МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, $bc$ делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, $ac$ делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник $ABC$. Окружность, касающаяся прямой $BC$ в точке $B$, пересекает высоту $CD$, проведённую к гипотенузе, в точке $F$, а катет $AC$ – в точке $E$. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника $ABC$ к площади треугольника $CEF$.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа $x$ и $y$ удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения $xy$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы $AA_1, BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Сфера $\Omega$ касается ребра $AS$ в точке $L$ и касается плоскости основания пирамиды в точке $K$, лежащей на отрезке $AM$. Сфера $\Omega$ пересекает отрезок $SM$ в точках $P$ и $Q$. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника $ABC$ равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан $AA_1, BB_1$ и $CC_1$.

б) Найдите двугранный угол при ребре $BC$ пирамиды, если дополнительно известно, что $\Omega$ касается грани $BCS$ в точке $N$, $SN = 4$, а радиус сферы $\Omega$ равен 5.

Задача №1

$ab \vdots 2^{9} 3^{10} 5^{10}$; $bc \vdots 2^{11} 3^{13} 5^{13}$; $ac \vdots 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

Перемножив получаем: $a^2b^2c^2 \vdots 2^{42} 3^{41} 5^{53}$

$a, b, c$ – натуральные числа $\Rightarrow (abc)^2$ – квадрат натурального числа ⇒

т.к. квадрат делится только на четные степени, то

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{42} 3^{42} 5^{54} \Rightarrow abc \vdots 2^{21} 3^{21} 5^{27}$

Заметим $ac \vdots 2^{19} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow ac \vdots 5^{30} \Rightarrow abc \vdots 5^{30} \Rightarrow$

$\Rightarrow abc \vdots 2^{21} 3^{21} 5^{30}$.

Наименьшее возможное значение $abc$, при $abc \vdots 2^{21} 3^{21} 5^{30}$, это $abc = 2^{21} 3^{21} 5^{30}$. Несложно построить пример таких чисел $a, b, c$:

$$\left.\begin{aligned} a &= 2^{7} \cdot 3^{7} \cdot 5^{13} \\ b &= 2^{2} \cdot 3^{3} \\ c &= 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{17} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} ab &= 2^{9} \cdot 3^{10} \cdot 5^{13} \vdots 2^{9} 3^{10} 5^{10} \quad ✓ \\ bc &= 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{13} \vdots 2^{14} 3^{13} 5^{13} \quad ✓ \\ ac &= 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \vdots 2^{19} 3^{18} 5^{30} \quad ✓ \end{aligned}$$

Такие числа $a, b, c$ – подходят $\Rightarrow abc_{min} = 2^{21} 3^{21} 5^{30}$ – наименьшее возможное значение произведения $abc$.

Ответ: $abc_{min} = 2^{21} 3^{21} 5^{30}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №3

$$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

По формуле приведения $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

тогда

$$5\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5}{2}\pi - 5x = x + \frac{1}{2}\pi$$

$$\frac{4}{2}\pi = 6x$$

$$2\pi = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

Проверка: $\cos x = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

$$\arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$5\arcsin(\cos x) = 5\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = 5\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 5\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

$\frac{5}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$ – подходит

Ответ: $x = \frac{\pi}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

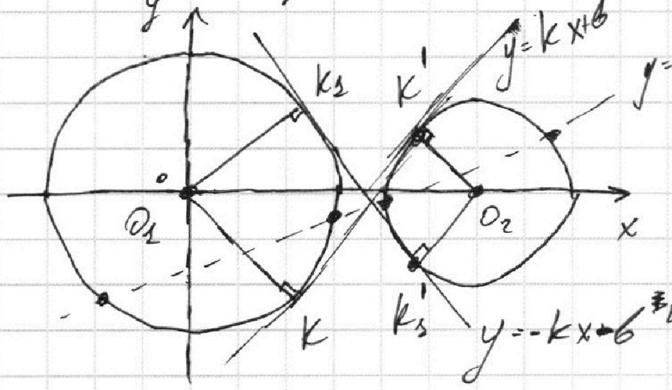
МФТИ

Задача №4

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \to 2y=-ax+3b \to y=-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

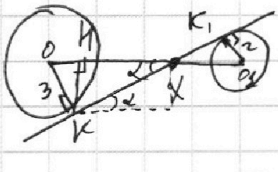
$$\begin{cases} y=-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b \leftarrow \text{у-е прямой} \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-9=0 \to x^2+y^2=3^2 \leftarrow \text{у-е окружности} \\ x^2+y^2-12x+32=0 \to (x-6)^2+y^2=2^2 \leftarrow \text{у-е окружности} \end{array}\right. \end{cases}$$

Построим график совокупности (две окружности)




т.к. симметрия относительно оси OX.

Получается, искомое значение $a$, будет таким, что $-k<-\frac{a}{2}<k \Rightarrow -2k<a<2k$, найдем значение $k$.




$OO_1=6$, $OO_1 \cap KK_1 \to$ т. X.

Из подобия $\frac{OX}{O_1X}=\frac{OK}{O_1K_1}=\frac{3}{2} \Rightarrow OX=\frac{3}{5}OO_1=3{,}6$

По т. Пифагора $KX^2=OX^2-OK^2=3{,}6^2-3^2=6{,}6\cdot0{,}6=0{,}6^2\cdot11$

$KH=\frac{KO\cdot KX}{OX}=\frac{3\cdot0{,}6\sqrt{11}}{3{,}6}=\frac{\sqrt{11}}{2}$, по т. Пифагора $HX^2=KX^2-KH^2$

$HX^2=0{,}36\cdot11-0{,}25\cdot11=0{,}11\cdot11=1{,}1^2 \Rightarrow HX=1{,}1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$k$ - коэф. наклона, $k = tg\alpha = \frac{kH}{HX} = \frac{0,5\sqrt{11}}{1,1} = \frac{5\sqrt{11}}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$

Тогда возвращаясь выше $-2k < a < 2k$ получаем

$-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$ ← итоговый ответ

Ответ: $-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$

2/2

Задача №5

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2\log_{25y^2} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\log_x 3 - \frac{5}{2}\log_x 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4 5y + 2\log_{5y} 3 - \frac{11}{2}\log_{5y} 3 + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4 5y - \frac{7}{2}\log_{5y} 3 + 8 = 0 \to \left(-\log_3 \frac{1}{5y}\right)^4 - \frac{7}{2}(-1)\log_{\frac{1}{5y}} 3 + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 \left(\frac{1}{5y}\right) + \frac{7}{2}\log_{\frac{1}{5y}} 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 + 8 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что если $x$ - решение у-я $\log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 + 8 = 0$, то $\frac{1}{5y} = x$, $y = \frac{1}{5x}$ ← решение у-я $\log_3^4\left(\frac{1}{5y}\right) + \frac{7}{2}\log_{\left(\frac{1}{5y}\right)} 3 + 8 = 0$.

Рассмотрим у-е $\log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 + 8 = 0$., $x > 0$, $x \neq 1$

Введем замену: $\log_3 x = t \Rightarrow \log_x 3 = \frac{1}{t}$
$x \neq 1 \Rightarrow t \neq 0$

$t^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t} + 8 = 0 \;|\cdot t \neq 0$.

$t^5 + 8t + \frac{7}{2} = 0. \Rightarrow t^5 + 8t = -\frac{7}{2}$

$(t^5 + 8t)' = 5t^4 + 8 > 0 \Rightarrow$ ф-я $t^5 + 8t$ - возрастающая и она будет иметь всего одну точку пересечения с прямой $y = -\frac{7}{2}$

$\Rightarrow$ существует всего одно решение уравнения $\log_3^4 x + \frac{7}{2}\log_x 3 + 8 = 0$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Получается существует всего одно такое число $x$, а всего одно такое число $y$, что они удовлетворяют равенствам и по ранее описанному между ними выполняется равенство $x = \frac{1}{5y} \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$ ← ответ

Всего одно возможное значение произведения $xy$

Ответ: $xy = 0{,}2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №6

$O(0;0)$; $P(-14;42)$; $Q(6;42)$; $R(20;0)$

Введем для каждой точки с целочисленными координатами функцию $f(x,y)$, где $x,y$ - координаты точки

$f(x,y)=3x+y$, тогда выразив $y$ получаем

$y=-3x+f(x,y)$

По условию $3x_2-3x_1+y_2-y_1=33=f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)$

Заметим, что если у точек $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ одинаковые значения $f(x;y)$, то они лежат на одной прямой, обобщив получаем что все точки лежащие на прямой $y=-3x+f(x,y)$ имеют значение функции $f(x,y)$ (одинак.)

~~Посчит~~ Заметим сторона $OP$ лежит на прямой $y=-3x$

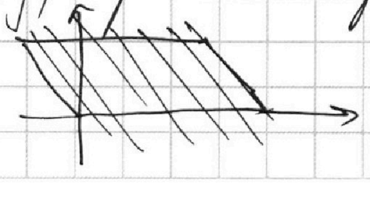
Значит у точек на границе $f(x,y)=0$. (на стор. $OP$)

Сторона $RQ$ лежит на прямой $y=-3x+60$ $\Rightarrow$

у точек на стороне $RQ$ $f(x,y)=60$.

~~Вы~~ Проведем прямые $y=-3x+f(x,y)$, где

$f(x,y)$ - принимает значение от 0 до 60.



Посчитаем кол-во точек на каждой из прямых

1/2

На прямых, у которых $f(x,y) \vdots 3$ будет лежать по 15 точек, а на остальных по 14 точек.

Найдем количество пар точек для которых выполняется $f(x_2,y_2) - f(x_1;y_1) = 33$

Решения будут: $33-0$; $34-1$; $35-2$; ...; $59-26$; $60-27$.

Всего 28 пар $f(x;y)$ из которых 10 будут состоящих из $f(x,y) \vdots 3$

Тогда кол-во пар точек будет $18 \cdot 14^2 + 10 \cdot 15^2 =$
$= 5778$. ← ответ

Ответ: 5778 пар точек

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

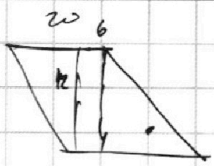
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!




33

42

-14

14

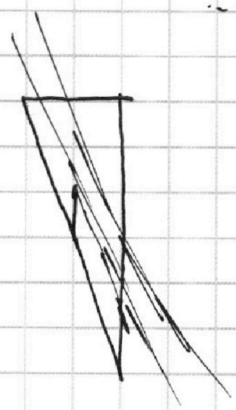
12

$f(x) = 3x+$

$f(x,y) = 3x+y$

$y = -3x + f(x,y)$

$y = -3x$



0;0

1

2

$\boxed{15}$

42; 10; 13

0; 13

14 точек

60

$\boxed{-3x+60}$

15; 0

14; 1

14; 2

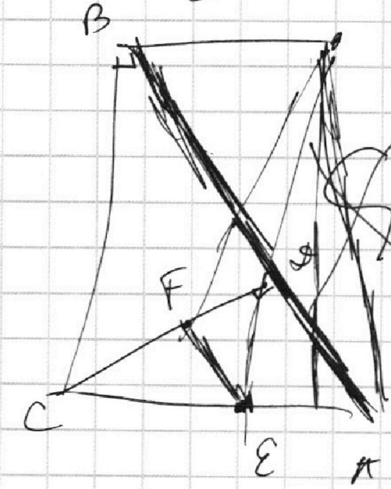
$-3x + 1\ 70$

0+33; 3+30; 6+27; 9+24;

$12 \cdot 15^2 + 34 \cdot 14^2$

225
12
2450
225
2700

196 × 14
784
588
2700
9364



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

черновик

$$\begin{array}{r} 196 \\ \times\ 18 \\ \hline 1568 \\ 196\phantom{0} \\ \hline 3528 \\ +\ 2250 \\ \hline 5778 \end{array}$$