



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №1

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}; bc: 2^{11} 3^{13} 5^{13}; ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

Пирамочки получаем: $a^2 b^2 c^2: 2^{42} 3^{53} 5^{53}$

a, b, c - натуральные числа $\Rightarrow (abc)^2$ - квадрат натурального числа?

т.к. квадрат числа можно разложить на четные степени, то

$$a^2 b^2 c^2: 2^{42} 3^{53} 5^{53} \Rightarrow abc: 2^{21} 3^{27} 5^{27}$$

Заметим $ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow ac: 5^{30} \Rightarrow abc: 5^{30}$

$$\Rightarrow abc: 2^{21} 3^{27} 5^{30}$$

Наименьшее возможное значение abc , при $abc: 2^{21} 3^{27} 5^{30}$, это

$abc = 2^{21} 3^{27} 5^{30}$. Неясно построить пример таких чисел a, b, c :

$$a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{13} \quad \left. \begin{array}{l} ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{13} \\ bc = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{13} \\ ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{array} \right\} : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{13} \quad W$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3 \quad \left. \begin{array}{l} bc = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{13} \\ ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{array} \right\} : 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{13} \quad W$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{17} \quad \left. \begin{array}{l} bc = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{13} \\ ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{array} \right\} : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \quad W$$

Значит числа a, b, c - не существуют $\Rightarrow abc_{\min} = 2^{21} 3^{27} 5^{30}$

Наименьшее возможное значение произведения abc .

Ответ: $abc_{\min} = 2^{21} 3^{27} 5^{30}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

По формуле приведения $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

тогда

$$5 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5}{2}\pi - 5x = x + \frac{1}{2}\pi$$

$$\frac{4}{2}\pi = 6x$$

$$2\pi = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

Проверка: $\cos x = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

$$\arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$5 \arcsin(\cos x) = 5 \arcsin\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) = 5 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

$$\pi + x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

$$\frac{5}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi - \text{подходит}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3}$.

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

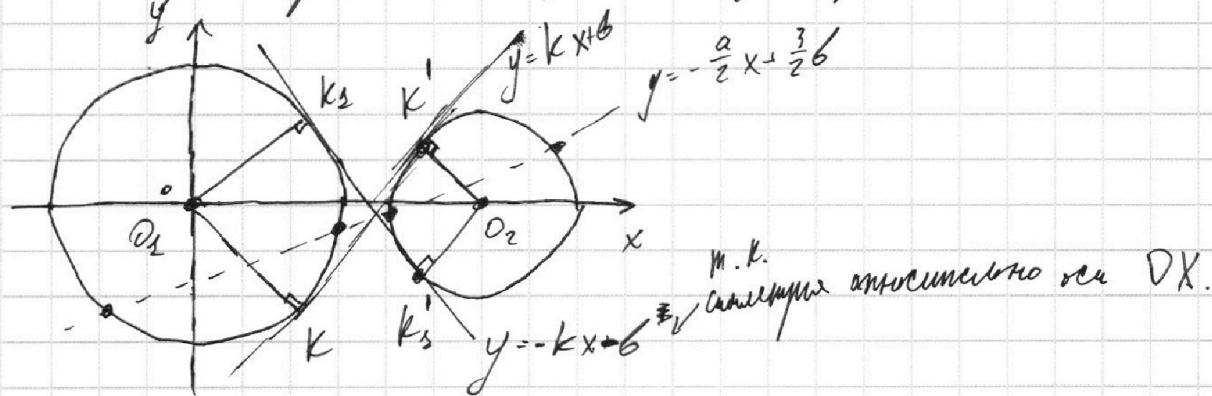


Задача 4

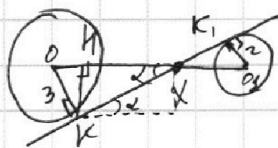
$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \rightarrow 2y = -ax + 3b \rightarrow y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \leftarrow y\text{-е прямой} \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = 3^2 \leftarrow y\text{-е окружности} \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \rightarrow (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \leftarrow y\text{-е окружности} \end{cases}$$

Построим график совокупности (две окружности)



Получаем на искомое значение a , будет видно, что $-k < -\frac{a}{2} < k \Rightarrow -2k < a < 2k$, найдем значение k .



$OO_1 = 6$, $OO_1 \perp KK_2 \rightarrow m. X$.

Из подобия $\frac{OX}{O_2X} = \frac{OK}{O_2K_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow OX = \frac{3}{5}OO_1 = 3,6$

По м. Пифагора $KX^2 = OX^2 - OK^2 = 3,6^2 - 3^2 = 6,6 \cdot 0,6 = 0,6^2 \cdot 11$

$KH = \frac{KO \cdot KX}{OX} = \frac{3 \cdot 0,6 \sqrt{11}}{3,6} = \frac{\sqrt{11}}{2}$, по м. Пифагора $HX^2 = KX^2 - KH^2$

$HX^2 = 0,36 \cdot 11 - 0,25 \cdot 11 = 0,11 \cdot 11 = 1,1^2 \Rightarrow HX = 1,1$ 1/2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$k\text{-крат. наклона, } k = \tan \alpha = \frac{kH}{HX} = \frac{0,5\sqrt{11}}{1,2} = \frac{5\sqrt{11}}{11 \cdot 11} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

Поскольку возмущая \sin $-2k < a < 2k$ \cos α

$$-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}} \leftarrow \text{интервал ответа}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$$

2/2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 15

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y}^2 (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 - \frac{50}{2} \log_x 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 - \frac{11}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4 5y - \frac{7}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0 \rightarrow (-\log_3 \frac{1}{5y})^4 - \frac{7}{2}(-1) \log_{\frac{1}{5y}} 3 + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 (\frac{1}{5y}) + \frac{7}{2} \log_{\frac{1}{5y}} 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что если x -решение y -а $\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0$,

то $\frac{1}{5y} = x$, $y = \frac{1}{5x}$ — решение y -а $\log_3^4 (\frac{1}{5y}) + \frac{7}{2} \log_{\frac{1}{5y}} 3 + 8 = 0$.

Рассмотрим y -е $\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0$, $x > 0$, $x \neq 1$

Введем замену: $\log_3 x = t \Rightarrow \log_x 3 = \frac{1}{t}$
 $x \neq 1 \Rightarrow t \neq 0$

$$t^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t} + 8 = 0 \quad | \cdot t \neq 0$$

$$t^5 + 8t + \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow 2t^5 + 8t = -7$$

$(2t^5 + 8t)' = 10t^4 + 8 > 0 \Rightarrow$ ф-я $2t^5 + 8t$ — возрастательная и

она будет иметь всего одну точку пересечения с прямой $y = -\frac{7}{2}$

\Rightarrow существуют всего одно решение уравнения $\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0$.

1/2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Получается существует всего одно такое число x , и
всего одно такое число y , что они удовлетворяют
равенствам и по ранее описанной методике
выполняется равенство $x = \frac{1}{5y} \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$ ← ответ
Всего одно возможное значение произведения xy
Ответ: $xy = 0,2$.

2/2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6/

$$O(0;0); P(-14;42); Q(6;42); R(20;0)$$

Введем для каждой точки с целочисленными координатами
функцию $f(x,y)$, где x,y - координаты точки

$$f(x,y) = 3x + y, \text{ тогда выразив } y \text{ получаем}$$

$$y = -3x + f(x,y)$$

$$\text{По условию } 3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

Заметим, что если у точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) одинаковые
значения $f(x,y)$, то они лежат на одной прямой,

обобщив получаем что все точки лежащие на прямой

$$y = -3x + f(x,y) \text{ имеют одинаковые значения функции } f(x,y) \text{ (однаковая)}$$

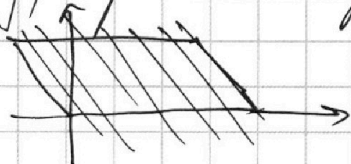
Поэтому заметим сторона OP лежит на прямой $y = -3x$

значит у точек на стороне OP $f(x,y) = 0$. (на стороне OP)

Сторона RQ лежит на прямой $y = -3x + 60 \Rightarrow$

у точек на стороне RQ $f(x,y) = 60$.

Мы проведем прямые $y = -3x + f(x,y)$, где
 $f(x,y)$ принимает значения от 0 до 60.



Получаем кол-во точек на
каждой из прямых

1/2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На прямой, у которой $f(x, y) : 3$ будет лежать по 15 точек,
а на ординате по M точек.

Найти количество пар точек для которых выполняется

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = 33$$

Решение будут: $33-0; 34-1; 35-2; \dots; 59-26; 60-27$.

Всего 28 пар $f(x; y)$ из которых 10 будут
составлены из $f(x, y) : 3$

$$\text{Тогда кол-во пар точек будет } 18 \cdot 14^2 + 10 \cdot 15^2 =$$
$$= 5778. \leftarrow \text{ответ}$$

Ответ: 5778 пар точек

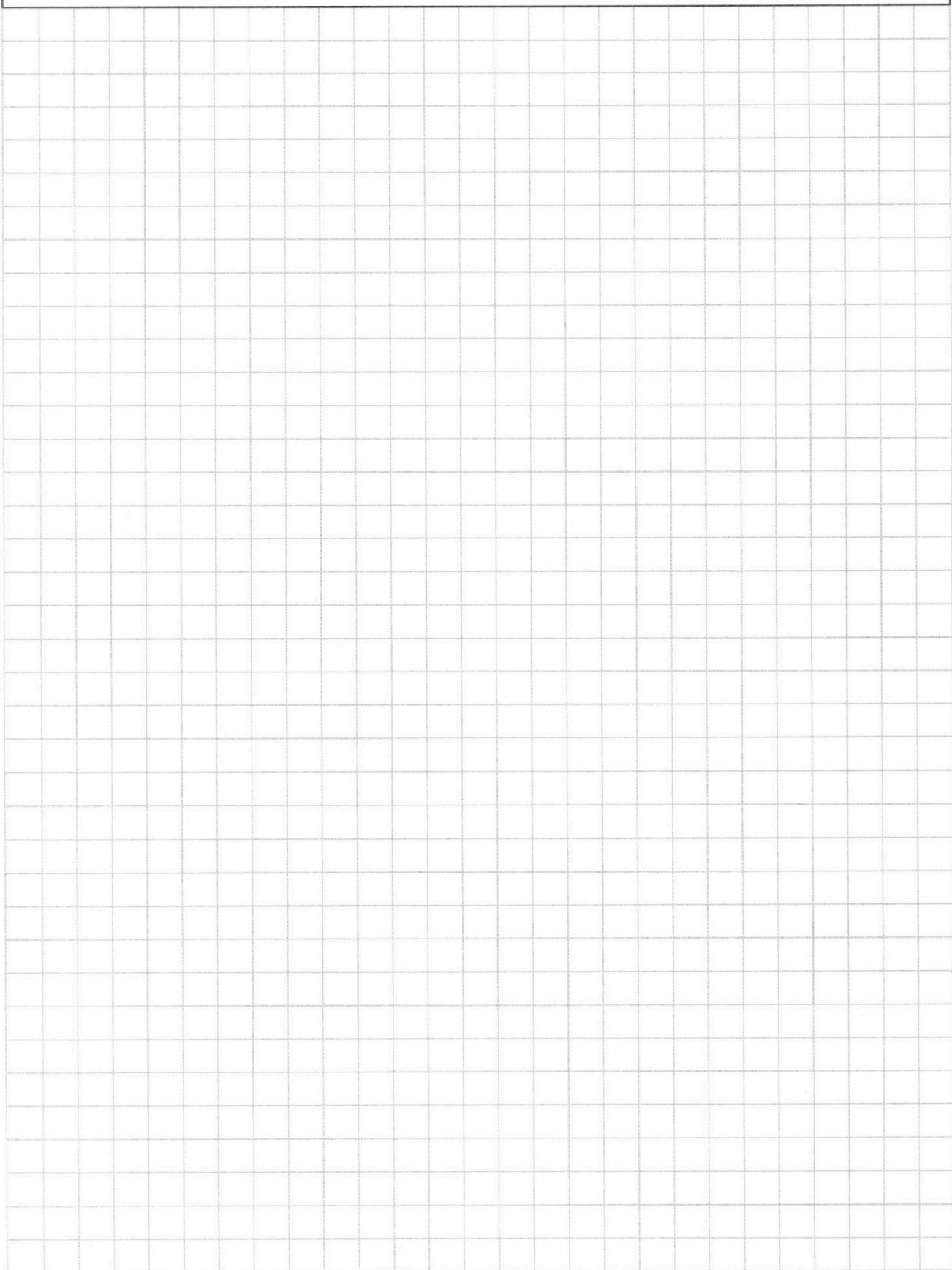


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





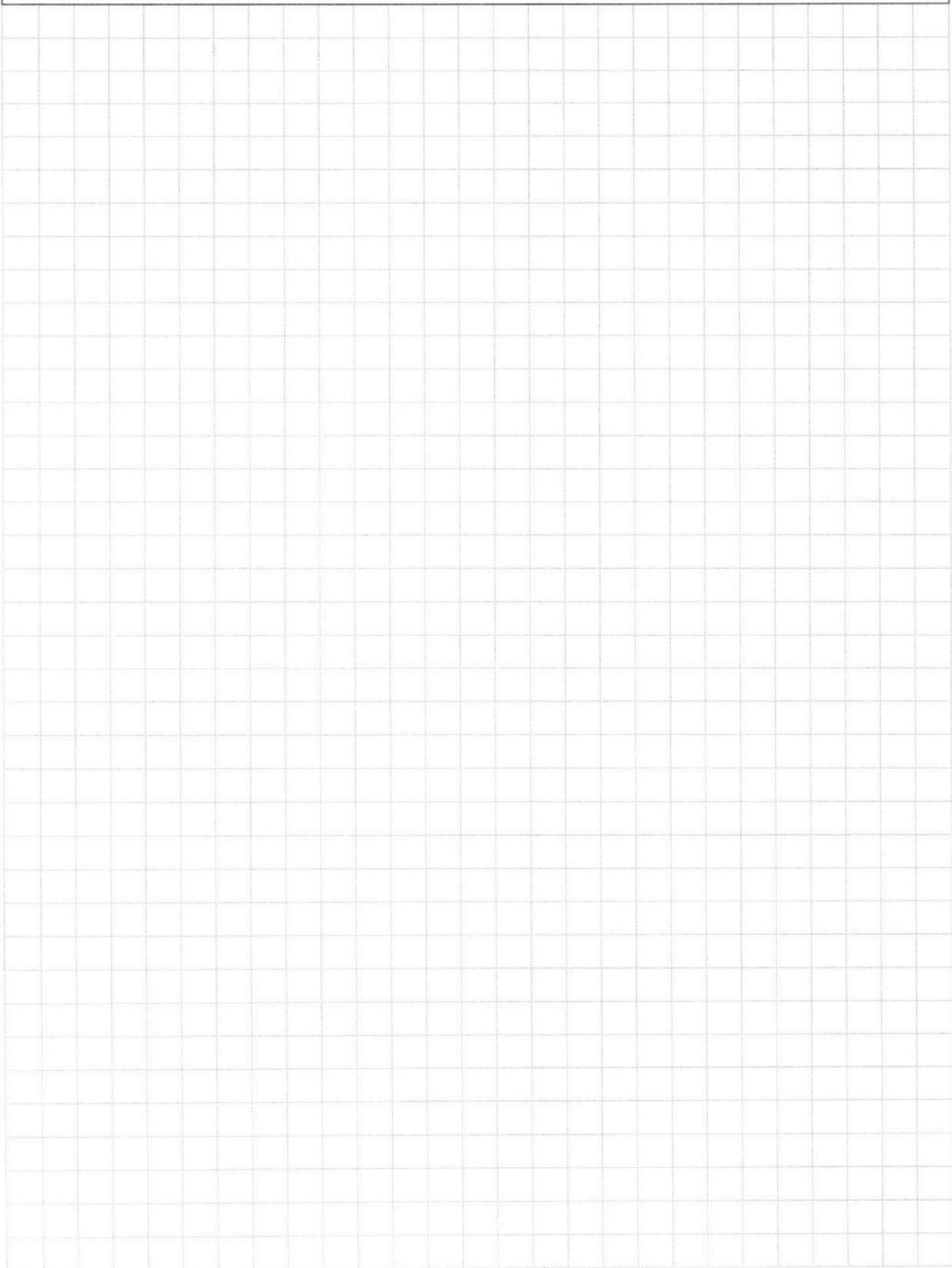
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



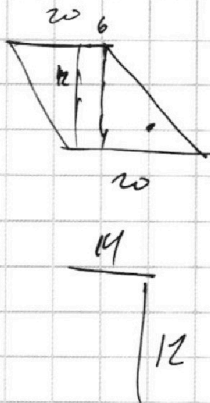
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

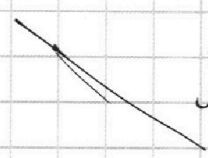


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

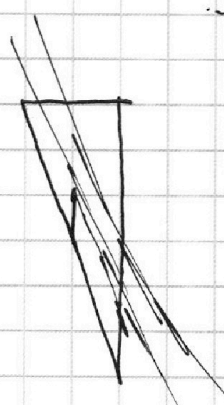


33 $f(x) = 3x + 11$
 42
 -14

$f(x, y) = 3x + y$
 $y = -3x + 60$



$y = -3x$



0; 13
 14 точек

0; 0 3 $\boxed{15}$
 1
 2 42; 16; 13

15; 0
 14; 1
 14; 2

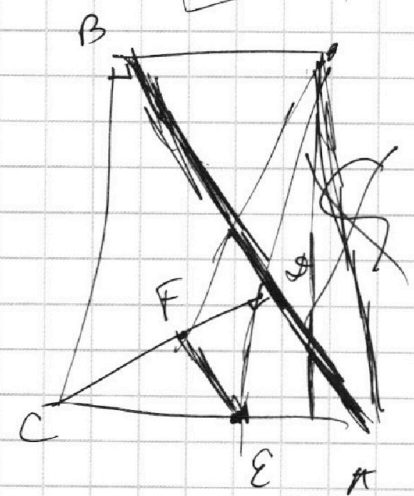
$-3x + 12 \geq 0$
 $0 + 33; 3 + 30; 6 + 27; 9 + 24; \dots$

$12 \cdot 15 + 34 \cdot 14$

$$\begin{array}{r} 225 \\ 12 \\ \hline 450 \\ 225 \\ \hline 2700 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ \times 24 \\ \hline 784 \\ 588 \\ \hline 6600 \\ 2700 \\ \hline 9364 \end{array}$$

$\boxed{-3x + 60}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\begin{array}{r} 196 \\ 18 \\ \hline 1568 \\ 196 \\ \hline 3528 \\ 2250 \\ \hline 5778 \end{array}$$