



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже ~~велосипедиста~~ ~~мотоциклиста~~. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = \sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N} \quad \begin{aligned} ab &: 3^{14} \cdot 7^{13}; \\ bc &: 3^{19} \cdot 7^{17}; \\ ac &: 3^{23} \cdot 7^{42}; \end{aligned}$$

Заметим, что для достижения мин. значения  $abc$ , в разложении чисел  $a; b; c$  на простые множ-ли не должны содержаться другие простые числа, кроме 3 и 7, иначе  $abc$  будет не минимальным.

$$\exists a = 3^m \cdot 7^n; \quad \text{где } m, n, R, t, p, s \in \mathbb{Z}; \text{ больше, либо равные } 0.$$
$$b = 3^R \cdot 7^t;$$
$$c = 3^p \cdot 7^s;$$

Тогда  $abc = 3^{m+R+p} \cdot 7^{n+t+s} - \text{min. ?}$

Найти  $\min(m+R+p); \min(n+t+s) - ?$

$$\exists R < 5 \Rightarrow m > 9; p > 14;$$

$$\text{тогда } m+p > 23 \quad ; 23$$

$$\Rightarrow m+p \geq 46$$

$$\Rightarrow m+p+R \geq 46 > 28 \ominus$$

$$m+R : 14;$$

$$R+p : 19;$$

$$m+p : 23;$$

$$n+t : 13;$$

$$t+s : 17;$$

$$n+s : 42;$$

$$\exists R > 5 \quad \text{~~тогда } m > 9; p > 14;~~$$

$$\text{Но тогда } p < 14, \text{ иначе } R+p > 19, \text{ т.е. } R+p \geq 38 > 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R+p+m \geq 38 \quad \ominus \quad \text{Т.к. есть пример на } R+p+m = 28.$$

Значит если  $R > 5; p < 14 \Rightarrow m < 9$ , иначе

$$m+R \geq 15, \text{ т.е. } m+R > 28 \quad \ominus$$

Пример на минимальное  $m+p+R = 28$ :

$$R = 5;$$

$$m = 9;$$

$$p = 14;$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

51.

Значит  $\min(m+p+r) = 28$ .

Пример на  $\min(s+n+t) = 51$ ;  $t=9$ ;  
 $n=17$ ;  
 $s=25$ ;

$\supset s < 25 \Rightarrow$

$n > 17 \Rightarrow n+t \geq 26$ , т.к.  $n+t : 13$ .

~~иначе  $s+t < 34$ , но т.к.  $s+t : 17$~~

Т.к.  $n+t : 13$

~~$s \leq 17$ ;  $\Rightarrow n \geq 25$~~

$n > 17 \Rightarrow n+t \geq 26$

$s+t : 17 \Rightarrow$  Если  $s+t \geq 34$ ,  $n > 17 \Rightarrow s+t+n \geq 34+18 > 51$   $\ominus$

$\ominus s+n+t \geq 17+35 > 51 \leftarrow$  Если  $s+t=17 \Rightarrow s \leq 17$   $\ominus$   
 $\Rightarrow n \geq 25$

$\supset s > 25 \Rightarrow n < 19$ , иначе  $s+n > 42 : 42$ , т.е.  $s+n \geq 84$

$\Rightarrow t+s \geq 34 : 17$ .

т.е.  $s+n+t \geq 84$   $\ominus$

$\Rightarrow n+t+s \geq 18+34=52 > 51$   $\ominus$

$n < 19$

$\Rightarrow \underline{\min(s+n+t) = 51}$ .  $\Rightarrow abc_{\min} = 3^{28} \cdot 7^5$ ;

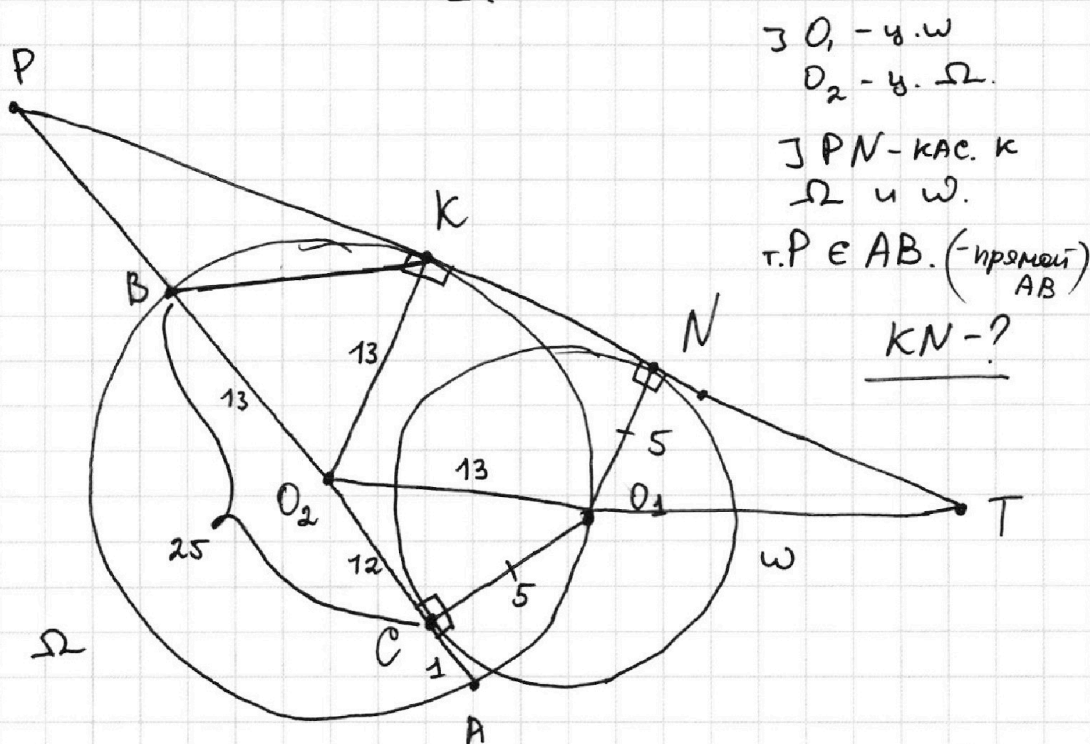
Ответ:  $abc_{\min} = 3^{28} \cdot 7^5$ ;

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



54.



$\exists O_1 - \text{ц. } \omega$   
 $O_2 - \text{ц. } \Omega$   
 $\perp PN - \text{кас. к}$   
 $\Omega \text{ и } \omega$   
 $\text{т. } P \in AB. (-\text{прямой } AB)$   
 $KN - ?$

П.к.  $AB$  - диаметр и  $AB = AC + BC = 26 \Rightarrow R_{\Omega} = \frac{26}{2} = 13$ ;

$\Rightarrow O_2K = O_2B = O_2C = O_2O_1 = 13$ ;  
 (т.к.  $O_2 \in \Omega$ )

П.к.  $O_2A = 13$ ;  $AC = 1 \Rightarrow O_2C = 12$ . , заметим, что

$\Delta O_2CO_1$  - прямоуго. и гипотенуза  $O_1O_2 = 13$ ; катет

$O_2C = 12 \Rightarrow O_1C = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$ ;

$\Rightarrow R_{\omega} = O_1N = O_1C = 5$ ;

П.к.  $PK$  - касательная к  $\Omega$ , а  $PA$  - секущая

$\Rightarrow$  Степень точки  $P$  относит.  $\Omega = PK^2 = PB \cdot (PB + 26)$ ;

П.к.  $PC$  и  $PN$  касательные отрезки к  $\omega$ .

$\Rightarrow PC = PN = PB + 25$ ;

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



√5

$$x, y, z \neq 0;$$

$$(1) 5x - y = 3z; \Rightarrow y = 5x - 3z;$$

$$(2) \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \quad / *xyz$$

$$8zy + xz = 15xy;$$

$$u_3 (1) \quad 8z(5x - 3z) + xz = 15(5x - 3z)x;$$

$$40zx - 24z^2 + xz = 75x^2 - 45zx;$$

$$75x^2 - 86xz + 24z^2 = 0;$$

$$D = 86^2 z^2 - 4 \cdot 24 \cdot 75 z^2 = 196z^2 = 14^2 z^2;$$

$$x_1 = \frac{86z + 14z}{150} = \frac{2}{3}z;$$

$$x_2 = \frac{86z - 14z}{150} = \frac{72}{150}z = \frac{12}{25}z;$$

$$(1en) \quad x = \frac{2}{3}z; \quad u_3 (1) \quad y = 5x - 3z = \frac{10}{3}z - 3z = \frac{1}{3}z;$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{\frac{25 \cdot 4}{9}z^2 - \frac{1}{9}z^2 - z^2}{\frac{1}{9}z^2 + 3z^2} = \frac{100 - 1 - 9}{9} = \frac{28}{9}$$

$$= \frac{90}{28} = \frac{45}{14} = 3 \frac{3}{14};$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{5}$

(2cn)

$$x = \frac{12}{25} z;$$

$$y = 5x - 3z$$

$$y = \frac{60}{25} z - \frac{75}{25} z = -\frac{15}{25} z = -\frac{3}{5} z;$$

$$(*) \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{\frac{144}{25} z^2 - \frac{9}{25} z^2 - \frac{25}{25} z^2}{\frac{9}{25} z^2 + \frac{75}{25} z^2} =$$

$$= \frac{110}{84} = \frac{55}{42} = 1 \frac{13}{42} < 3 \frac{3}{14};$$

$$\Rightarrow \text{Мин. значение } (*) = 1 \frac{13}{42};$$

Ответ:  $1 \frac{13}{42}$ .

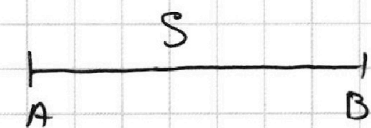
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{6}$   
 $x$  - скорость вел-та (км/ч)  
 $y$  - скорость мот-та (км/ч)  
 $S$  - расстояние от А до В (км)  
 $x, y > 0; S > 0.$

(1)  $Sx + xy = Sy$ ;

п.к.  $\frac{S}{y} + 1 = \frac{S}{x}$ ;

$\frac{S}{y} \cdot x + 49 = \frac{S}{x} y$ ;  $\Rightarrow (2) Sx^2 + 49xy = Sy^2$ ;

$\frac{S}{x+7} = \frac{S}{y+7} + 0,6$ ;  $\Rightarrow (3) Sy + 7S = Sx + 7S + 0,6xy + 4,2(x+y) + 29,4$ ;

из (1)  $49Sx + 49xy = 49Sy$ ;  $\Rightarrow 49S(y-x) = S(y-x) \cdot (x+y)$ ;

из (2)  $Sx^2 + 49xy = Sy^2$ ;

$\Rightarrow 49S = S(x+y) \Rightarrow x+y = 49$ ; тогда  $y = 49 - x$ ;

Тогда из (3)  $Sy = Sx + 0,6xy + 4,2 \cdot 49 + 29,4$ ;

$S(49-x) = Sx + 0,6x(49-x) + 235,2$ ;

$49S - Sx = Sx + 29,4x - 0,6x^2 + 235,2$ ;

$\rightarrow 2Sx = 0,6x^2 - 29,4x + 49S - 235,2$ ;

из (1);  $Sx + x(49-x) = S(49-x)$ ;

$Sx + 49x - x^2 = 49S - Sx$ ;

$\rightarrow 2Sx = x^2 + 49S - 49x$ ;

Тогда  $0,6x^2 - 29,4x - 235,2 = x^2 - 49x$ ;

$0,4x^2 - 19,4x + 235,2 = 0$ ;  $\cdot 10$   
 $-19,6x$

$4x^2 - 196x + 2352 = 0$ ;  $\cdot 2$

$2x^2 - 98x + 1176 = 0$ ;



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{D}$

$$2x^2 - 98x + 1176 = 0;$$

$$D = 98^2 - 8 \cdot 1176 = 196 = 14^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{98 \pm 14}{4}; \quad x_1 = 28; \quad \Rightarrow \quad y_1 = 49 - 28 = 21;$$
$$x_2 = 21; \quad y_2 = 28;$$

Тогда из

$$(1) \quad 28S + 588 = 21S \quad \text{при } x, \text{ и } y_1$$

$$7S = -588 \Rightarrow S < 0 \text{ - Противоречие,}$$

тогда  $x = 21; y = 28 \text{ (км/ч);}$

$$21S + 588 = 28S;$$

$$588 = 7S;$$

$$S = 84 \text{ (км);}$$

Ответ:  $S = 84 \text{ км.}$



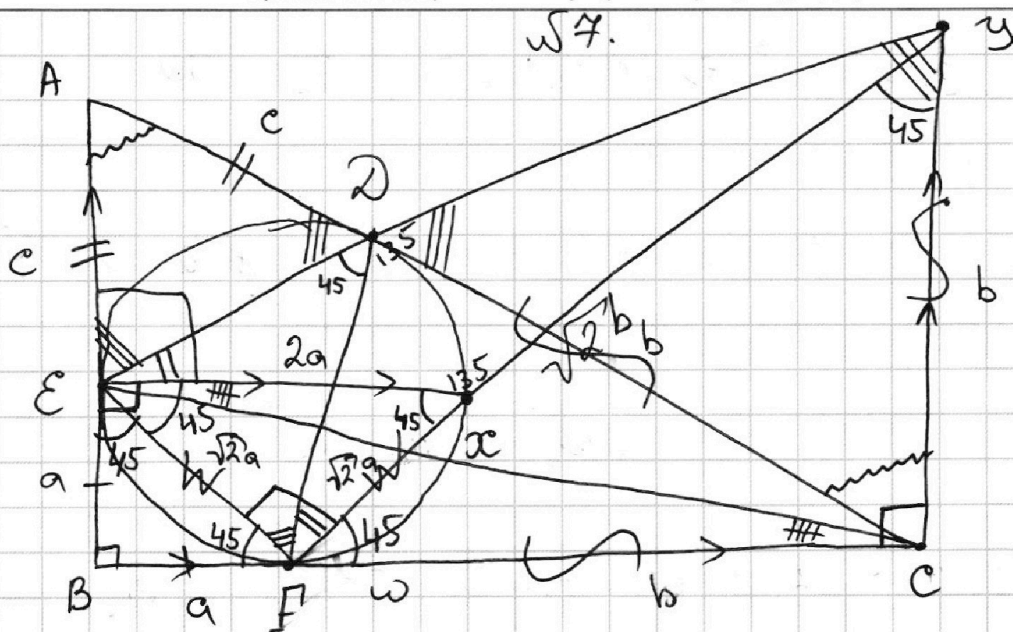
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$EX = \sqrt{2}XY;$$

$$\frac{AD}{DC} = ? \quad \frac{c}{b} = ?$$

П.к. BE и BF - касат. отрезки к ω.

⇒ BE = BF ⇒ ΔEBF - прямоугол. и р/д.

⇒ ∠EBF = ∠EFB = ∠EDF = ∠EXF = 45°.

Т.к. AB и BC - касат.-ые к ω.

и углы опир. на EF.

П.к. ∠DEX = ∠DFX (опир.-ся на DX) ⇒ ΔEXY ~ ΔFDY.  
и ∠FDY = ∠EXY = 135°

$$\Rightarrow \frac{EX}{XY} = \frac{FD}{DY} = \sqrt{2}; \quad \underline{FD = \sqrt{2}DY.}$$

Т.к. AB ⊥ BC и YC ⊥ BC ⇒ AB || YC.

Т.к. AE = AD; FC = CD; ∠AEY = ∠EYC (AB || YC);

∠ADE = ∠CDY (касател. отр.) (верт) ⇒ ΔEAD; ΔDCY; ΔFCD; ΔFCY

- равнобедренные ⇒ FC = CD = CY.

Тогда ΔFCY - прямоугол. и р/д. ⇒ ∠CFY = ∠FCY = ∠FEX = 45° (опир. на FX);

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда  $\angle BEH = 90^\circ \Rightarrow EH \perp AB$ ;  $BC \perp AB$ .  
 $\Rightarrow EH \parallel BC$ .

Тогда  $\angle EFH = 180 - 90 = 90^\circ \Rightarrow \triangle EFH$  - прям. и р/д.  
 $\Rightarrow EF = FH$ ;

$\angle EFD = \angle ADE$ , т.к. опр-ся на  $\widehat{DE}$ .

Заметим, что  $\triangle EAD \sim \triangle DCY \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY}$ ;

т.е.  $\frac{ED}{DY} = \frac{AD}{CY}$ ;  $\frac{ED}{DY} = \frac{c}{b}$ ;

Д-тб:  $EC = c$ , тогда  $CD$  - бис-са в  $\triangle ECY$

$\Rightarrow \frac{ED}{DY} = \frac{c}{b}$ ;

Для  $\triangle ABC$  по Т. Пифагора:

$$a^2 + 2ac + c^2 + a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2bc + b^2$$

$$a^2 + ac + ab = bc;$$

$$ec^2 = a^2 + a^2 + 2ab + b^2;$$

$$\text{Д-тб: } c^2 = 2a^2 + 2ab + b^2;$$

$$EH^2 = EF^2 + FH^2 = 2EF^2 = 2(a^2 + a^2) = 4a^2$$

$$EH = 2a \Rightarrow xy = \sqrt{2} \cdot 2a$$



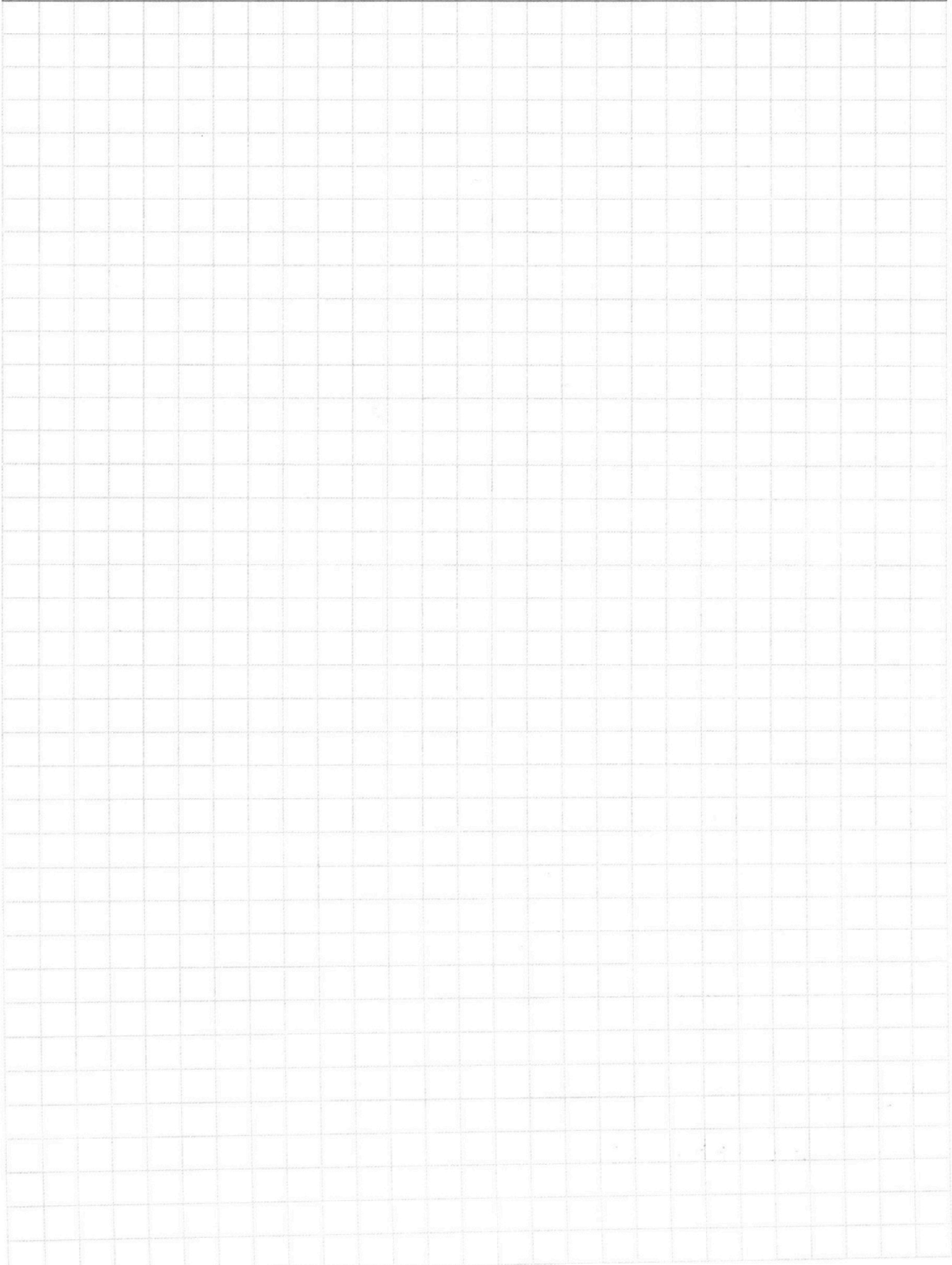
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{N}$

~~$ab = 13$~~

$ab : 3^{14} 7^{13}$

~~$abc$  - знак ?~~

$a+b$

$bc : 3^{19} 7^{17}$

~~$abc : 3^{23} 7^{42}$~~

$a^2 - 9ab + b^2 ;$

$ac : 3^{23} 7^{42}$

$(a; b) = 1$

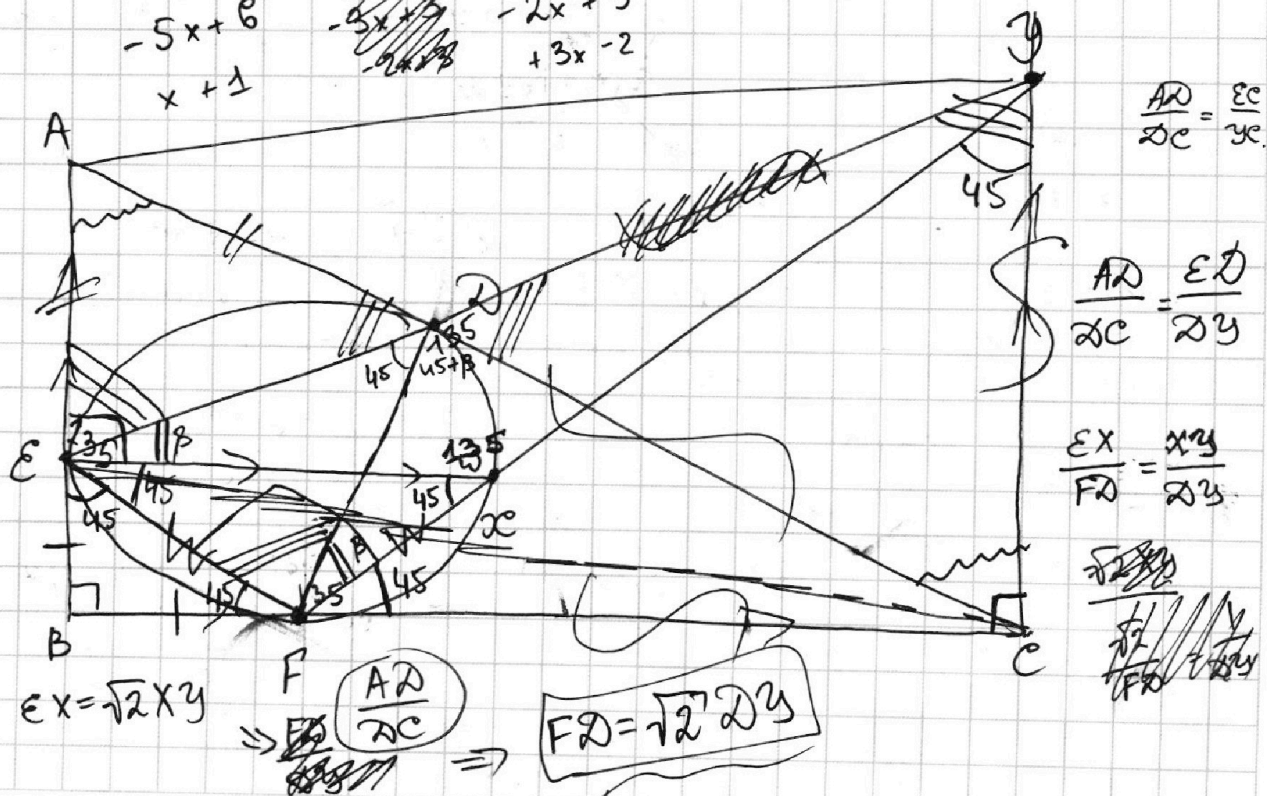
МАНУС ?

$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x;$

$3x^2 - 5x + 6 - 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} + 3x^2 + x + 1 = 25 - 12x + 36x^2;$

$2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} = -30x^2 + 56x - 18;$

~~$-5x + 6$~~   
 ~~$x + 1$~~   
 ~~$-5x + 3$~~   
 ~~$-2x + 3$~~   
 ~~$+3x - 2$~~



$EX = \sqrt{2} \cdot XY$

$\Rightarrow \frac{AD}{DC}$

$\Rightarrow FD = \sqrt{2} \cdot DY$

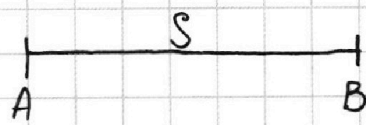
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

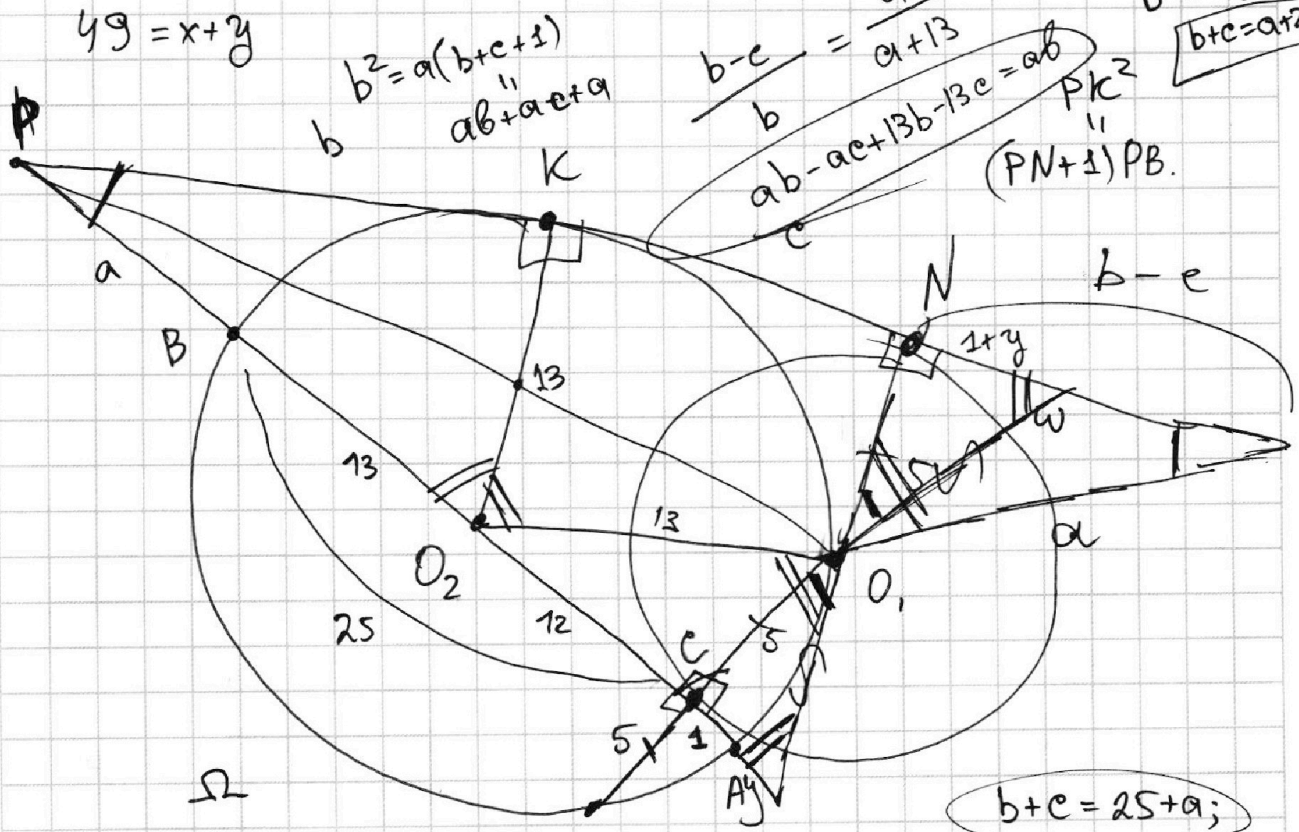
- 1  2  3  4  5  6  7

**МОФИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{6}$   
 $v_B$  - скорость велосипедиста. (км/ч)  
 $v_M$  - скорость мотоциклиста. (км/ч)  
 $S$  - расстояние от А до В (км)



$49 = x + y$

$b^2 = a(b+c+1)$   
 $ab + ac + a$

$\frac{b-c}{b} = \frac{a}{a+13}$

$b^2 = a(26+a)$   
 $b+c = a+25$

$ab - ac + 13b - 13c = ab$   
 $(PN+1)PB$

$\Omega$   
 $x, y, z \neq 0$

$5x - y = 3z$

$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$

$8zy + xz = 15xy$

$25x^2 - 10xy + y^2 = 9z^2$

$25x^2 - y^2 - z^2 = 8z^2 + 10xy$

Нашли.  
 $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$

$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$

$b+c = 25+a$

$a(26+a) = b^2$

$26a + a^2 = b^2$

$a(26+a) = b^2$

$b = \sqrt{a(26+a)}$

$\sqrt{a(26+a)} + c = 25+a$

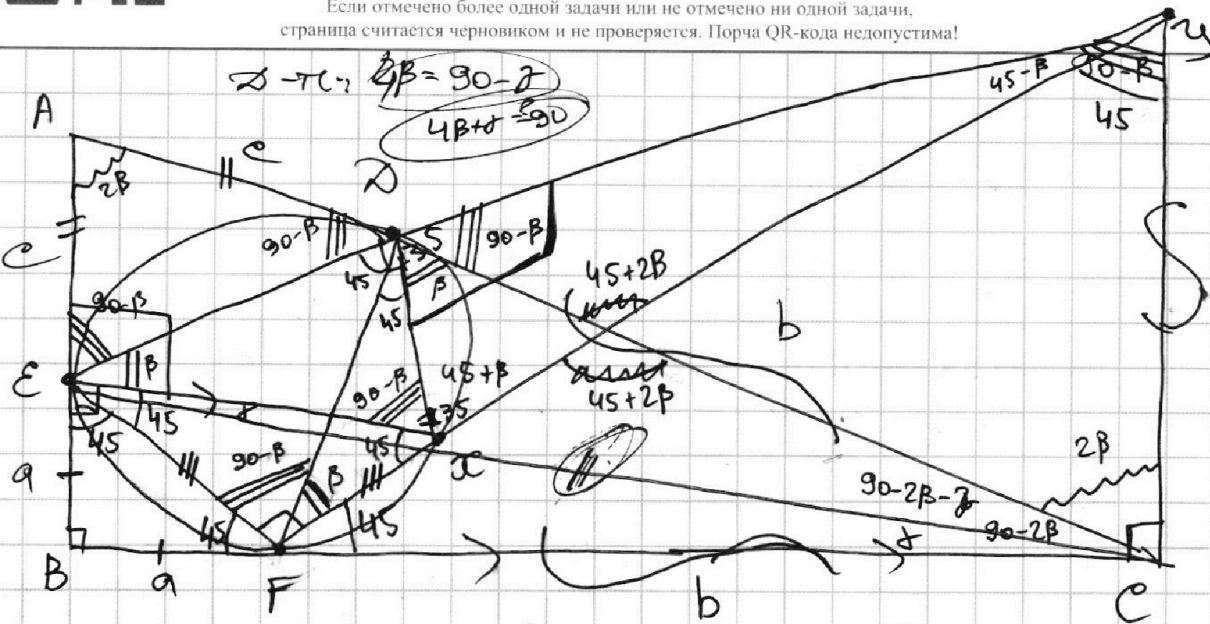
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$EX = \sqrt{2} \cdot XY \Rightarrow FD = \sqrt{2} \cdot DY;$

$\{EF = FX\}$

EX-гипотенуза

$\frac{AD}{DC} = ? \quad a^2 + ab = c(b-a)$   
 $c = \frac{a^2 + ab}{b-a}$   
 $\frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY} ?$

$DY \cdot YE = XY \cdot FY$

$\frac{FD}{\sqrt{2}} \cdot YE = \frac{EX}{\sqrt{2}} \cdot FY$

$FD \cdot YE = EX \cdot FY$

$EX \cdot FD = EF(ED + DX)$

$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}$

$(a, b) = 1$

m-НАИД.

что  $a^2 - 9ab + b^2 : m$

$a+b : m$

$2a^2 = 4a^2$   
 $2a^2 = 4a^2$   
 (a+c)

$a^2 - 9ab + b^2 \equiv a+b$

$a^2 + b^2 \equiv 9ab + a + b$

m-MAX

$\frac{0}{3} \frac{1}{-}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ - \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

|   |   |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 0 |
| 4 | 7 |
| 5 | 7 |
| 6 | 0 |
| 7 | 4 |
| 8 | 1 |
| 9 | 0 |

$a^2 + a^2 + 2ab + b^2 = c^2$

$a^2 + 2ac + c^2$   
 $+ a^2 + 2ab + b^2$

$c^2 + 2bc + b^2$

$2a^2 + 2a(bc) = 2bc$   
 $a^2 + ab + ac = bc$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~8/11/1~~

$$S_x + xy = S_y$$

$$S_x^2 + 49xy = S_y^2$$

$$S_y + 7S = S_x + 7S + 0,6xy + 4,2x + 4,2y + 29,4$$

~~$S_y = 49S_x = 186,28$~~   
 ~~$y = 49x = 186,28$~~

$$49S_y - 49S_x = S_y^2 - S_x^2$$

$$49(y-x) = (y-x)(x+y)$$

$$49 = x+y$$

$$49 = x+y$$

$$y = 49 - x$$

$$D = 98^2 - 8 \cdot 1176$$

$$S_y = S_x + 0,6xy + 4,2 \cdot 49 + 29,4$$

$$S_y = S_x + 0,6xy + 235,2$$

$$\begin{array}{r} 98 \\ \times 98 \\ \hline 784 \\ 882 \\ \hline 9604 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1176 \\ \times 8 \\ \hline 9408 \end{array}$$

$$9408$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 588 \\ \times 7 \\ \hline 4116 \end{array}$$

$$S(49-x) = S_x + 0,6x(49-x) + 235,2$$

$$49S - S_x = S_x + 29,4x - 0,6x^2 + 205,8$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 28 \\ \hline 168 \\ 420 \\ \hline 588 \end{array}$$

$$98 + 14$$

$$\frac{112}{4}$$

$$28$$

$$28 \cdot 4$$

$$49S = 2S_x + 28,8x$$

~~$S_x + 49x - x^2 = 49S$~~

$$4S = x - 20,2$$

$$4S_x = x^2 - 20,2x$$

$$2S_x + 49S = 28,8x$$

$$2S_x - 49S = x^2 - 49x$$

$$S_x + x(49-x) = S(49-x)$$

$$S_x + 49x - x^2 = 49S - S_x$$

$$2S_x = x^2 + 49S - 49x$$

$$2S_x = 28,8x - 49S$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{S}{v_M} + 1 = \frac{S}{v_B}$$

$$\frac{S}{v_M} \cdot v_B + 49 = \frac{S}{v_B} \cdot v_M$$

$$\frac{S}{v_B + 7} = \frac{S}{v_M + 7} + \frac{36}{60} \text{ "0,6"}$$

$$49 \cdot 0,6 = \frac{v^2 \cdot 6}{10} = \frac{49 \cdot 6}{20 + 5,4}$$

$$\frac{49}{20} \cdot \frac{6}{20} = \frac{4,9 \cdot 6}{20 + 5,4}$$

S-?

$$S \cdot v_B + v_B \cdot v_M = S \cdot v_M$$

$$S v_B^2 + 49 v_M \cdot v_B = S \cdot v_M^2$$

$$S v_M + 7S = S v_B + 7S$$

$$+ 0,6 v_M \cdot v_B$$

$$+ 4,2 v_M + 4,2 v_B$$

$$+ 29,4$$

$$S v_M = S v_B + 0,6 v_M v_B + 4,2 v_M$$

$$+ 4,2 v_B + 29,4$$

$$49 v_M v_B = 49 S v_M - 49 S v_B$$

$$49 v_M v_B = S v_M^2 - S v_B^2$$

$$49 S v_M + S v_B^2 = 49 S v_B + S v_M^2$$

$$49 S (v_M - v_B) = S (v_M - v_B) (v_M + v_B)$$

$$49 = v_M + v_B$$

$$v_B = 49 - v_M$$

$$\begin{array}{r} 2352 \overline{) 1176} \\ \underline{915} \phantom{00} \\ 14 \phantom{00} \\ \underline{12} \phantom{00} \end{array}$$

~~$$49 S - S v_M + 49 v_B$$~~

$$S(49 - v_M) + (49 - v_M) v_M = S v_M$$

$$49 S - S v_M + 49 v_M - v_M^2 = S v_M$$

$$49 S = v_M^2 + 2 S v_M - 49 v_M$$

$$49 \cdot 4 = 196$$

$$v_M^2 + v_M(2S - 49) - 49S; \quad (2S - 7)(2S + 7)$$

$$v_{M,2} = \frac{49 - 2S \pm \sqrt{4S^2 - 196S + 49^2 + 196S}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 0,44^2 \phantom{00} \\ \phantom{0,44^2} 1176 \\ \phantom{0,44^2} \underline{220} \\ \phantom{0,44^2} \phantom{00} 152 \end{array}$$

$$-196 \times$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{N}$ .

$abc$  - мин.

$ab : 3^{14} 7^{13};$

$bc : 3^{19} 7^{17};$

$ac : 3^{23} 7^{42};$

$a = 3^m \cdot 7^n$

$b = 3^R \cdot 7^t$

$c = 3^P \cdot 7^s$

$abc = 3^{m+R+P} \cdot 7^{n+t+s}$

Тогда чтобы  $abc$  было мин нужно чтобы

$ab = 3^{14} \cdot 7^{13}$

$bc = 3^{19} \cdot 7^{14}$

$ac = 3^{23} \cdot 7^{42}$

$m+R = 14;$

$R+P = 19;$

$m+P = 23;$

$n+t = 13$

$t+s = 17$

$n+s = 42$

$2(t+n+s) = 72$

$t+n+s = 36$

$2(m+R+P) = 56$

$m+R+P = 28$

~~Тогда~~

$m+R : 14$   
 $R+P : 19$   
 $m+P : 23$

$\min(m+R+P) = 28$

~~9 5~~  
~~5 14~~  
~~9 14~~

$R < S$

Тогда  $m > 9$

$P < 14$

Тогда  $P+R < 19$

Противоречие.

Тогда

$abc = 3^{28} \cdot 7^{36}$

$3^{28} \cdot 7^{36}$

$m+R : 14$   
 $R+P : 19$   
 $m+P : 23$

$R < S \Rightarrow m > 9$   
 $\Rightarrow P > 14$

Тогда  $m+P > 23$

$S < 25$   
 $n > 17$

$t > 9$   
 $n+t > 26 \Rightarrow n+t \geq 29$   
 $S_{\min} = 24$

Ответ:

$28$   
 $37$

$R > S$   
 $m > 7$   
 $P > 16$   
 $m+P > 23$

$t = 9$   
 $n = 17$   
 $s = 25$

~~2 2 9~~  
~~1 8~~  
~~8 2 9~~

$n+t : 13$   
 $t+s : 17$   
 $n+s : 42$

$\min(n+t+s) = ?$   
 $17+25+9 = 51$

$n+t+s < 52$

3

$28$   
 $37$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x, y, z \neq 0$$

Наши. знае.

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = ?$$

$$5x - y = 3z; \quad y = 5x - 3z$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z};$$

$$8zy + xz = 15xy;$$

$$8z(5x - 3z) + xz = 15x(5x - 3z);$$

$$40xz - 24z^2 + xz = 75x^2 - 45xz;$$

$$75x^2 + 24z^2 - 96xz = 0$$

$$75x^2 - 96xz + 24z^2 = 0;$$

$$D = 96^2 - 4 \cdot 75 \cdot 24$$

$$D = 96^2 - 4 \cdot 75 \cdot 24 = 196z^2 = 14^2 z^2$$

$$x_1 = \frac{86z - 14z}{150} = \frac{72z}{150} = \frac{36z}{75} = \frac{12z}{25}$$

$$x_2 = \frac{100z}{150} = \frac{2}{3}z;$$

$$144 - 34$$

$$\frac{110}{84}$$

$$\begin{array}{r} 96 \\ \times 75 \\ \hline 7200 \\ 125 \\ \hline 7200 \\ 50 \\ \hline 7250 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 86 \\ \times 86 \\ \hline 1516 \\ 688 \\ \hline 7396 \end{array}$$

len  $x = \frac{12}{25}z$

$$y = 5x - 3z = \frac{60}{25}z - 3z = 2\frac{10}{25}z - 3z = -\frac{15}{25}z = -\frac{3}{5}z$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25 \cdot \frac{144}{625}z^2 - \frac{9}{25}z^2 - z^2}{\frac{9}{25}z^2 + 3z^2} = \frac{144 - 9 - 25}{25} \cdot \frac{z^2}{z^2} = \frac{100}{25} = 4$$

14  
28  
42