на $\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)$:

$$\left(\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}\right)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)=(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)$$

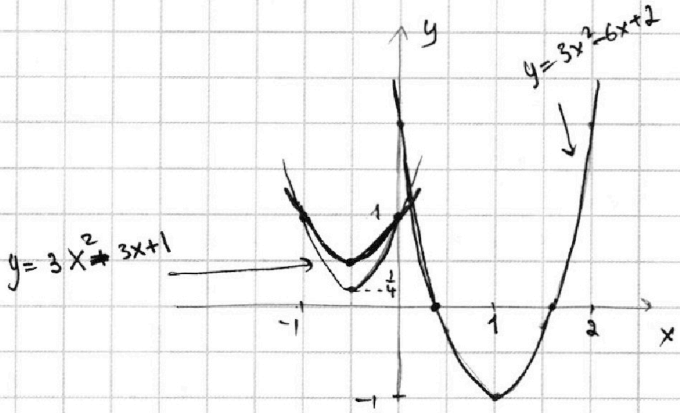
$$\left(\sqrt{3x^2-6x+2}\right)^2-\left(\sqrt{3x^2+3x+1}\right)^2=(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)$$

$$3x^2-6x+2-(3x^2+3x+1)=(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)$$

$$(1-9x)=(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)$$

При $1-9x\neq 0$ можем сократить обе части на $(1-9x)$:

$$1=\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}$$



Построим на координатной плоскости $y=3x^2-6x+2$ и $y=3x^2+3x+1$

Рассмотрим $y=3x^2+3x+1$:

при $x\in(-\infty;-1)$ и $x\in(0;+\infty)$ $3x^2+3x+1>1$ ⇒

⇒ $\sqrt{3x^2+3x+1}>1$ ⇒ $1-\sqrt{3x^2+3x+1}$

⇒ $\sqrt{3x^2-6x+2}<1-1=0$, что невозможно, т.к. $\sqrt{a}$ — неотриц. число по определ.

Значит, $x\in[-1;0]$. Однако $y=3x^2-6x+2$ ~~возрастает~~ убывает на участке $(-\infty;1]$, т.к. $(1;-1)$ — координата вершины, значит, ~~возрастает~~ и на участке $(-\infty;0]$ тоже ~~возрастает~~ убывает, значит, на участке $[-1;0]$ $3x^2-6x+2\geq 3\cdot 0-6\cdot 0+2=2$, значит, $\sqrt{3x^2-6x+2}\geq\sqrt{2}$ на $[-1;0]$ ⇒

⇒ $1-\sqrt{3x^2-6x+2}\leq 1-\sqrt{2}<0$ ⇒ $\sqrt{3x^2+3x+1}<0$, что невозможно по определению квадратного корня ⇒ случай $1-9x\neq 0$ невозможен

При $1-9x=0$: $x=\frac{1}{9}$ ⇒ $\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=\sqrt{\frac{3}{81}-\frac{6}{9}+2}-\sqrt{\frac{3}{81}+\frac{3}{9}+1}=$

$=\sqrt{\frac{3-6\cdot 9+2\cdot 81}{81}}-\sqrt{\frac{3+3\cdot 9+81}{81}}=\sqrt{\frac{121}{81}}-\sqrt{\frac{121}{81}}=0=1-9\cdot\frac{1}{9}$. ОДЗ соблюдается: оба подкоренных выражения равны $\frac{11}{9}>0$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6. Ответ: $a=0$

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}(x^2+y^2)-1\le 0 \\ x^2+(y-12)^2-16\ge 0\end{cases} \quad 1 \\ \begin{cases}(x^2+y^2)-1\ge 0 \\ x^2+(y-12)^2-16\le 0\end{cases} \quad 2 \end{array}\right.$$

1 $\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ x^2+(y-12)^2\ge 16 \end{cases}$

$x^2+y^2=R_1^2$ – окружность с центром в $(0;0)$ и радиусом $R_1 \Rightarrow x^2+y^2\le 1 \to$ мн-во окружностей с центром в $(0;0)$ и радиусом $R_1\le 1$

$x^2+(y-12)^2=R_2^2$ – окр. с центром в $(0;12)$ и радиусом $R_2 \Rightarrow x^2+(y-12)^2\ge 16$ – мн. во окружностей с центром в $(0;12)$ и радиусом $R_2\ge 4$

2 $\begin{cases} x^2+y^2\ge 1 \\ x^2+(y-12)^2\le 16 \end{cases}$ – аналогично: $R_1\ge 1$, $R_2\le 4$, где R_1 и R_2 – радиусы окр. $\omega_1((0;0),R_1)$ и $\omega_2((0;12),R_2)$

~~Если каких~~ Корней ур-я ~~ш~~ для заданных R_1 и R_2 может быть либо 0, либо 1, либо 2. 0 корней: окружности $\omega_1((0;0),R_1)$ и $\omega_2((0;12),R_2)$ не пересекаются, 1 корень: ω_1 и ω_2 касаются, 2 корня – пересекаются в двух точках. Заметим, если при заданных R_1 и R_2 ур-е имеет меньше 2-х корней, то вне зависимости от a и b система имеет меньше 2-х корней (если одно ур-е системы имеет меньше 2-х корней, вся система тоже). Значит, система может иметь 2 решения $\Leftrightarrow$ окружности пересекаются в двух точках $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$.

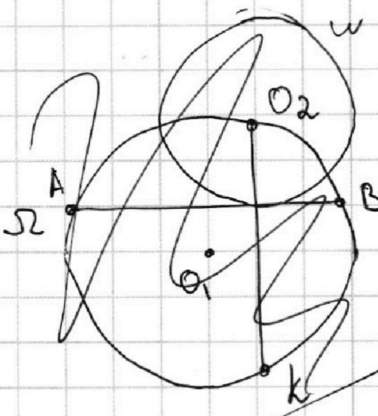
Заметим, т.к. центры окружностей лежат на оси ординат, ~~наша~~ конструкция из двух окр. симметрична отн. оси ординат, тогда прямая, содержащая точки пересечения $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ окружностей, должна быть перпендикулярна оси ординат, иначе говоря иметь вид $y=k+0\cdot x$.

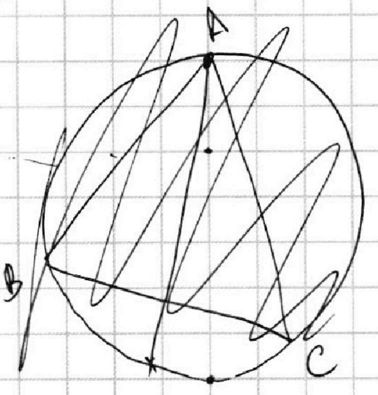
$ax+y-8b=0 \Rightarrow y=8b-ax$. Эта прямая должна содержать (x_1,y_1) и (x_2,y_2), иначе система будет иметь меньше 2-х решений, значит, должна совпадать с прямой, проходящей через точки пересеч. ω_1 и ω_2 (т.к. прямая определяется двумя ее точками) $\Rightarrow$ иметь вид $y=k+0\cdot x \Rightarrow a=0$.

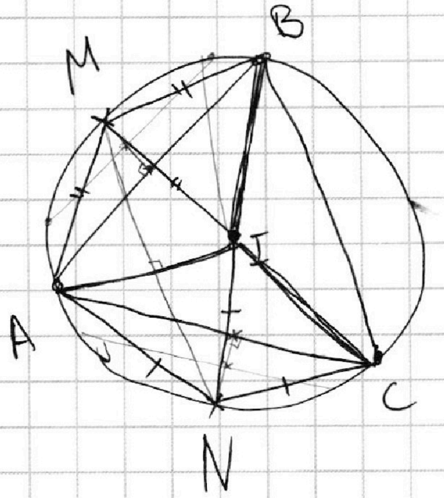
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







Заметим, по лемме о трезубце $AN = NI = NC$ и $AI = MI = MB$, где I – центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности.
Также, CI – биссектриса $\Rightarrow \angle ACI = \angle ICB$, $\angle ACM = \angle BCM$ как вписанные в одну окр. и опирающиеся на равные дуги $\Rightarrow$
$\Rightarrow M \in CI$. Аналогично $N \in BI$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

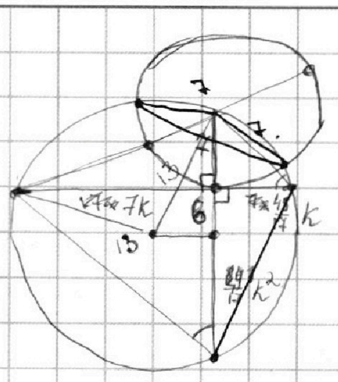
$a+b \; \vdots \; m$

$a^2-7ab+b^2 \; \vdots \; m$

$a^2+2ab+b^2 \; \vdots \; m$

$9ab \; \vdots \; m$

$9 \; \vdots \; m$



$49k^2 =$

$(k+2)(k-1)$

$49(k+1)$

$7 \cdot \frac{343}{17}k = \frac{343}{17}k^2$

$\frac{7}{17} = \frac{k}{17}$

$k =$

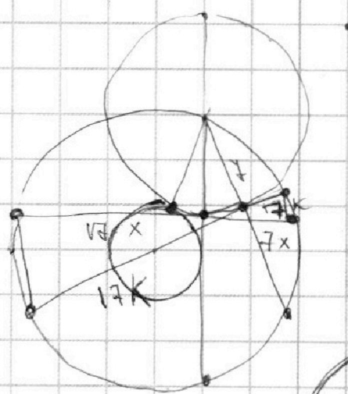
$\frac{343}{17}k = \frac{343}{17}k^2$

$k = 1$

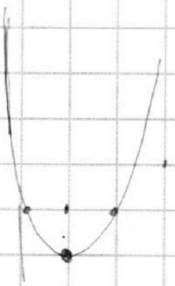
$(3x-1)(x+2)$

$3x^2$

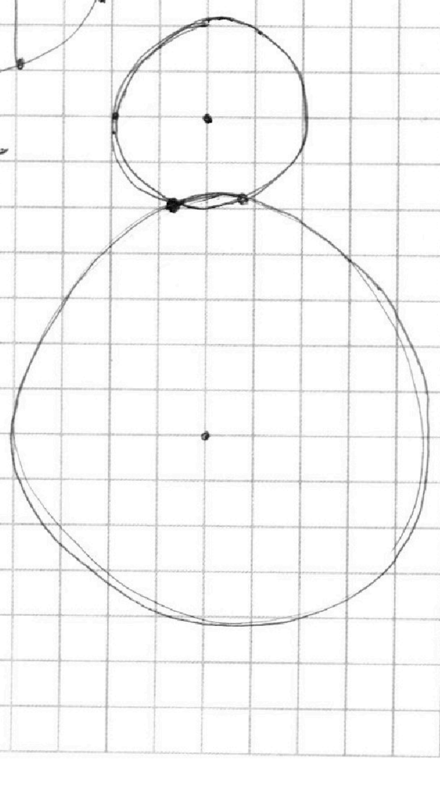
$\cancel{3x^2} - 9x$



$(3x^2-\frac{1}{2})x$



$y = 8b - \cancel{ay}$

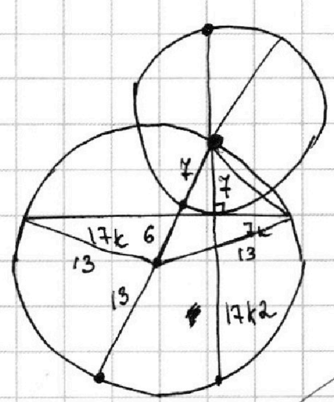


$\frac{6}{2a}$ $\frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}$ $1 \pm \sqrt{12}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



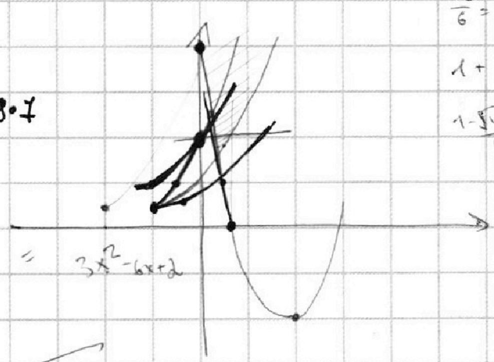
$13\cdot 7$

$3x^2-6x+2\geq 0$

$\frac{6}{6}=1$ $\quad 3-6+2=-1$

$1+\frac{\sqrt{12}}{6}$

$1-\frac{\sqrt{12}}{6}$



$\sqrt{3x^2+3x+1} = 3x^2-6x+2$

$1-3x^2-3x-1 = 2\sqrt{3x^2+3x+1}$

$6x^2+3x-2=2\sqrt{3x^2+3x+1}$

$\frac{3}{4}-\frac{3}{2}=-\frac{3}{4}$

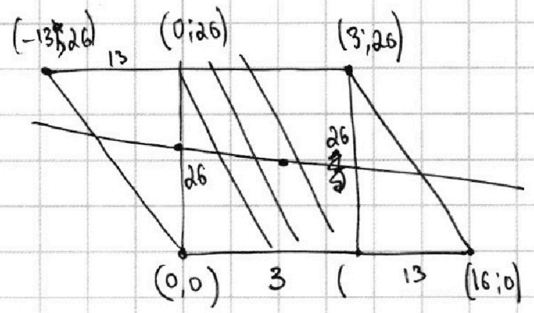
5.

$2(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=14$

Пусть $x_2 = x_1$. Тогда
$y_2-1=14$

Тогда

$-2x+k=y$



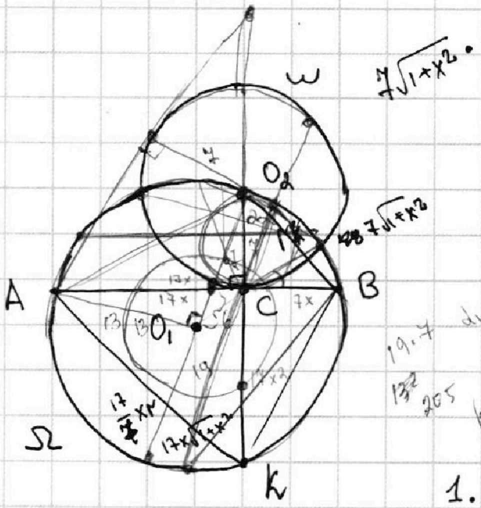
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

[ ] [ ] [X] [ ] [ ] [ ] [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Дано: $\Omega(O_1, R)$; $A \in \Omega$, $B \in \Omega$, $O_2 \in \Omega$; $\omega(O_2, r)$; AB – кас-ная к ω, C – точка касания, $AC : CB = 17 : 7$, $R = 13$, $r = 7$

Найти: $[AB]$

Доп. построение:
Продлим $[O_2C)$ до второго пересечения с Ω, получим ~~т~~ точку K

1. $\triangle O_2CB \sim \triangle KCA$ по двум углам ($\angle ACK = \angle O_2CB$ как вертикальные, $\angle O_2BA = \angle AKO_2$ как вписанные в Ω и опирающиеся на $\overset{\frown}{AO_2}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{O_2C}{AC} = \frac{BC}{CK} = \frac{1}{k} \Rightarrow k \cdot O_2C = CA$, $k \cdot BC = CK$ ($\frac{1}{k}$ – коэффициент подобия)

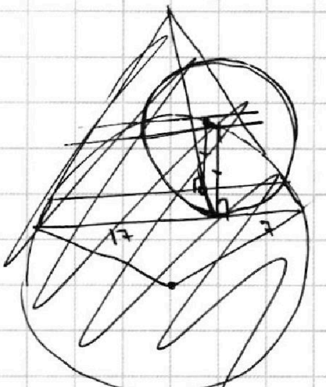
2. AB – кас-ная к ω, C – точка касания $\Rightarrow O_2C \perp AB$ по св-ву кас-ной $\Rightarrow O_2C = r = 7$

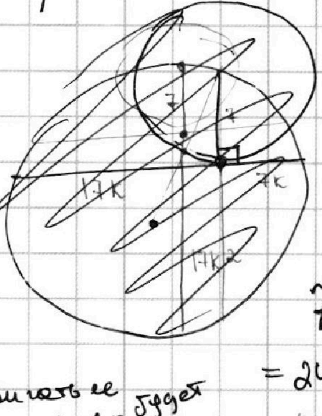
3. $AC : CB = 17 : 7$. $\Rightarrow$ $CB = \frac{7}{17}AC$ ~~Пусть ... , тогда $CB = ...$~~

~~4. $\frac{O_2C}{AC} = \frac{BC}{CK} \Rightarrow \frac{7}{7k} = \frac{\frac{7}{17}\cdot 7k}{\left(\frac{7}{17}\cdot 7k\right)\cdot k}$ по п. 1, 2 и 3~~

~~$7k \cdot \left(\frac{7}{17}\cdot 7k\right) = \left(\frac{7}{17}\cdot 7k\right)$~~

4. $O_2C = 7$, $CB = 7x$, $AC = 17x \Rightarrow CK = 17x^2$





5. $O_2B = 7\sqrt{1+x^2}$
$AK = 17x\sqrt{1+x^2}$
$BK = x\sqrt{49+289x^2}$
$AO_2 = \sqrt{49+289x^2}$

$7\cdot 17(1+x^2) + 49 + 289x^2 = 24\cdot(7+17x^2)$

по т. Птолемея

Будем выбирать точку на ω и двигать ее от диаметра через O_1O_2 вправо по окружности (влево будет то же из симметрии). Заметим, чем правее мы двигаем точку, тем уменьшается хорда OK