МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 25\right)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 1.

Заметим, что в разложении чисел a, в, c на простые для минимизации произведения должны быть только числа 2, 3 и 5 в некоторых степенях. Если встретится другое простое число p ~~можно~~ в разложении, например, числа a, можно, не нарушая условий задачи, выбрать число $\frac{a}{p}$ — таким образом произведение уменьшится.

Итак, пусть
$$a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}$$
$$b = 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}$$
$$c = 2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}\cdot 5^{\gamma_3}$$

$$\left.\begin{aligned} ab &= 2^{\alpha_1+\alpha_2}\cdot 3^{\beta_1+\beta_2}\cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2} \;\vdots\; 2^6\cdot 3^{13}\cdot 5^{11} \\ bc &= 2^{\alpha_2+\alpha_3}\cdot 3^{\beta_2+\beta_3}\cdot 5^{\gamma_2+\gamma_3} \;\vdots\; 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{13} \\ ac &= 2^{\alpha_1+\alpha_3}\cdot 3^{\beta_1+\beta_3}\cdot 5^{\gamma_1+\gamma_3} \;\vdots\; 2^{16}\cdot 3^{25}\cdot 5^{28} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 \geq 6 \\ \alpha_2+\alpha_3 \geq 14 \\ \alpha_1+\alpha_3 \geq 16 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \beta_1+\beta_2 \geq 13 \\ \beta_2+\beta_3 \geq 21 \\ \beta_1+\beta_3 \geq 25 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \gamma_1+\gamma_2 \geq 11 \\ \gamma_2+\gamma_3 \geq 13 \\ \gamma_1+\gamma_3 \geq 28 \end{cases}$$

$$abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}\cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}$$

abc будет наименьшим, когда простые множители, на которые это число разложено, входят в наименьших степенях. Из ранее выписанных систем следует!

$2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \geq 36$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 18$

$2(\beta_1+\beta_2+\beta_3) \geq 59$

$\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq \frac{59}{2} = 29\frac{1}{2}$

но $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$

$\beta_1; \beta_2; \beta_3 \geq 0$

Поэтому наим. возм. значение $\beta_1+\beta_2+\beta_3$ равно 30.

$2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) \geq 52$

$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geq 26.$

Заметим, что $\gamma_1+\gamma_3 \geq 28 \Rightarrow$

$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geq 28$

Итак, $abc \geq 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$. Равенство достигается, например для чисел $a = 2^4\cdot 3^9\cdot 5^{14}$; $b = 2^2\cdot 3^5\cdot 5^0$; $c = 2^{12}\cdot 3^{16}\cdot 5^{14}$.

Ответ: $2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 2^{28}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x.$ $\cancel{9\pi - 2x}$ (1)

$0 \le \arccos(\sin x) \le \pi$; $0 \le 10\arccos(\sin x) \le 10\pi$

Значит, для равенства необходимо условие:

$0 \le 9\pi - 2x \le 10\pi$; $-9\pi \le -2x \le \pi$;

$-\frac{9\pi}{2} \le -x \le \frac{\pi}{2}$

$-4\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le \pi.$

Сделаем замену: $y = \frac{\pi}{2} - x.$

Заметим, что ~~sin(x)~~ $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x.$

Значит, $\sin x = \cos y.$

$x = \frac{\pi}{2} - y$; $9\pi - 2x = 9\pi - 2(\frac{\pi}{2} - y) =$

$= 9\pi - \pi + 2y = 8\pi + 2y.$

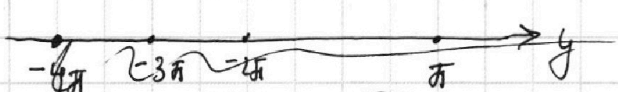
$-4\pi \le y \le \pi.$ Ур-е принимает вид:

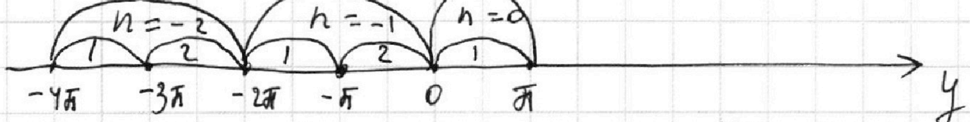
$10\arccos(\cos y) = 8\pi + 2y.$

Заметим теперь, что ~~со~~ $\arccos(\cos y) = \left[\cancel{y - 2\pi n, y \in [2\pi n, \pi + 2\pi n)} \right.$

$\arccos(\cos y) = \left[\begin{array}{l} y - 2\pi n, \ y \in [2\pi n; \pi + 2\pi n) \\ 2\pi - y + 2\pi n, \ y \in [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n) \end{array} \right.$, $n \in \mathbb{Z}.$

В нашем случае $y \in [-4\pi; \pi]$. Посмотрим, на какие промежутки вида $[2\pi n; \pi + 2\pi n)$; $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$ делится отрезок, в котором изменяется y.





В маленьких дугах, отмеченных на прямой покажем, по какой формуле в данном промежутке считается $\arccos(\cos(y))$: 1 – если $\arccos(\cos y) = y - 2\pi n$; 2 – если

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\arccos(\cos y) = 2\pi - y + 2\pi n$. В больших дугах покажем, при каком n получится ~~нужный~~ нужное значение. (2)

Итак, теперь перейдём к решению ур-я. Рассмотрим несколько случаев:

1) $y \in [-4\pi; -3\pi)$. $10\arccos(\cos y) = 10(y+4\pi)$;
$10(y+4\pi) = 8\pi + 2y$; $10y + 40\pi = 8\pi + 2y$; $8y = -32\pi$;
$y = -4\pi$; — удовл. условиям. Продолжим.

2) $y \in [-3\pi; -2\pi)$
$10\arccos(\cos y) = 10(2\pi - y \cancel{+} 4\pi) = 10(\cancel{6\pi} - y)$ (-2π)
~~$10(6\pi - y) = 8\pi + 2y$; $60\pi - 10y = 8\pi + 2y$; $12y = 52\pi$~~
~~$y = \frac{52\pi}{12} > 0$, но $y < -2\pi < 0$ — противоречие.~~
~~3) $y \in$~~
$10(-2\pi - y) = 8\pi + 2y$; $-20\pi - 10y = 8\pi + 2y$
$12y = -28\pi$; $y = -\frac{7}{3}\pi = -2\frac{1}{3}\cdot\pi \in [-3\pi; -2\pi)$ — удовл. усл.

3) $y \in [-2\pi; -\pi)$; $10\arccos(\cos(y)) = 10(y + 2\pi)$
$10(y+2\pi) = 8\pi + 2y$; $10y + 20\pi = 8\pi + 2y$; ~~$8y$~~ $8y = -12\pi$; $y = -\frac{3}{2}\pi$

4) $y \in [-\pi; 0)$; $10\arccos(\cos y) = 10(2\pi - y \cancel{+} 2\pi) = -10y$.
$-10y = 8\pi + 2y$; $12y = -8\pi$; $y = -\frac{2}{3}\pi$

5) $y \in [0; \pi)$; $10\arccos(\cos y) = 10y$
$10y = 8\pi + 2y$; $y = \pi$. Этот корень не удовл. промежутку $[0; \pi)$, но, ~~в граничных точках~~ если подставить это число в ур-е, оно обратится в верное равенство. Поэтому $y = \pi$ — корень.

Итак, $y = -4\pi; -\frac{7}{3}\pi; -\frac{3}{2}\pi; -\frac{2}{3}\pi; \pi$. Сделаем обратную замену и получим ответ:
$x = \frac{\pi}{2} - y$; $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} + \frac{7}{3}\pi = \frac{17}{6}\pi$;
$x = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi = 2\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi = \frac{7\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$; 2π; $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{9\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2

2) $a \neq 0$. ~~Т.к.~~ Наша прямая имеет с окружностями 4 общие точки для 4 решений системы. Это возможно только в том случае, когда наша прямая пересекает каждую из окружностей в 2 точках (т.к. прямая и окр. пересекаются не более, чем в 2 точках).

Тогда обе системы

$(1) \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 5x+6ay-b=0 \end{cases}$ и $(2) \begin{cases} x^2+(y+9)^2=4 \\ 5x+6ay-b=0 \end{cases}$

имеют 2 ~~решения~~ различных решения.

$(1) \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x=-\frac{6a}{5}y+\frac{b}{5} \end{cases}$; $\left(-\frac{6a}{5}y+\frac{b}{5}\right)^2+y^2=25 \mid \cdot 25$

$\cancel{(-6ay)^2}$ $(-6ay+b)^2+25y^2=625$;

$36a^2y^2-12aby+b^2+25y^2=625$

$y^2(36a^2+25)-12aby+(b^2-625)=0$.

Заметим, что это квадратное ур-е должно иметь 2 реш-я: предположим, что оно не более, чем ~~одно~~ одно y_0. Тогда

$5x+6ay_0-b=0$ имеет не более 1 решения $\Rightarrow$ система имеет не более одного решения.

Тогда $(12ab)^2-4(36a^2+25)(b^2-625)>0 \mid :4$

$\cancel{144a^2b^2}$ $36a^2b^2-36a^2b^2+625\cdot 36a^2 \cancel{+} -25b^2+25\cdot 625>0$

$25b^2 < 36\cdot 625a^2-25\cdot 625 \mid :25$

$b^2 < 36\cdot 25a^2-625$.

Итак, должно существовать такое b, ~~что это~~ ~~об~~ ~~нер~~ при котором это нер-во верно $\Rightarrow 36\cdot 25a^2-625>0$

$36a^2>25$; $\left[\begin{array}{l} a>\frac{5}{6} \\ a<-\frac{5}{6} \end{array}\right.$

$(2) \begin{cases} x^2+(y+9)^2=4 \\ x=-\frac{6a}{5}y+\frac{b}{5} \end{cases}$ $\left(-\frac{6a}{5}y+\frac{b}{5}\right)^2+(y+9)^2=4 \mid \cdot 25$

$(-6ay+b)^2+(5y+45)^2=100$

$36a^2y^2-12aby+b^2+25y^2+\cancel{225}\,450y+2025=100$

$\cancel{36}\cdot y^2(36a^2+25)+y(-12ab+450)+1925+b^2=0$

Предположим, это ур-е имеет не более одного корня ~~y_0~~.

Тогда ур-е $x=-\frac{6a}{5}y_0+\frac{b}{5}$ имеет ~~один корень~~ $\Rightarrow$ ~~система~~ ~~имеет~~ не более одного корня, как и система. А нужно 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

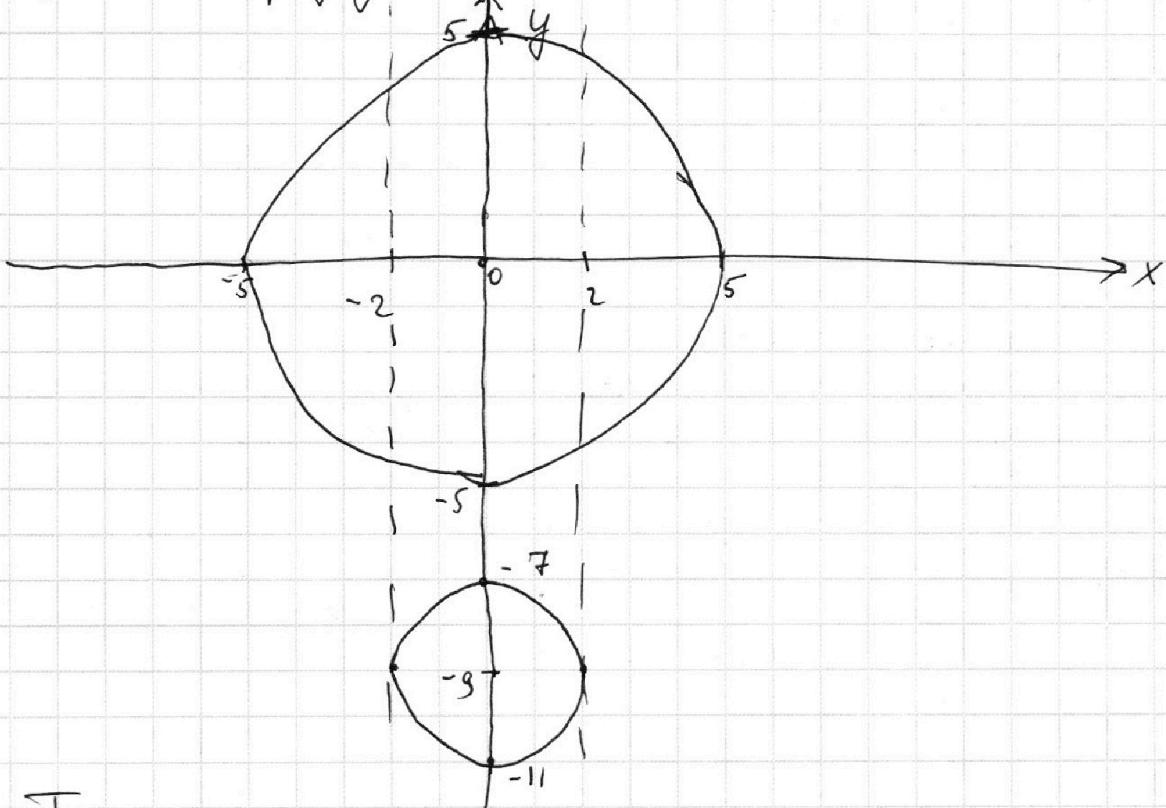
1

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases}$$

Пока займёмся вторым ур-ем:

$$(x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \iff \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+(y+9)^2=4 \end{array}\right.$$

Оба ур-я совокупности задают окр.: первое – с центром $(0,0)$ и радиусом 5, а второе – с центром $(0;-9)$ и радиусом 2.



Теперь становится ясно, что прямая $5x+6ay-b=0$ должна пересекать наши окружности в 4 точках – тогда система имеет 4 решения. Рассмотрим несколько случаев:

1) $a=0$. $x=\frac{b}{5}$ – это прямая, параллельная оси $0y$. Она имеет с нашими окружностями 4 общие точки, когда

$$-2 < \frac{b}{5} < 2 \text{ (иначе – 2, 3, 1 или 0)}$$

$-10 < b < 10$. Итак, для $a=0$ $\exists b$ такое, что система имеет 4 решения.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

корня. Тогда $\cancel{(-12ab+450)^2-4(36a^2+25)(1925>0}$ 3

$(-12ab+450)^2-4(36a^2+25)(1925+b^2)>0 \;|:4$

$(-6ab+225)^2-(36a^2+25)(b^2+1925)>0$

$36a^2b^2-12\cdot225ab+225^2-36a^2b^2-36\cdot1925a^2-25b^2-25\cdot1925>0$

$-12\cdot225ab+225^2-36\cdot1925a^2-25b^2-25\cdot1925>0$

$-12\cdot9ab+9\cdot225-36\cdot77a^2-b^2-\cancel{19}\ \cancel{25}\ 77\cdot25>0$

$36\cdot77a^2+12\cdot9ab+b^2-100<0$

Должно существовать b, при котором это нер-во верно. Тогда квадратный трёхчлен относительно b должен иметь 2 корня, т.к. $\cancel{36\cdot77}>0$. Значит,

$\cancel{(12\cdot9b)^2-4\cdot36\cdot77(b^2-100)>0 \;|:16}$

$\cancel{(3\cdot9b)^2-9\cdot77(b^2-100)>0 \;|:9}$

$\cancel{81b^2-77b^2+7700>0}$ это нер-во

$(12\cdot9a)^2+4\cdot100\cdot36\cdot77a^2>0$ – это верно $\forall a\neq0$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2 №5.

1) $\log_{11}^4 x - 6\log_{11} x = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$ $x>0, x\neq 1$

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\log_{11} x} - 5 \;\Big|\cdot 3\log_{11} x$

$3\log_{11}^5 x - 18 = -2 - 15\log_{11} x$

$3\log_{11}^5 x + 15\log_{11} x - 16 = 0$

2) $\log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3}(11^{-13}) - 5$

$y\neq 2;\ y>0$

$\log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11} 0,5y} = -\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{\log_{11} 0,5y} - 5 \;\Big|\cdot 3\log_{11} 0,5y$

$3\log_{11}^5(0,5y) + 15\log_{11} 0,5y + 16 = 0$

Пусть $u = \log_{11} x$; $v = \log_{11} 0,5y$.

$\begin{cases}3u^5 + 15u - 16 = 0\\ 3v^5 + 15v + 16 = 0\end{cases}$ $\quad 3(u^5+v^5) + 15(u+v) = 0 \;|:3$

$(u^5+v^5) + 5(u+v) = 0$

$(u+v)(u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4 + 5) = 0$

1) $u+v=0$.

$\log_{11} x + \log_{11} 0,5y = 0$

$\log_{11} 0,5xy = 0$; $0,5xy = 11$; $xy = 22$.

2) $u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4 + 5 = 0$

$u^4 + v^4 + 5 - uv(u^2 - uv + v^2) = 0$

Р-м ф-ю $f(u) = u^5 + 5u + v^5 + v$; $f'(u) = 5u^4 + 5 > 0 \;\forall u \Rightarrow$

$f(u)\nearrow \Rightarrow$ не более 1 решения относительно u.

Это решение $u=-v$. В этом случае показано, что $xy=22$.

Ответ: 22.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5. 1

$x>0,\ x\ne1$

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$. Преобразуем это выр-е.

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11}x} = -\frac{2}{3}\cancel{\log}\cdot\frac{1}{\log_{11}x} - 5 \mid\cdot 3\log_{11}x,$

$x\ne1 \Rightarrow \log_{11}x\ne0$

$3\log_{11}^5 x - \cancel{6}\,18 = -2 - 15\log_{11}x$

$\log_{11}^5 x + 15\log_{11}x - 16 = 0$. ~~Заметим, что log~~

Пусть $\log_{11}x = t$; $t^5+15t-16=0$.

Заметим, что $t=1$ - корень. Заметим, что других корней быть не ~~мог~~ может, т.к. $f(t)=t^5+15t-16$ - возрастающая ф-я. Покажем это: $f'(t)=5t^4+15>0 \Rightarrow$ $f(t)$ - возрастает. Итак, $\log_{11}x=1$; $x=11$.

Займемся ~~вторым~~ выражением:

$y>0,\ y\ne2$

$\log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y}11 = \log_{0,125y^3}(11^{-13}) - 5$.

$\log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11}0,5y} = -\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{\log_{11}(0,5y)} - 5$.

Пусть ~~0,5y~~ $\log_{11}0,5y = u$, $u\ne0$, т.к. $y\ne2 \Rightarrow$ $0,5y\ne1 \Rightarrow \log_{11}0,5y\ne0$.

$u^4 + \frac{1}{u} = -\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{u} - 5 \mid\cdot 3u$

$3u^5+3=-13-15u$; $3u^5+15u+16=0$;

Пусть $f(u)=3u^5+15u+16$; $f'(u)=15u^4+15>0\ \forall u \Rightarrow$ $f(u)\nearrow\ \forall u\in\mathbb{R} \Rightarrow$ $3u^5+15u+16=0$ имеет не более 1 корня.

~~$3u^5+15u+16=0$~~

~~$t^5+15t-16=0$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6.

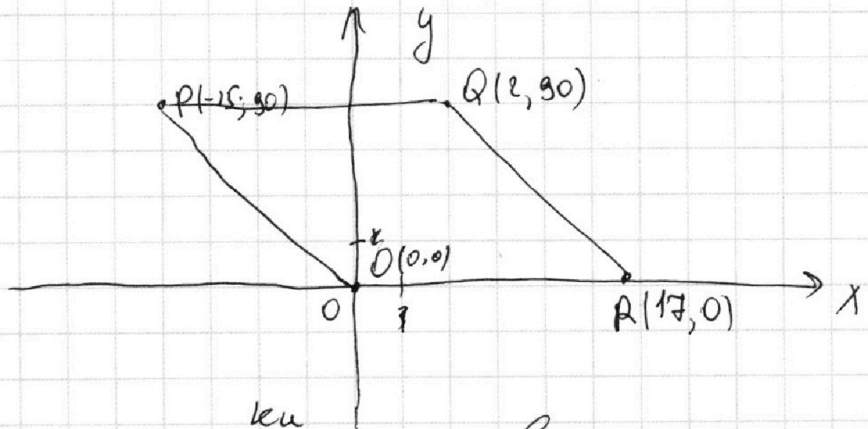
$6(x_2-x_1)+y_2-y_1=48$

~~Пусть $x_2-x_1=x$; $y_2-y_1=y$.~~

~~$6x+y=48$. Из этого следует, что все точки, удовл. условию, лежат на прямой $6x+y=48$.~~

~~Заметим, что все пары точек, которые удовлетворяют условию, лежат на прямой $6x+y=48$.~~

~~Заметим, что все пар точки $X(x_2-x_1; y_2-y_1)$ такие, что $A(x_1,y_1)$; $B(x_2;y)$ — иско лежат на прямой $6x+y=48$. $y=-6x+48$~~

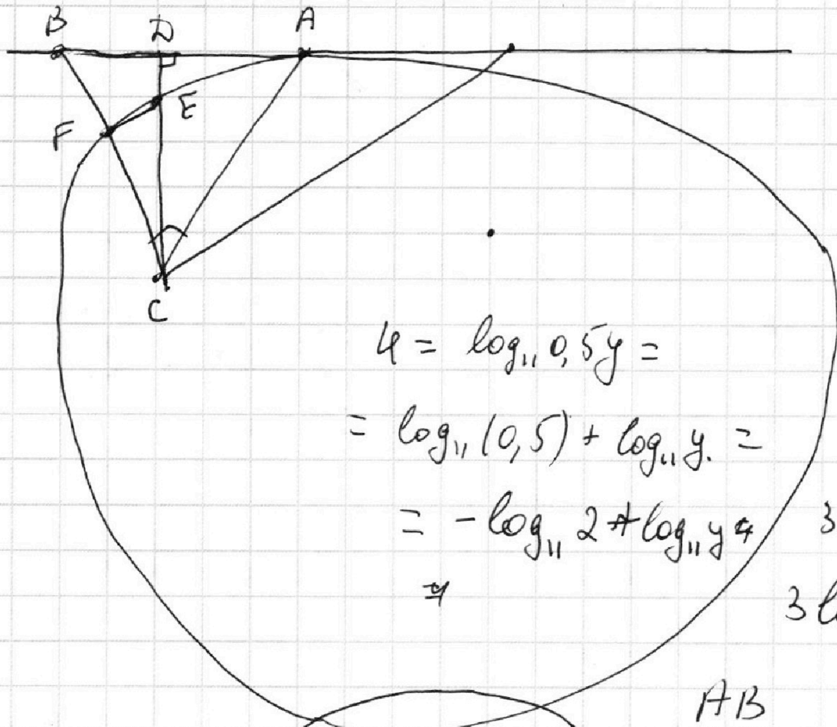


Т.к. ~~пары~~ точки лежат внутри параллелограмма, их координаты удовлетворяют условию:

$$\begin{cases} 0\le y\le 90 \\ y\ge -6x4 \\ y\le -6x+102 \end{cases}$$

~~Пусть точки $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ такие, что $6(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=48$~~

МФТИ



$x > 0$

$x \neq 1$

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 =$

$= \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 =$

$= -\frac{2}{3}\log_x 11 - 5 \,|\cdot 3$

$u^4 + \frac{1}{u} = -\frac{13}{3u} - 5 \,|\cdot 3u$

$3u^5 + 15u + 16 = 0$

$3\log_{11}^5\frac{y}{2} + 15\log_{11}\frac{y}{2} + 16 = 0$

$4 = \log_{11} 0{,}5y =$

$= \log_{11}(0{,}5) + \log_{11} y =$

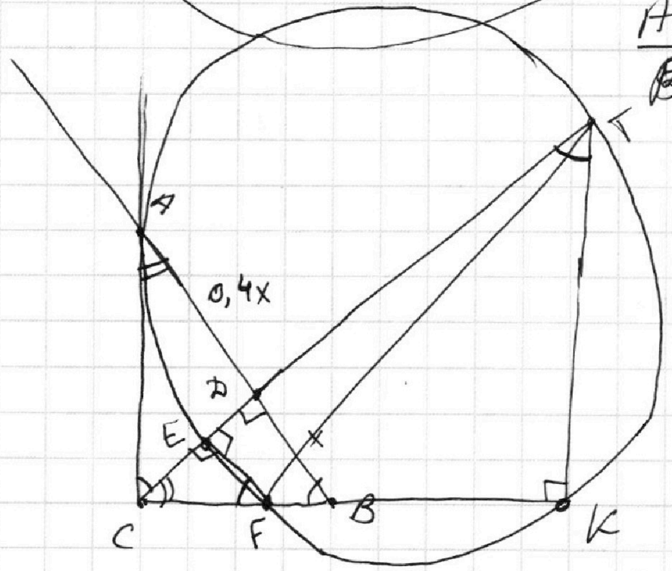
$= -\log_{11} 2 + \log_{11} y$

$\frac{AB}{BD} = 1{,}4$

$BD = x$

$AC^2 = CF \cdot CK$

$\frac{CK}{AD} =$



$3\log_{11}^4 x - 16\log_x 11 + 15 = 0$

$\log_{0,5y} 11 = \frac{1}{\log_{11} 0{,}5y}$

$\frac{AD\cdot CD}{CE\cdot EF}$

$\log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3}(11^{-13}) - 5$

$\log_{(0,5y)^3}(11^{-13}) - 5 = -\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{\log_{11}0{,}5y} - 5$

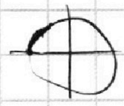
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(x_2, y_2) (x_1, y_1)



№3.

$$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$\begin{cases} 0 \le \frac{9\pi - 2x}{10} \le \pi \\ \sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right); \end{cases}$$

$$0 \le 9\pi - 2x \le 10\pi$$

$$-9\pi \le -2x \le 10\pi - 9\pi$$

$$\frac{9\pi - 10}{2} \le x \le \cancel{\frac{9\pi}{2}}\pi$$

$$\cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \cos\left(\frac{10\pi - \pi - 2x}{10}\right) =$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi - 2x}{10}\right) = -\cos\frac{\pi - 2x}{10}.$$

$\cancel{\sin x =}$ $x - 2\pi n$

$\cancel{\sin x = \sin(\pi - x}$

$\cos(\frac{\pi}{2} - x)$

$\cancel{\frac{9\pi - 10}{2} - 2\pi n}$

$$\sin x = \cos\frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$-\frac{9\pi}{2} \le -x \le \frac{\pi}{2}$$

$$-4\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le \pi$$

$$0 \le 10\arccos(\sin x) \le 10\pi$$

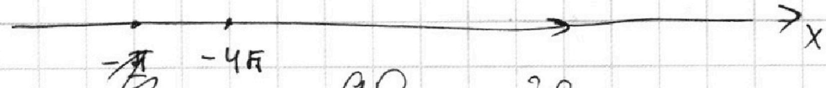
$$0 \le 9\pi - 2x \le 10\pi$$

$$-9\pi \le -2x \le \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{9\pi}{2}$$

$$10\arccos(\sin x) = 10\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) =$$

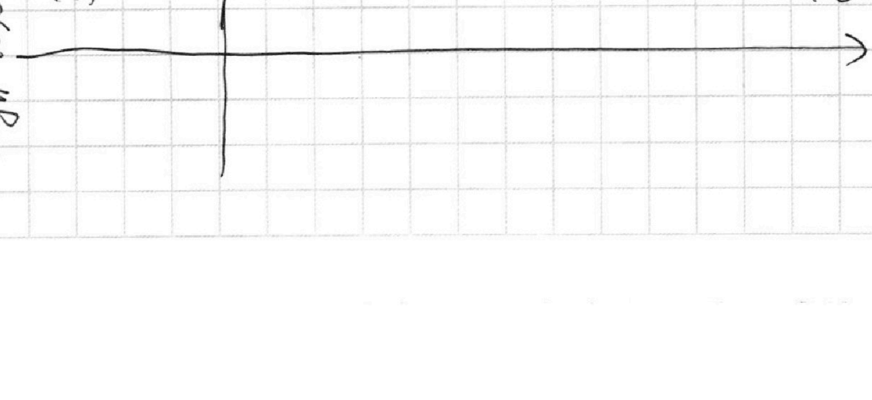
10



$$-\frac{90}{15} = -\frac{30}{5} = -6$$

$90|5$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 6 \\ \hline 102 \end{array}$$



$$\log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3}(11^{-13}) - 5$$

$$\log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = -\frac{13}{3}\log_{0,5y} 11 - 5$$

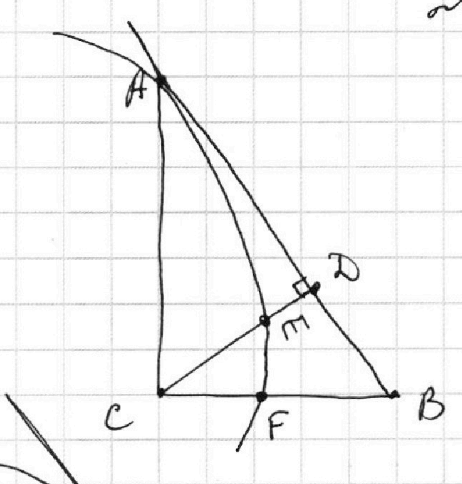
$$3\log_{11}^4(0,5y) + 16\log_{0,5y} 11 + 5 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

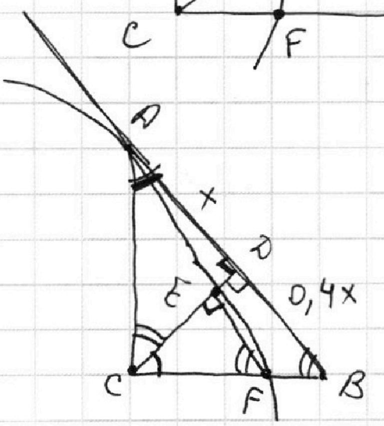
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.



$AB \parallel EF$

$\frac{AB}{AD} = 1,4$ $\qquad \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} - ?$



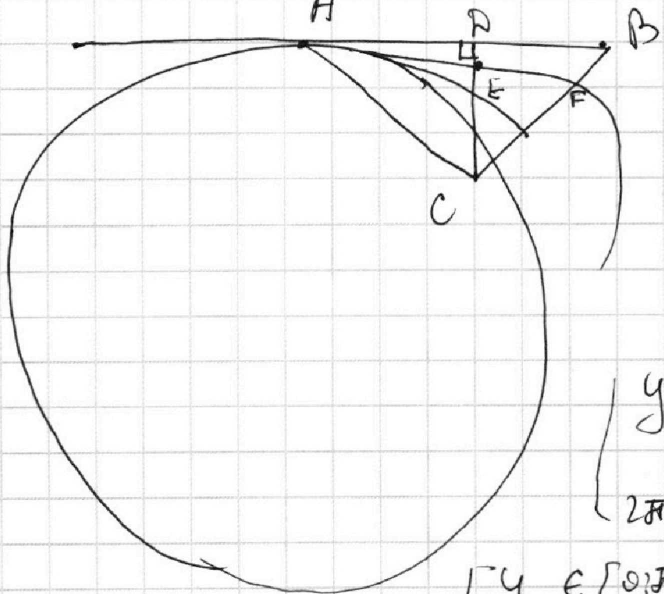
$\cancel{S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot EF}$

S

$AD \; x$

1: $y - 2\pi n$

2: $2\pi - y + 2\pi n$



$\left\{ \begin{array}{l} y - 2\pi n \\ \quad [2\pi n; \pi + 2\pi n] \\ 2\pi - y + 2\pi n \end{array} \right.$

$\arccos(\cos y) = \left[\begin{array}{l} y \in [0; \pi] \\ 2\pi - y \in [\pi; 2\pi] \end{array} \right.$

$-3\pi \leq y \leq -2\pi \qquad 2\pi \leq -y \leq 3\pi$

$\cancel{-\pi \leq 2\pi} - y \qquad 4\pi \leq 2\pi - y \leq 6\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1.

$ab \vdots 2^6 3^{13} 5^{11}; \quad bc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{13}; \quad ac \vdots 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

$abc \to \min.$

$a = 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1}$
$b = 2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} 5^{\gamma_2}$
$c = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} 5^{\gamma_3}$

$abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}$.

$\alpha_1, \alpha_2 \le 6$

$\alpha_1 + \alpha_2 = 6$
$\alpha_2 + \alpha_3 = 14$
$\alpha_1 + \alpha_3 = 16$

$2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = 36$
$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 18.$

$\alpha_3 = 12$
$\alpha_1 = 4$
$\alpha_2 = 2.$

$13 + 21 + 25 = 59$

$11 + 13 + 28 = 52$

$24 + 28 = 52$

$29\frac{1}{2}$

$29 \times 2 = 58$

$52 : 2 = 26$

$4 + 2 + 12 = 16$
$9 + 5 + 17 = 31$

$16 + 9 = 25$

$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$
$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$
$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$

$\log_{11}(0{,}5y) =$
$= (\log_{11} 0{,}5 + \log_{11} y)$

$abc = 2^{16} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

$ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14}$
$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14}$
$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

$xy = ?$

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5 \\ \log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}(11^{-13}) - 5 \end{cases}$$

$\frac{2}{3}$ $\cancel{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

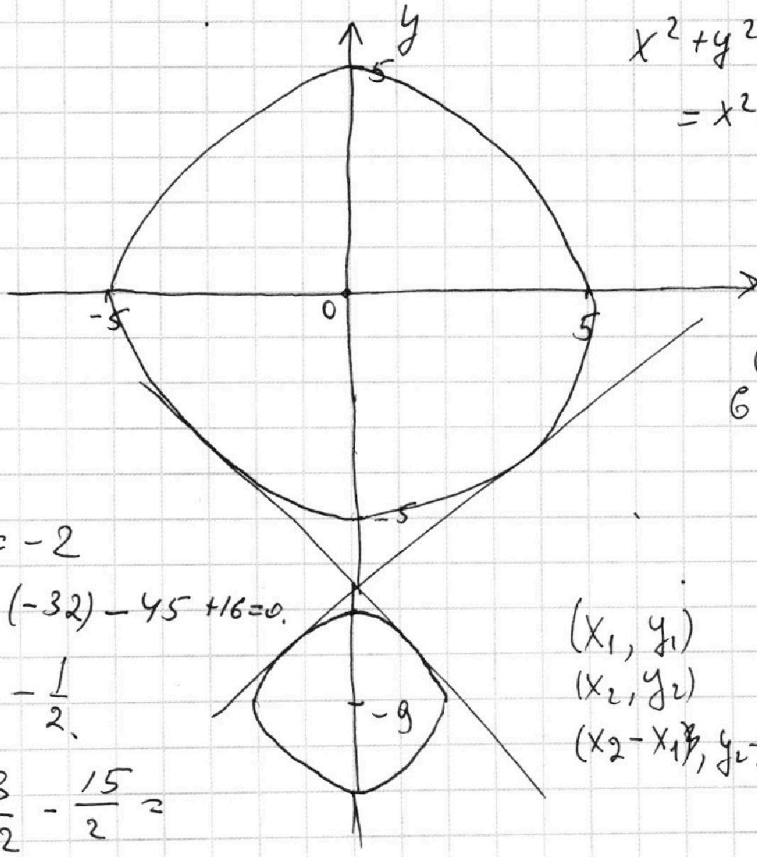
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5x + 6ay - b = 0.$

$\cancel{3u^5 + 15u + 16}$

$a = 0$

$x = \frac{b}{5}.$



$x^2 + y^2 + 18y + 77 =$

$= x^2 + (y+9)^2 - 4$

$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$

$6(x_2 + x_1) + (y_2 + y_1) = 48$

$u = -2$

$3 \cdot (-32) - 45 + 16 = 0.$

$u = -\frac{1}{2}.$

$-\frac{3}{32} - \frac{15}{2} =$

$= -\frac{\quad}{32}$

(x_1, y_1)

(x_2, y_2)

$(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$45 \times 5 = 225$

45×45: 225, 180, 2025

$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}.$

$y = \cancel{-kx + k}$

$450 : 2 = 225$ (−4, 5, −4, 10)

16×15: 80, 16, 240

$1925 : 25 = 77$ (−175, 175)

$25 \times 9 = 225$

$25 \times 7 = 175$

$225 \times 9 = 2025$

25

$15 = 5 \cdot 3$