



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



$2^{\alpha_1} 7^{\alpha_2} 2^{\beta_1} 7^{\beta_2}$
 $2^{\alpha_1} 7^{\alpha_2} 2^{\beta_1} 7^{\beta_2}$
 нечет. возм. +
 $\beta_2 \geq 10$
 $\alpha_1 + \beta_1 \geq 15$
 $\beta_1 + \alpha_2 \geq 17$
 $\alpha_1 + \beta_2 \geq 23$
 $\beta_2 \geq 15 - \alpha_1$
 $15 - \alpha_1 \geq 23 - \alpha_2$
 $\alpha_2 \geq 8 + \alpha_1$
 $32 + 8 + 23$
 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9$
 $2^4 \cdot 3^2$
 48

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$.

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

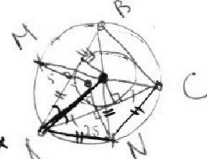
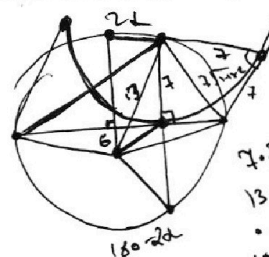
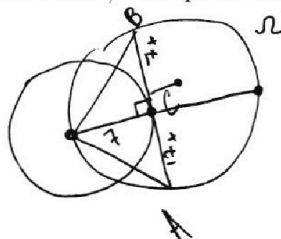
5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдется значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



$7 \cdot 24x$
 $13 \cdot 7 \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \sin(90^\circ - \alpha)$
 132
 © МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

р1.

$ab : 2^{15} 7^{11} \Rightarrow ab \geq 2^{15} 7^{11}$, аналогично $ac \geq 2^{23} 7^{39}$, $bc \geq 2^{17} 7^{18}$
~~Заметим~~ Заметим, abc - наименьшее $\Leftrightarrow a = 2^{\alpha_1} 7^{\alpha_2}$, $b = 2^{\beta_1} 7^{\beta_2}$,
 $c = 2^{\gamma_1} 7^{\gamma_2}$, т.е. каждое из чисел a, b и c делится **только** на
 простые p , отличные от 2 и 7 (если делится, то **то** не
 вынесет на **д** делимость их попарных произведений на $2^x 7^y$ из
 условия, но увеличивает произведение, т.е. делает **не**
 наименьшим из возможных).

Тогда $ab = 2^{d_1+\beta_1} 7^{d_2+\beta_2} \geq 2^{15} 7^{11}$, $ac = 2^{d_1+\gamma_1} 7^{d_2+\gamma_2} \geq 2^{23} 7^{39}$, $bc = 2^{\beta_1+\gamma_1} 7^{\beta_2+\gamma_2} \geq 2^{17} 7^{18}$

Тогда
$$\begin{cases} d_1 + \beta_1 \geq 15 \\ d_2 + \beta_2 \geq 11 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 18 \\ d_1 + \gamma_1 \geq 23 \\ d_2 + \gamma_2 \geq 39 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & d_1 + \beta_1 \geq 15 \Rightarrow \beta_1 \geq 15 - d_1 \\ & \Rightarrow (15 - d_1) + \gamma_1 \geq \beta_1 + \gamma_1 \geq 17 \Rightarrow 15 - d_1 + \gamma_1 \geq 17 \\ & \Rightarrow \gamma_1 \geq 2 + d_1 \Rightarrow (2 + d_1) \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \quad (d_1 + \beta_1) + (d_1 + \gamma_1) + (\beta_1 + \gamma_1) \geq 15 + 17 + 23$$

$$2(d_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 55$$

но d_1, β_1, γ_1 - целые неотрицательные,
 т.е. a, b и c - натуральные
 $\Rightarrow d_1 + \beta_1 + \gamma_1$ - целое неотрицательное

$$\textcircled{2} \quad (d_2 + \beta_2) + (d_2 + \gamma_2) + (\beta_2 + \gamma_2) \geq 11 + 39 + 18 = 68$$

$$\Rightarrow (d_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 34,$$

но $\beta_2 \geq 0$,
 но $d_2 + \gamma_2 \geq 39$, $d_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq d_2 + \gamma_2 \geq 39$
 $\Rightarrow \min(d_2 + \beta_2 + \gamma_2) = 39$

$$d_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq \frac{55}{2}, (d_1 + \beta_1 + \gamma_1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min(d_1 + \beta_1 + \gamma_1) = 28$$

$$abc = (2^{d_1} 7^{d_2}) \cdot (2^{\beta_1} 7^{\beta_2}) \cdot (2^{\gamma_1} 7^{\gamma_2}) = 2^{d_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 7^{d_2 + \beta_2 + \gamma_2} \geq$$

$$\geq 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow \min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Докажем, что такой случай возможен:

$$\begin{array}{l} a = 2^{11} \cdot 7^{19} \\ b = 2^4 \cdot 7^0 \\ c = 2^{13} \cdot 7^{20} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} ab = 2^{15} 7^{19} \\ bc = 2^{17} 7^{20} \\ ac = 2^{24} 7^{39} \end{array} \begin{array}{l} : (2^{15} 7^{11}) \\ : (2^{17} 7^{18}) \\ : (2^{23} 7^{39}) \end{array}, \text{ т.т.д.}$$

$$\textcircled{1} \text{ ответ: } \min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.

т.к. дроби $\frac{a}{b}$ несократима и $a, b \in \mathbb{N}$, то $\text{НОД}(a, b) = 1$ (иначе, если $\text{НОД}(a, b) = d$, $a : d$ и $b : d \Rightarrow \frac{a}{b}$ можно сократить на d).

Пусть $a + b : m$, $a^2 - 7ab + b^2 : m$. ($d \in \mathbb{N}$)

$a + b : m$, $\text{НОД}(a, b) = 1$. Предположим, $\text{НОД}(a, m) = d \Rightarrow$

$\Rightarrow a = kd$, $m = nd$, ~~$k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$~~ $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. $a + b : m \Rightarrow$

$\Rightarrow a + b = rm = rnd$, $r \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b = kd + b = rnd \Rightarrow$

$\Rightarrow b = rnd - kd = (rn - k)d \Rightarrow b : d \Rightarrow \text{НОД}(a, b) \geq d$, но

$\text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a, m) = 1$. Аналогично

$\text{НОД}(b, m) = 1 \Rightarrow a$ и b взаимно просты с m

Если $(a + b) : m$, то $(a + b)^2 : m$

$(a + b)^2 : m$, $a^2 - 7ab + b^2 : m \Rightarrow (a + b)^2 - (a^2 - 7ab + b^2) : m \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab - a^2 + 7ab - b^2 = 9ab : m$

a и b взаимно просты с $m \Rightarrow \text{НОД}(ab, m) = 1 \Rightarrow$

\Rightarrow если $9ab : m$, то $9 : m \Rightarrow \max(m) = 9$

Докажем, что случай $m = 9$ возможен:

$a = 1$, $b = 8$ (дроби $\frac{1}{8}$ несократима)

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{1+8}{1-7 \cdot 1 \cdot 8 + 64} = \frac{9}{65-56} = \frac{9}{9} \leftarrow \text{можно сократить на } m=9$$

Таким образом, мы доказали, что $m \leq 9$ (m - делитель числа 9, т.е. $m \leq 9$) и привели пример для $m = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \max(m) = 9$

Ответ: $\max(m) = 9$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

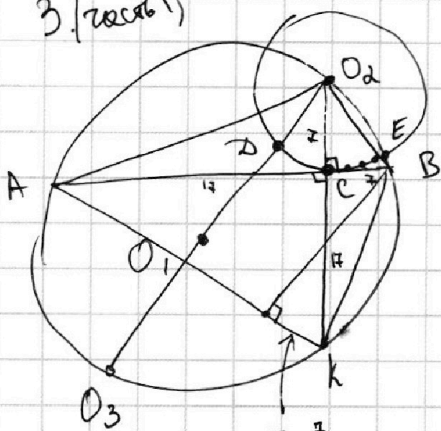
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3. (7 баллов)



$$R^2 = 12^2 + 24^2 = 513$$

$$R = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$5^2 + x^2 = 2^2 + 12^2$$

тем меньше дуга O_2K , тем меньше $\angle O_2K$, тем меньше $CK = O_2K - r$ т.е. тем меньше $CK \cdot CO_2 = CK$, тем меньше $AC \cdot CB = O_2C \cdot CK$. Но при отдалении точки C по окружности от D к E $AC \uparrow$, $CB \downarrow$, значит, отношение $AC : CB \uparrow \Rightarrow$ есть только одна C на DE такая, что $AC : CB = 17 : 7$.

$E = W \cap DE$
справа от (O_1O_2)

$O_2C = 4$, $AC : CB = 17 : 7$. Пусть $AC = 17x$, $CB = 7x$, x — единица измерения.
 $CK = \frac{AC \cdot CB}{O_2C} = 17x^2$ из $CK \cdot O_2C = AC \cdot CB$.

Зависит от x площадь $\triangle ABC$.
Автоматически x — площадь $\triangle ABC$.
но т. Арафоров в $\triangle ACO_2$ и $\triangle CO_2B$.
 $S = \frac{abc}{4R}$

Автоматически x — площадь $\triangle ABC$.
 $2 \rightarrow \frac{7x \cdot 24x}{2} = \frac{\sqrt{4^2 + (17x)^2} \cdot \sqrt{4^2 + (7x)^2} \cdot 24x}{4 \cdot 13}$

$$2 \cdot 7x \cdot 13 = \sqrt{49 + (17x)^2} \cdot \sqrt{49 + (7x)^2}$$

$$2 \cdot 13 = \sqrt{49 + 289x^2} \cdot \sqrt{1 + x^2} \quad |^2$$

$$4 \cdot 169 = (49 + 289x^2)(1 + x^2)$$

$$4 \cdot 169 = 289x^2 + (289 + 49)x^2 + 49 \quad y = x^2$$

$$289y^2 + (289 + 49)y + (-4 \cdot 169 + 49) = 0$$

$$D = (289^2 + 49^2) + 4 \cdot 289 \cdot 4 \cdot 169 - 4 \cdot 289^2 \cdot 49$$

т.к. один корень отрицательный, то больше 1, следовательно $y > 0$

Автоматически x — площадь $\triangle ABC$.
зависит от x площадь $\triangle ABC$.
 $289^2 + 49^2 = 289 \cdot 49 \cdot 2 + 16 \cdot 289 \cdot 169 = (289 - 49)^2 + (4 \cdot 17 \cdot 13)^2 =$
 $= (240)^2 + (4 \cdot 17 \cdot 13)^2$
 $x = \frac{-289 - 49 + \sqrt{240^2 + (17 \cdot 13 \cdot 4)^2}}{289 \cdot 2}$
если $y > 4$ перед \sqrt{D} , т.к. $x > 0$, то невозможно \Rightarrow только 1 корень

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

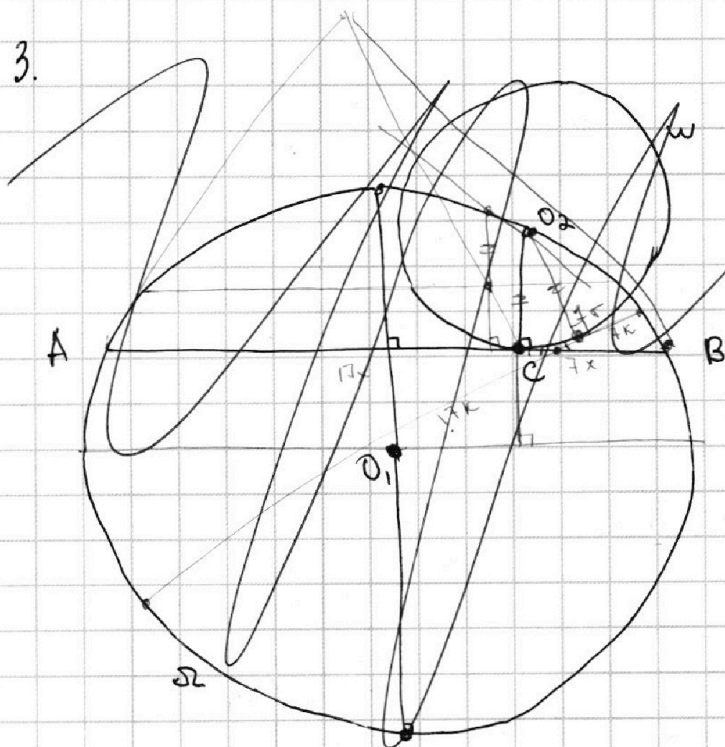
- 1 2 3 4 5 6 7

МОФИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3.



Заметим,
т.к. $AC:CB=17:7$,
если $AC=17x$, $CB=7x$.
 $x=1$

$$2R \cdot O_2C = O_2B \cdot AO_2$$

$$2 \cdot 13 \cdot 7 = \sqrt{49+(7x)^2} \cdot \sqrt{289+(17x)^2}$$

$$4 \cdot 169 = (1+x^2)(289x^2+49)$$

$$2 \cdot 338$$

3 (решать)

Чтобы мы посчитали площадь $\triangle AO_2B$ двумя способами: $\frac{AB \cdot O_2C}{2}$ и $\frac{AB \cdot O_2B \cdot AO_2}{4R}$

$O_2C = 7$, $O_2B = \sqrt{49+(7x)^2}$, $O_2A = \sqrt{289+(17x)^2}$ по т. Пифагора
где $AC=17x$, $BC=7x$. $R=13$ (радиус Ω).

Арифметическое и геометрическое средние, найдем x ,
 $AB = 7x + 17x = 24x$
т.к. $y \Rightarrow$ уравнение не разрешимся иначе корень < 0 ,
что невозможно для x, y
уравнение не больше 1 корня \Rightarrow

Ответ: $AB = 24$ $\left(\frac{338 + \sqrt{240^2 + (52 \cdot 17)^2}}{289 \cdot 2} \right)$

$$4 \cdot 169 = (1+x^2)(289x^2+49)$$

$x=1 \leftarrow$ решение ур-е $\Rightarrow AB = 7x + 17x = 24x = 24$

Ответ: $AB=24$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4. Ответ: $x = \frac{1}{9}$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

~~Уравнение имеет неограниченную область определения~~

Выражение под корнем должно быть неотрицательным \Rightarrow

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Дополним обе части ур-е на $(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$:

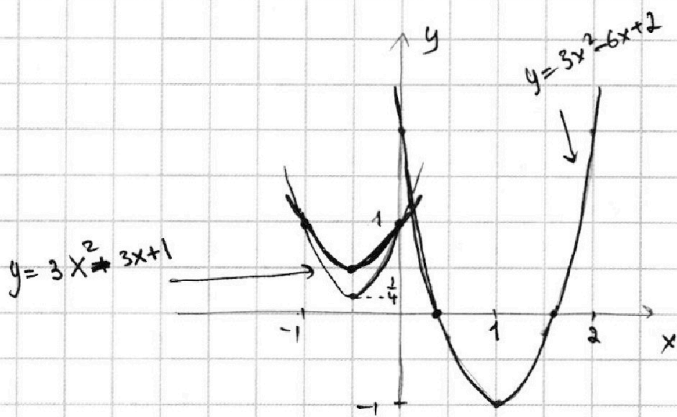
$$\begin{aligned} (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) &= (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \\ (\sqrt{3x^2 - 6x + 2})^2 - (\sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 &= (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \end{aligned}$$

$$3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$(1 - 9x) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

При $1 - 9x \neq 0$ можем сократить обе части на $(1 - 9x)$:

$$1 = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$



Построим на координатной плоскости $y = 3x^2 - 6x + 2$ и $y = 3x^2 + 3x + 1$

Рассмотрим $y = 3x^2 + 3x + 1$:

при $x \in (-\infty; -1)$ и $x \in (0; +\infty)$

$$3x^2 + 3x + 1 > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \leq 1 - 1 = 0, \text{ что}$$

невозможно, т.к. \sqrt{a} — неотриц.

Значит, $x \in [-1; 0]$. Однако $y = 3x^2 - 6x + 2$ убывает на участке $(-\infty; -1]$, т.к. $(-1; -1)$ — координата вершины, и возрастает на участке $[-1; 0]$.

Значит, возрастает и на участке $(-\infty; 0]$ тоже.

Значит, на участке $[-1; 0]$ $3x^2 - 6x + 2 \geq 3 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 2 = 2$,

значит, $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} \geq \sqrt{2}$ на $[-1; 0] \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \leq 1 - \sqrt{2} < 0 \Rightarrow \sqrt{3x^2 + 3x + 1} < 0, \text{ что невозможно по определению квадратного корня} \Rightarrow \text{случай } 1 - 9x \neq 0 \text{ невозможен}$$

При $1 - 9x = 0$: $x = \frac{1}{9} \Rightarrow \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{\frac{3}{81} - \frac{6}{9} + 2} = \sqrt{\frac{3}{81} + \frac{2}{9}} =$

$$= \sqrt{\frac{3 - 6 \cdot 9 + 2 \cdot 81}{81}} = \sqrt{\frac{3 + 3 \cdot 9 + 81}{81}} = \sqrt{\frac{121}{81}} = \frac{11}{9} = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9}. \text{ Оба выражения равны } \frac{11}{9} > 0.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6. Ответ: $a=0$

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2+y^2-1 \leq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \geq 0 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x^2+y^2-1 \geq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \leq 0 \end{cases} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+(y-12)^2 \geq 16 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ x^2+(y-12)^2 \leq 16 \end{cases}$$

аналогично: $R_1 \geq 1, R_2 \leq 4$,
где R_1 и R_2 — радиусы окр.
 $\omega_1(0;0, R_1)$ и $\omega_2(0;12, R_2)$

$x^2+y^2=R_1^2$ — окружность с центром в $(0;0)$ и радиусом $R_1 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 1 \rightarrow$ мн-во окружностей с центром в $(0;0)$ и радиусом $R_1 \leq 1$
 $x^2+(y-12)^2=R_2^2$ — окр. с центром в $(0;12)$ и радиусом $R_2 \Rightarrow x^2+(y-12)^2 \geq 16$ — мн-во окружностей с центром в $(0;12)$ и радиусом $R_2 \geq 4$

Связь ~~связь~~ корней ур-я ~~и~~ две заданных R_1, R_2 может быть либо 0, либо 1, либо 2. 0 корней: окружности $\omega_1(0;0, R_1)$ и $\omega_2(0;12, R_2)$ не пересекаются, 1 корень: ω_1 и ω_2 касаются, 2 корня — пересекаются в двух точках. Заметим, если при заданных R_1 и R_2 ур-е имеет ~~и~~ меньше 2-х корней, то вне зависимости от a и b система имеет меньше 2-х корней (если одно ур-е системы имеет меньше 2-х корней, вне системы тоже). Значит, система может иметь 2 решения \Leftrightarrow окружности пересекаются в двух точках $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.

Заметим, т.к. центры окружностей лежат на оси ординат, любая конструкция из двух окр. симметрична отн. оси ординат, тогда прямая, содержащая точки пересечения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ окружностей, должна быть перпендикулярна оси ординат, иначе говоря иметь вид $y = k + 0 \cdot x$.
 $ax+y-8b=0 \Rightarrow y=8b-ax$. Эта прямая должна содержать $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ иначе система будет иметь меньше 2-х решений, значит, должна совпадать с прямой, проходящей через точки пересеч. ω_1 и ω_2 (т.к. прямая определяется двумя ее точками) \Rightarrow иметь вид $y = k + 0 \cdot x \Rightarrow a=0$.

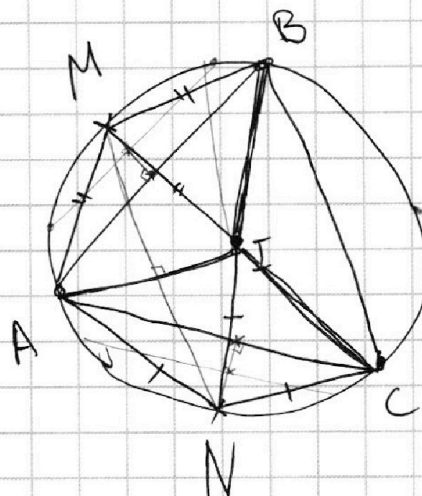
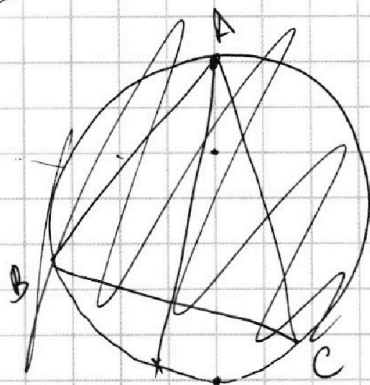
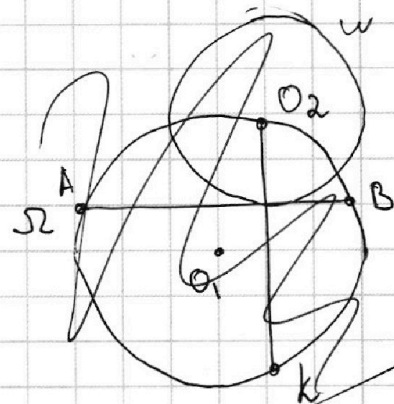
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, по лемме
 о треугольнике $AN = NI = NC$ и $AI = MI = MB$,
 где I — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности,
 также, CI — биссектриса $\Rightarrow \angle ACI = \angle ICB$, $\angle ACM = \angle BCM$
 как вписанные в одну окр. и опирающиеся на равные дуги \Rightarrow
 $\Rightarrow M \in CI$. Аналогично $N \in BI$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

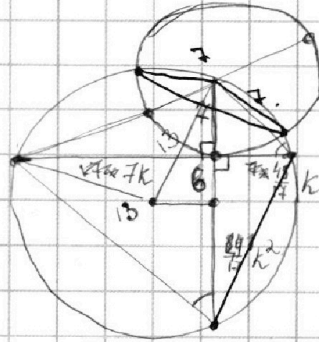
$$a+b : m$$

$$a^2 - 7ab + b^2 : m$$

$$a^2 + 2ab + b^2 : m$$

$$9ab : m$$

$$3 : m$$



$$\sqrt{17}k^2 = \sqrt{17}k^2$$

$$(k+2)(k-1) = \sqrt{17}k^2$$

$$7 \cdot \frac{343}{17}k = \frac{343}{17}k^2$$

$$\frac{7}{17} = \frac{k}{17}$$

$$k = 7$$

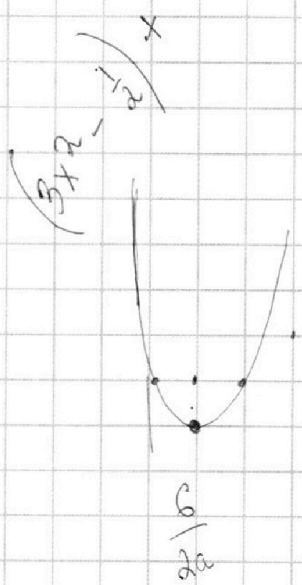
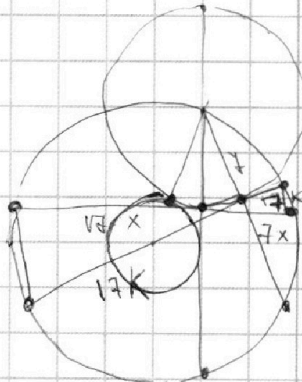
$$\frac{343}{17}k = \frac{343}{17}k^2$$

$$k = 1$$

$$(3x - 1)(x + 2)$$

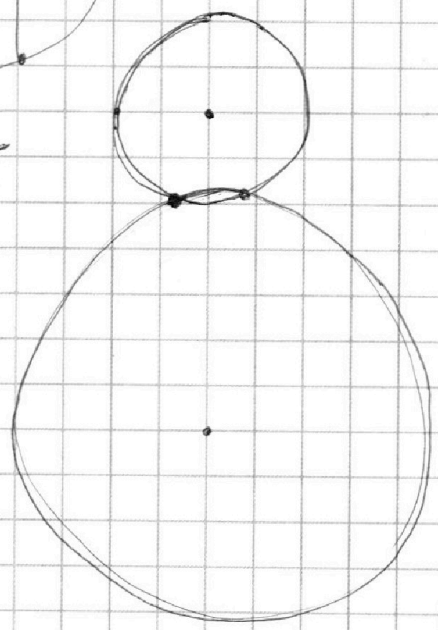
$$3x^2$$

$$3x^2 - 9x$$



$$y = 3x^2 - 9x$$

$$\frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} \quad 1 \pm \sqrt{12}$$



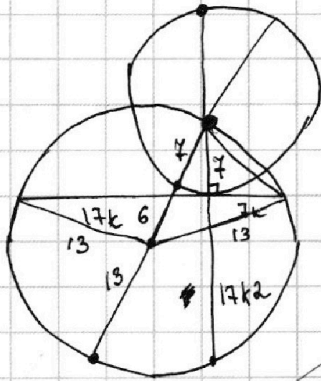
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



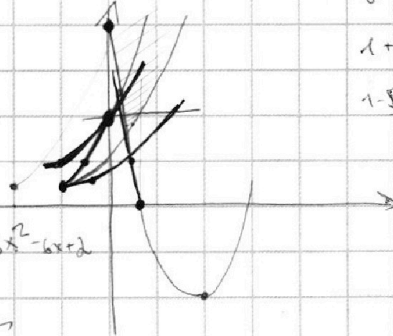
03.7

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$\frac{6}{6} = 1 \quad 3 - 6 + 2 = -1$$

$$1 + \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

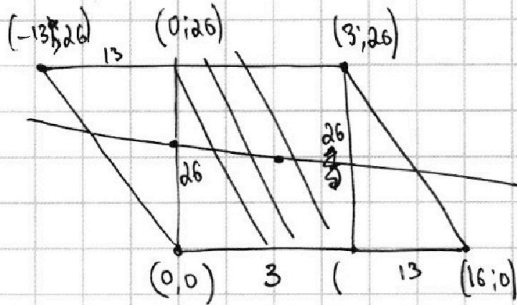


$$\sqrt{1 - 3x^2 - 3x - 1} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 3x^2 - 6x + 2$$

$$6x^2 + 3x - 2 = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}$$

5.



$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

Пусть $x_2 = x_1$. Тогда $y_2 - y_1 = 14$

Тогда

$$-2x + ky = y$$

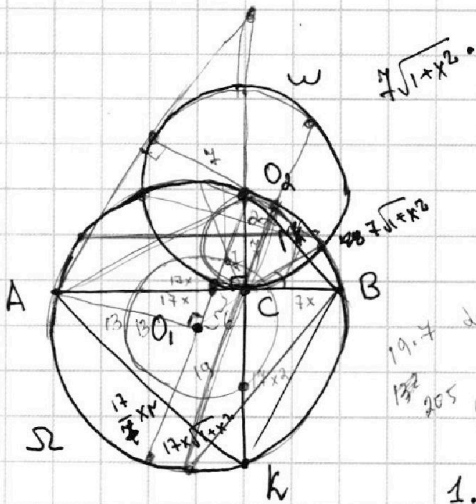
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\Omega(O_1, R)$; $A \in \Omega$, $B \in \Omega$,
 $O_2 \in \Omega$; $w(O_2, r)$; AB —
 кас-ка к w , C — точка касания,
 $AC:CB = 17:7$, $R=13$, $r=7$
 Найти: $[AB]$

Доп. построение:
 Проведем $[O_2C]$ до второго пересечения
 с Ω , получим ~~к~~ точку K

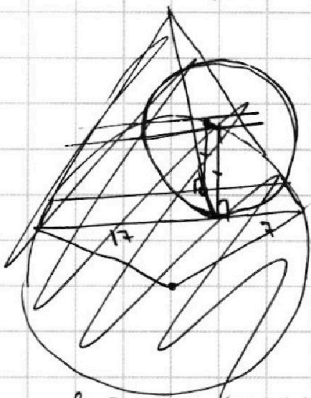
$\Rightarrow \frac{O_2C}{AC} = \frac{BC}{CK} \stackrel{(1)}{=} k \Rightarrow k \cdot O_2C = CA$, $k \cdot BC = CK$ (k — коэффициент подобия)

2. AB — кас-ка к w , C — точка касания $\Rightarrow O_2C \perp AB$ по
 св-ву кас-ной $\Rightarrow O_2C = r = 7$

3. $AC:CB = 17:7 \Rightarrow \frac{CB}{AC} = \frac{7}{17}$

~~$\frac{O_2C}{AC} = \frac{BC}{CK} \Rightarrow \frac{7}{17} = \frac{7 \cdot k}{(17-7) \cdot k}$ по п.1, 2 и 3
 $7k \cdot \left(\frac{7}{17} \cdot 7k\right) = \left(\frac{7}{17} \cdot 7k\right)$~~

4. $O_2C = 7$, $CB = 7x$,
 $AC = 17x \Rightarrow CK = 17x \cdot 2$



5. $O_2B = 7\sqrt{1+x^2}$
 $AK = 17x\sqrt{1+x^2}$
 $BK = x\sqrt{49+289x^2}$
 $AO_2 = \sqrt{19+289x^2}$

$7 \cdot 17 \cdot (1+x^2) + 49 + 289x^2 =$
 $= 24 \cdot (7+17x^2)$
 по 1. Проведем

Будем выбирать точку на w и двигаться ее
 от диаметра O_1O_2 вправо по окружности (влево будет
 то же из симметрии). Заметим, чем правее мы
 движемся точку, тем уменьшается хорда OK