



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1
 Пусть $a = 2^{d_a} \cdot 7^{\beta_a} \cdot A$, где d_a и β_a — неотрицательные целые числа, $A \not\equiv 2$ и $A \not\equiv 7$; $b = 2^{d_b} \cdot 7^{\beta_b} \cdot B$, где d_b и β_b — неотрицательные целые числа, $B \not\equiv 2$ и $B \not\equiv 7$; $c = 2^{d_c} \cdot 7^{\beta_c} \cdot C$, где d_c и β_c — неотрицательные целые числа, $C \not\equiv 2$ и $C \not\equiv 7$. Также A, B и C — натуральные числа. Иначе говоря: d_a, d_b и d_c — максимальные степени двойки, на которые делятся a, b и c соответственно; $\beta_a, \beta_b, \beta_c$ — максимальные степени семёрки, на которые делятся a, b и c соответственно.

Тогда $ab = 2^{d_a+d_b} \cdot 7^{\beta_a+\beta_b} \cdot AB$, где $AB \not\equiv 2$ и $AB \not\equiv 7$;
 $bc = 2^{d_b+d_c} \cdot 7^{\beta_b+\beta_c} \cdot BC$, где $BC \not\equiv 2$ и $BC \not\equiv 7$;
 $ac = 2^{d_a+d_c} \cdot 7^{\beta_a+\beta_c} \cdot AC$, где $AC \not\equiv 2$ и $AC \not\equiv 7$.

По условию: $\begin{cases} ab : (2^{14} \cdot 7^{10}) \Leftrightarrow [d_a+d_b \geq 14 \text{ и } \beta_a+\beta_b \geq 10] \\ bc : (2^{17} \cdot 7^{17}) \Leftrightarrow [d_b+d_c \geq 17 \text{ и } \beta_b+\beta_c \geq 17] \\ ac : (2^{30} \cdot 7^{37}) \Leftrightarrow [d_a+d_c \geq 30 \text{ и } \beta_a+\beta_c \geq 37] \end{cases}$

Также образом: $\begin{cases} (d_a+d_b) + (d_b+d_c) + (d_a+d_c) \geq 14+17+30 = 51 \\ (\beta_a+\beta_b) + (\beta_b+\beta_c) + (\beta_a+\beta_c) \geq 10+17+37 = 64 \end{cases}$

$\begin{cases} 2(d_a+d_b+d_c) \geq 51 \\ 2(\beta_a+\beta_b+\beta_c) \geq 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_a+d_b+d_c \geq 25,5 \\ \beta_a+\beta_b+\beta_c \geq 32 \end{cases}$

* если $d_a+d_b+d_c \leq 25 < 25,5$, то противоречие. Значит $d_a+d_b+d_c \geq 26$

$abc = 2^{d_a+d_b+d_c} \cdot 7^{\beta_a+\beta_b+\beta_c} \cdot ABC \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$

$2^{26} \cdot 7^{37}$

Пример: $a = 2^7 \cdot 7^9$; $b = 2^6 \cdot 7^{11}$; $c = 2^{16} \cdot 7^{20}$

Пример: $a = 2^6 \cdot 7^{17}$; $b = 2^8$; $c = 2^{12} \cdot 7^{20}$

Пример на $abc =$

$a = 2^9 \cdot 7^{17}$; $b = 2^6$; $c = 2^{11} \cdot 7^{20}$

- Тогда:
- $ab = (2^{15} \cdot 7^{17})$, но есть: $(2^{14} \cdot 7^{10})$
 - $bc = (2^{17} \cdot 7^{20})$, но есть: $(2^{17} \cdot 7^{17})$
 - $ac = (2^{20} \cdot 7^{37})$, но есть: $(2^{20} \cdot 7^{37})$

4) $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

То условие: $\text{НОД}(a; b) = 1$, иначе $\text{НОД}(a; b) = d > 1 \Rightarrow (d \in \mathbb{N})$
 $a = k_a d$ ($k_a \in \mathbb{N}; k_a < a, \text{ м.к. } d \geq 2$) и $b = k_b d$ ($k_b \in \mathbb{N}; k_b < b,$
 $\text{ м.к. } d \geq 2$) $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{k_a d}{k_b d} = \frac{k_a (\neq a)}{k_b (\neq b)}$. Противоречие.

Итак пусть мы нашли такое m . Тогда $(a+b) \vdots m$ и $(a^2 - 6ab + b^2) \vdots m$. Заметим, что $a^2 - 6ab + b^2 = (a+b)^2 - 8ab$.
Так как $(a+b) \vdots m$, то $(a+b)^2 \vdots m$. По $(a+b)^2 - 8ab \vdots m \Rightarrow$
 $\Rightarrow 8ab \vdots m$. Сразу отметим, что m — ~~целое~~ ^{натуральное} ~~число~~, ^{число}, большее 1 (м.к. сократить на 1 — бессмысленное понятие, правило "не сокращать").

Предположим, что $\exists p$ — простое число: $a \vdots p$ и $m \vdots p$. Так как $(a+b) \vdots m \vdots p$, то $(a+b) \vdots p$. По $a \vdots p \Rightarrow b \vdots p \Rightarrow \text{НОД}(a; b) \vdots p$. По $p \geq 2$. Противоречие. Значит если $m \vdots p$, где p — простое число, то $a \nmid p$ и (аналогично) $b \nmid p$. Таким образом, $\text{НОД}(ab, m) = 1$, так как $\text{НОД}(a, m) = 1$ и $\text{НОД}(b, m) = 1$.
Используем, что ^{натуральное} число, которое ≥ 2 , имеет х.д. 1 простейший делитель.

Так как $8ab \vdots m$, а $\text{НОД}(ab, m) = 1$, то $8 \vdots m$. Таким образом, $m \leq 8$

Пример на $m=8$: $a=3$ и $b=53$. Тогда (поскольку 3 и 53 — различные простые числа) $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(3, 53) = 1$, то есть дробь $\frac{a}{b} = \frac{3}{53}$ несократима ($a=3 \in \mathbb{N}; b=53 \in \mathbb{N}$).

$$\text{Дробь на доске равна } \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{3+53}{3^2-6 \cdot 3 \cdot 53+53^2} = \frac{56}{9-6 \cdot 159+2809} = \frac{56}{2808-954} = \frac{56}{1864} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 1}{233 \cdot 8} = \frac{7}{7 \cdot 33+2}$$

Как видим, $233 \nmid 7$ (м.к. $2 \in (1; 6)$, т.е. $\neq 0$) \Rightarrow дробь можно сократить максимум на 8.

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

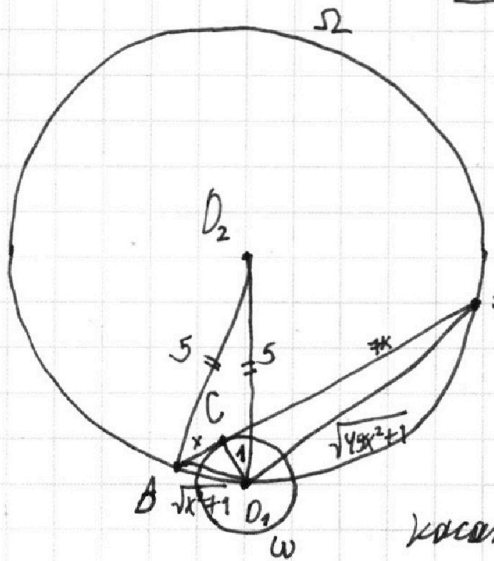
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №3



Пусть $AB = x$. По условию:

$$\frac{AC}{CB} = 7, \text{ откуда } AC = 7x.$$

Пусть O_1 - центр ω ; O_2 - центр Ω .

AB - касательная $\omega \Rightarrow$ (по свойству касательной к окружности)

$O_1C \perp AB \Rightarrow \Delta ACO_1$ и ΔBCO_1 -

прямоугольные треугольники.

По теореме Пифагора: $BO_1 =$

$$= \sqrt{BC^2 + CO_1^2} = (\text{т.к. } CO_1 = R_{\omega} = 1 \text{ по свойству касательной к окружности}) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ и}$$

$$AO_1 = \sqrt{AC^2 + CO_1^2} = \sqrt{49x^2 + 1}.$$

Рассмотрим ΔBO_2O_1 : он равнобедренный (т.к. $BO_2 = O_1O_2 = R_{\Omega} = 5$; по признаку равнобедренного Δ -а), у него $BO_1 = \sqrt{x^2 + 1}$. Пусть M - середина BO_1 , то есть

$$BM = O_1M = \frac{BO_1}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2}. \text{ По свойству равнобедренного } \Delta\text{-а: } O_2M - \text{высота } \Delta BO_2O_1, \text{ т.е. } O_2M \perp BO_1, \text{ т.е. } \Delta BO_2M \text{ прямо-угольный. Значит } BM = BO_2 \cdot \sin \angle BO_2M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2} = 5 \cdot \sin \angle BO_2M \Leftrightarrow \sin \angle BO_2M = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{10} \text{ (по свойству равнобедренного } \Delta\text{-а: } O_2M - \text{биссектриса } \Delta BO_2O_1, \text{ т.е. } \angle BO_2M = \angle MO_2O_1 = \frac{\angle BO_2O_1}{2})$$

$$5 \cdot \sin \frac{\angle BO_2O_1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 10 \cdot \sin \frac{\angle BO_2O_1}{2} \Leftrightarrow \sin \frac{\angle BO_2O_1}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{10} \text{ (по свойству вписанного угла: } \angle BAO_1 = \frac{\angle BO_2O_1}{2})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 10 \cdot \sin \angle BAO_1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 10 \cdot \sin \angle CAO_1, \text{ т.к. } C \in AB \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 10 \cdot \frac{CO_1}{AO_1} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}} \Leftrightarrow \sqrt{49x^2 + 1} = 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{49x^2 + 1} = 10 \Leftrightarrow (x^2 + 1 \geq 1 > 0 \text{ и } 49x^2 + 1 \geq 1 > 0) (x^2 + 1)(49x^2 + 1) = 100 \Leftrightarrow 49(x^2)^2 + 50x^2 - 99 = 0 \Leftrightarrow (49(x^2)^2 + 99x^2) - (49x^2 + 99) = 0 \Leftrightarrow (49x^2 + 99)(x^2 - 1) = 0. \text{ Так как } 49x^2 + 99 \geq 99 > 0, \text{ то } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow (x > 0) x = 1 \Leftrightarrow BC = 1 \Rightarrow AB = BC + AC = x + 7x = 8x = 8$$

Ответ: $AB = 8$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №4

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \Leftrightarrow \sqrt{(2x^2+2x+1) + (2-7x)} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \Leftrightarrow (a = \sqrt{2x^2+2x+1}; b = 2-7x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b} - a = b \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b} = a+b$$

Отметим, что по ДДЗ: $a^2+b \geq 0$ и $a \geq 0$. Из последнего равенства получаем:

$$\begin{cases} a+b \geq 0 \\ a^2+b = a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow b^2+2ab-b=0 \Leftrightarrow b(b+2a-1)=0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \Leftrightarrow 2-7x=0 \Leftrightarrow x=3,5 \text{ (с.г.д.е.)} \\ b+2a-1=0 \Leftrightarrow 2a=1-b \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+2x+1} = x - (2-7x) = 7x-1, \end{cases}$$

Отсюда получаем: $\begin{cases} 7x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{7} \\ 4(2x^2+2x+1) = 49x^2 - 14x + 1 \Leftrightarrow 8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 14x + 1 \Leftrightarrow 41x^2 - 22x - 3 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow D' = \left(\frac{-22}{2}\right)^2 - 41 \cdot (-3) = 121 + 123 = 244 (> 0) \Rightarrow x = \frac{-(-22) \pm \sqrt{244}}{2 \cdot 41} = \frac{11 \pm \sqrt{61}}{41} \text{ (с.г.д.е.)}$$

Итак, получили 3 корня: $x_1 = 3,5$; $x_2 = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$; $x_3 = \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$.

Отметим, что $2x^2+2x+1 = 2(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2) + 0,5 = 2(x+0,5)^2 + 0,5 \geq 0,5 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a$ всегда имеет смысл. Детально проверить, что $a^2+b \geq 0$ и $a+b \geq 0$.

При $x=3,5$: $x=3,5$; $a = \sqrt{2(3,5+0,5)^2+0,5} = \sqrt{32,05}$ и $b = 2-7 \cdot 3,5 = -22,5$. Тогда $a+b = \sqrt{32,05} - 22,5 < \sqrt{36} - 22,5 = 6 - 22,5 = -16,5 < 0$ (3)

При $x = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$: $b = 2-7 \cdot \frac{11-2\sqrt{61}}{41} = \frac{82-77+14\sqrt{61}}{41} = \frac{5+14\sqrt{61}}{41}$ и

$$a = \sqrt{2\left(\frac{11-2\sqrt{61}}{41} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{22-4\sqrt{61}+41}{82}\right)^2 + \frac{1}{2}} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= \sqrt{\frac{2}{8^2} (65 - 4\sqrt{61})^2 + \frac{1}{2}} =$$

значит $x_1 \neq 3,5$ — НЕ решение.

Заметим, что $2x^2 - 5x + 3 = (2x^2 - 3x) - (2x - 3) = (2x - 3)(x - 1)$

При $x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$: $(2x - 3)(x - 1) = \left(\frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{41} - 3\right) \left(\frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41} - 1\right) =$

$$= \frac{-101 \pm 4\sqrt{61}}{41} \cdot \frac{-30 \pm 2\sqrt{61}}{41} = \frac{8 \cdot 61 \pm (-30 \cdot 4 - 101 \cdot 2)\sqrt{61} + 3030}{41^2} =$$

$$= \frac{3518 \pm 322\sqrt{61}}{41^2}$$

Заметим, что $3518 > 322\sqrt{61}$ (м.к.

$$322 \cdot \sqrt{61} < 322 \cdot \sqrt{100} \quad (61 < 100) = 3220 < 3518) > -322\sqrt{61} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \text{ при } x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}, \text{ т.е. } a^2 + b \geq 0.$$

Осталось проверить, что $a + b \geq 0$ при $x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$.

$$b = 2 - 7 \cdot \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41} \Leftrightarrow a \geq -b \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 7x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{7} \\ 7x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 \geq 49x^2 - 28x + 4 \Leftrightarrow 47x^2 - 30x + 3 \leq 0. \text{ Корни} \end{cases}$$

умножена $x_{1,2} = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 47 \cdot 3}}{2 \cdot 47} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 1411}}{47} =$

$$= \frac{15 \pm \sqrt{84}}{47} = \frac{15 \pm 2\sqrt{21}}{47} \Rightarrow x \in \left[\frac{15 - 2\sqrt{21}}{47}; \frac{15 + 2\sqrt{21}}{47} \right]$$

$$\frac{15 - 2\sqrt{21}}{47} \geq \frac{2}{7} \Leftrightarrow 15 - 2\sqrt{21} \geq 14 \quad (\text{меньше})$$

$$\frac{15 + 2\sqrt{21}}{47} \geq \frac{2}{7} \Leftrightarrow 15 + 2\sqrt{21} \geq 14 \quad (\text{меньше, м.к. } 2\sqrt{21} < 2\sqrt{25} \quad (21 < 25) = 10 < 14)$$

Таким образом, $x \leq \frac{15 + 2\sqrt{21}}{47} \leq 2 \leq$

$$\frac{15 - 2\sqrt{21}}{47} \geq \frac{2}{7} \Leftrightarrow 15 - 14\sqrt{21} \geq 14 \quad (\text{меньше, м.к. } 14\sqrt{21} = 14(21)^{1/2} > 14 \cdot 4)$$

$$\frac{15 + 2\sqrt{21}}{47} \geq \frac{2}{7} \Leftrightarrow 15 + 14\sqrt{21} \geq 14 \quad (\text{больше}) \Rightarrow x \in \left[\frac{2}{7}; \frac{15 + 2\sqrt{21}}{47} \right].$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x_{\max}, x \leq \frac{15+2\sqrt{21}}{47}$$

Пусть $x_2 = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$ — корень. Тогда:

$$\frac{11-2\sqrt{61}}{41} \leq \frac{15+2\sqrt{21}}{47} \Leftrightarrow 517 - 94\sqrt{61} \leq (410+205) + 41\sqrt{21} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 47\sqrt{61} + 49 + 41\sqrt{21} \text{ (выполняется)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{11-2\sqrt{61}}{41} \text{ — корень.}$$

Пусть $x_3 = \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$ — корень. Аналогично $47\sqrt{61} \leq 49 +$

~~$+ 41\sqrt{21}$~~ . Но $49 + 41\sqrt{21} > 49 + 41 \cdot \sqrt{26} \text{ (} 21 > 26 \text{)} =$

~~$= 49 + 41 \cdot 4 = 213$~~ . А $47\sqrt{61}$

$$\Leftrightarrow 47^2 \cdot 61 \leq 49^2 + 41^2 \cdot 21 + 2 \cdot 49 \cdot 41 \cdot \sqrt{21} \Leftrightarrow$$

~~$\sqrt{21} \geq 4,5$ м.к. $21 \geq 20,25 \Rightarrow 49 + 41\sqrt{21} \geq 49 + 41 \cdot 4,5 =$~~

~~$= 233,5$~~ . Но $47\sqrt{61} \leq 47 \cdot 7,5$ (м.к. $61 > 56,25$) =

~~$= 329 + 23,5 = 352,5$~~ . $49 + 41\sqrt{21} \leq 49 + 41 \cdot 5$ (м.к. $21 < 25$) =

~~$= 49 + 205 = 254$~~ . И $254 < 352,5$. Значит $47\sqrt{61} >$

~~$> 49 + 41\sqrt{21}$~~ (2) $\Rightarrow x_3 = \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$ — НЕ корень.

Таким образом, единственный корень уравнения —

это $x_2 = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$

Ответ: $\frac{11-2\sqrt{61}}{41}$

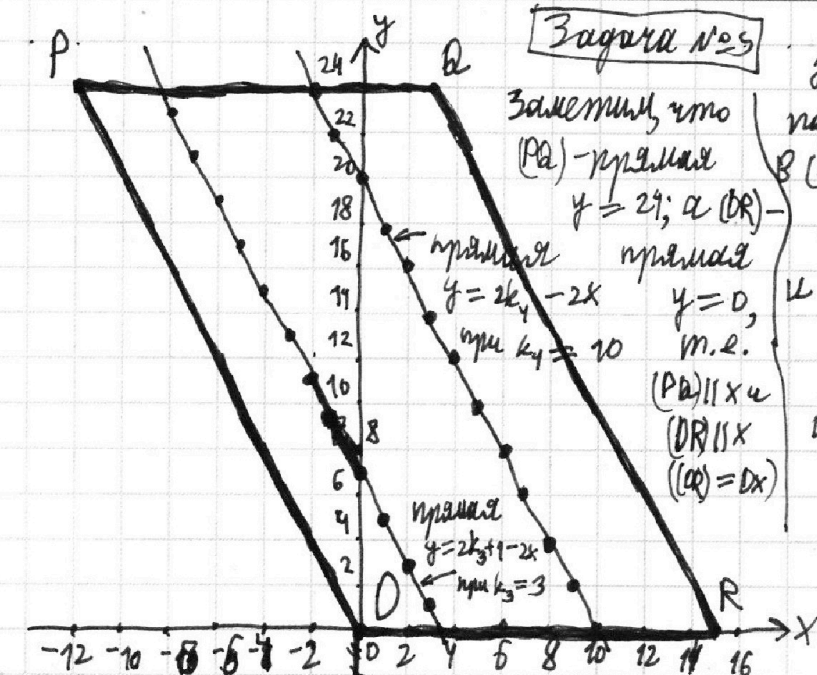
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №5

Заметим, что (PQ) - прямая $y = 24$; а (QR) - прямая $y = 0$, т.е. $(PQ) \parallel x$ и $(QR) \parallel x$ ($OR = Ox$)

Нужно посчитать кол-во пар точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ таких, что x_1, x_2, y_1, y_2 - целые числа, и $(2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) = 12$ что представляет из себя множество точек $2x + y = z$, где z - целое число? Это прямая $y = z - 2x$. А что из себя представляют

прямые (PO) и (OR): По формулам для (PO): пусть это прямая $y = k_1 x + b_1$. Тогда:

$$\begin{cases} k_1 \cdot 0 + b_1 = 0 \\ k_1 \cdot (-12) + b_1 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_1 = 24 + 12k_1 \end{cases} \Rightarrow -12k_1 = 24 \Leftrightarrow k_1 = -2 \Rightarrow (PO) - \text{это прямая } y = -2x \text{ (здесь } z=0).$$

Аналогично (OR) - это прямая $y = k_2 x + b_2$:

$$\begin{cases} k_2 \cdot 15 + b_2 = 0 \\ k_2 \cdot 3 + b_2 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = -15k_2 \\ b_2 = 24 - 3k_2 \end{cases} \Rightarrow 21 - 3k_2 = 15k_2 \Leftrightarrow k_2 = -2 \Rightarrow b_2 = 30 \Rightarrow (OR) - \text{это прямая } y = 30 - 2x \text{ (здесь } z=30)$$

Пусть (x_2, y_2) лежит на прямой $y = z_2 - 2x$, а точка (x_1, y_1) лежит на прямой $y = z_1 - 2x$. Здесь z_1, z_2 - целые числа, при этом $z_1 \in [0; 30]$ и $z_2 \in [0; 30]$. Тогда $z_2 - z_1 = 12 \Leftrightarrow z_2 = z_1 + 12 \Rightarrow z_1 + 12 \in [0; 30] \Leftrightarrow z_1 \in [-12; 18] \Rightarrow z_1 \in [0; 18] \Rightarrow z_2 \in [12; 30]$. Заметим, что при z :

прямая $y = z - 2x$ параллельна PO и OR, т.к. коэффициенты при x в $y = z - 2x$, $y = -2x$ и $y = 30 - 2x$ одни и те же. Таким образом, если $z = 2k_3 + 1$ ($k_3 \in \mathbb{Z}$ и $k_3 \in [0; 14]$), то в параллелограмме лежат точки с целыми координатами: $(0, 1), (1, 3), (k_3 + 1, 3), (k_3 - 1, 3), (k_3 - 2, 5), (k_3 - 1, 1 + 2i), (i \in \mathbb{Z}$ и $i \in [0; 14])$; $(k_3 + 1, 1), (k_3 - 1, 1), (k_3 - 2, 3), (k_3 - 1, 3), (k_3 - 2, 5), (k_3 - 1, 1 + 2i)$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~координатами $(x-i; (1+2i))$, где $i \in \mathbb{Z}$ и $i \in [0; 11]$ действительно, если $1+2i \in [0; 24]$, то $i \in [-0,5; 11,5] \Rightarrow i \in [0; 11]$, ведь $i \in \mathbb{Z}$, т.к. $x \in \mathbb{Z}$ и $x-i$~~

координатами $(x; 2k_3+1-2x)$, где $x \in \mathbb{Z}$. Поскольку $L \parallel PO$ и $L \parallel RA$ (L задается уравнением $y = z - 2x$), то проверку на x делать не нужно: нужно сделать проверку на ординату: $(2k_3+1-2x) \in [0; 24] \Leftrightarrow (2x - 2k_3 - 1) \in [-24; 0] \Leftrightarrow 2x \in [2k_3 - 23; 2k_3 + 1] \Leftrightarrow x \in [\underbrace{k_3 - 11,5}_{(k_3 - 12; k_3 - 11)}; \underbrace{k_3 + 0,5}_{(k_3; k_3 + 1)}] \Rightarrow x \in [\underbrace{k_3 - 11}_{\mathbb{Z}}; \underbrace{k_3}_{\mathbb{Z}}]$.

Получаем на L 12 точек, разрешённых по условию. (и кстати, не лежащих на границе)

Если $z = 2k_4 - 2x$ * $2k_3 + 1 \in [0; 30] \Leftrightarrow k_3 \in [-0,5; 14,5] \Rightarrow k_3 \in [0; 14]$

Если $z = 2k_4 - 2x$ ($k_4 \in \mathbb{Z}; 2k_4 \in [0; 30] \Leftrightarrow k_4 \in [0; 15]$), то в параллельной границе (возможно, на границе) лежат точки с целыми координатами $(x; 2k_4 - 2x)$. Аналогично $(2k_4 - 2x) \in [0; 24] \Leftrightarrow 2x - 2k_4 \in [-24; 0] \Leftrightarrow x \in [k_4 - 12; 0]$.

Получаем на L_z 13 точек, разрешённых по условию.

Итак, получаем, что на L ^{каждой из 5} прямых $y = -2x; y = 2 - 2x; \dots; y = 30 - 2x$ лежат по отдельности ровно 13 ^{разрешённых} точек, а на каждой из 5 прямых $y = 1 - 2x; 3 - 2x; \dots; y = 29 - 2x$ по отдельности лежит ровно 12 разрешённых точек. Заметим, что из $z_2 - z_1 = 12$ следует, что

(т.к. $z_1 \in \mathbb{Z}$ и $z_2 \in \mathbb{Z}$) z_1 и z_2 одной чётности (или оба чётные, или оба нечётные). Как подходят пары вида $(2j; 2j+2)$, где $j \in [0; 9]$ (т.к. $z_1 \in [0; 18]$), I вида $(2m+1; 2m+13)$, где $m \in [0; 8]$ (т.к. $z_1 \in [0; 18]$, то $2m+1 \in [0; 18] \Leftrightarrow m \in [-0,5; 8,5] \Rightarrow m \in [0; 8]$).

Пар I вида 10; пар II вида 9. По структуре пар, в каждой из пар z_1 и z_2 I вида есть ровно $13^2 = 169$ внутренних пар A и B, а в каждой из пар z_1 и z_2 II вида - ровно $12^2 = 144 \Rightarrow$ всего внутренних пар A и B $169 \cdot 16 + 144 \cdot 15 = (170 - 1) \cdot 16 + 72 \cdot 30 =$

$= 338 \cdot 8 + 72 \cdot 30 = 2704 + 2160 = 4864$ Ответ: 4864

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



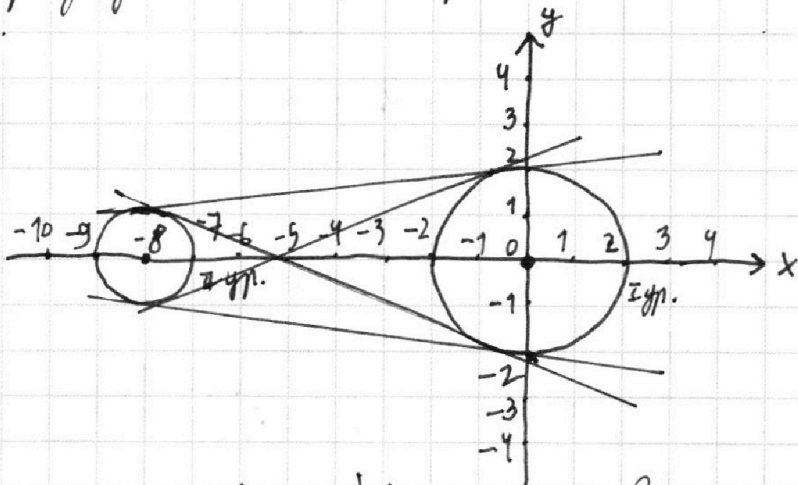
Задача №6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 < (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases} \quad \text{Из (1): } y = ax + 10b$$

Из (2): ~~$(x+8)^2 + y^2 \geq 1^2$~~
 ~~$x^2 + y^2 \geq 4$~~

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1^2 \\ x^2 + y^2 \leq 2^2 \\ (x+8)^2 + y^2 \leq 1^2 \\ x^2 + y^2 \geq 2^2 \end{cases}$$

Построим графики уравнений $(x+8)^2 + y^2 = 1^2$ (окружность радиусом 1 в центре $(-8; 0)$) и $x^2 + y^2 = 2^2$ (окружность радиусом 2 в центре $(0; 0)$):



Система 2 задает множество точек, лежащих или в окружности I уравнения (или на границе), или в окружности II уравнения (или на границе).

Заметим, что $\sqrt{}$ прямая в координатной плоскости пересекает круг (сейчас имеется ввиду ~~круг~~ окружность, а не окружность, то есть круг - это окружность + все точки внутри нее) или в 0 точках (●), или в 1 точке (⊙), или в ∞ множестве точек (⊖). Тогда посмотрим, сколько всего решений в зависимости от того, как пересекает прямая $y = ax + 10b$ (1)

2 круга (и, вообще, окружности, которые их задают). Как видим из таблицы справа, как подходящий случай только при касании обоих кругов, то есть обеих окружностей.

кас-во н.п.с	0	1	∞
кас-во п.п.с	0	0	1
	1	1	2
	∞	∞	∞

Таким образом, нужно найти уравнения всех ~~касательных~~ прямых, касающихся обеих окружностей.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найти все возможные образы, нам нужно найти такие a и b , чтобы для каждой из уравнений системы уравнений

$$\text{I} \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1^2 \\ y = ax + 10b \end{cases} \text{ и } \text{II} \begin{cases} x^2 + y^2 = 2^2 \\ y = ax + 10b \end{cases} \text{ имели ровно 1 корень.}$$

Подставим y из нижнего уравнения в верхнее (а в I системе, а во II системе). Получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} (x+8)^2 + (ax+10b)^2 &= 1^2 \\ x^2 + (ax+10b)^2 &= 2^2 \end{aligned}$$

$$\text{I) } (x+8)^2 + (ax+10b)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 16x + 64 + (a^2x^2 + 20abx + 100b^2) = 1 \Leftrightarrow x^2(a^2+1) + x(20ab+16) + (100b^2+63) = 0$$

$$D_I' = \left(\frac{20ab+16}{2}\right)^2 - (a^2+1)(100b^2+63) = 4(5ab+4)^2 - (100a^2b^2 + 63a^2 + 100b^2 + 63) = 100a^2b^2 + 160ab + 64 - 100a^2b^2 - 63a^2 - 100b^2 - 63 = 160ab - 63a^2 - 100b^2 + 1$$

$$\text{II) } x^2 + (ax+10b)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + (a^2x^2 + 20abx + 100b^2) = 4 \Leftrightarrow x^2(a^2+1) + 20abx + (100b^2 - 4) = 0$$

$$D_{II}' = \left(\frac{20ab}{2}\right)^2 - (a^2+1)(100b^2-4) = 100a^2b^2 - (100a^2b^2 + 100b^2 - 4a^2 - 4) = 4a^2 - 100b^2 + 4$$

Заметим, что для $\forall x \in (-\infty, +\infty)$: \exists единственный y : $y = ax + 10b$. Если $y_1 = y_2$, то $ax_1 + 10b = ax_2 + 10b$. Значит:

$$\begin{cases} D_I' = 0 \Leftrightarrow 160ab - 63a^2 - 100b^2 + 1 = 0 \\ D_{II}' = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 100b^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (160ab - 63a^2 - 100b^2 + 1) - (4a^2 - 100b^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 160ab - 67a^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{67a^2 + 3}{160a}. \text{ Подставим } b \text{ в нижнее уравнение: } 4a^2 - 100 \cdot \left(\frac{67a^2 + 3}{160a}\right)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 100 \cdot \frac{67^2 a^4 + 402a^2 + 9}{25600a^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow 1024a^4 - 4989a^2 + 4015 = 0 \Leftrightarrow (1624 - 4989)t^2 + 4015 = 0 \Leftrightarrow 3465t^2 + 4015 = 0 \Leftrightarrow -10015 = 0 \Rightarrow D =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow 1024a^4 - (3600 + 810 + 49)a^2 - 402a^2 - 9 + 622a^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1024 - 4489)a^4 + 622a^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 3465a^4 - 622a^2 + 9 = 0$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{-622}{2}\right)^2 - 9 \cdot 3465 = 311^2 - 31185 =$$

$$= \text{м.к. } 311^2 = (300+11)^2 = 90000 + 6600 + 121 - 31185 =$$

$$= 58815 + 6600 + 121 = 65536 = 4 \cdot 16384 = 4 \cdot 4 \cdot$$

$$4096 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1024 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 32^2 = 8^2 \cdot 32^2 = 256^2 (> 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{-\left(\frac{-622}{2}\right) \pm 256}{3465} = \frac{311 \pm 256}{3465} = \left\{ \frac{55}{3465}, \frac{567}{3465} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{63}, \frac{9}{55} \right\} \Rightarrow (t=a^2) a \in \left\{ \sqrt{\frac{1}{63}}, \sqrt{\frac{9}{55}} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{7}; 3 \cdot \frac{55}{55^2} \right\} \Leftrightarrow a^2 \in \left\{ 7 \cdot \left(\frac{1}{21}\right)^2; 55 \cdot \left(\frac{3}{55}\right)^2 \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in \left\{ -\frac{\sqrt{7}}{21}, -\frac{3\sqrt{55}}{55}, \frac{3\sqrt{55}}{55}, \frac{\sqrt{7}}{21} \right\} \left(\frac{\sqrt{7}}{21} < \frac{3\sqrt{55}}{55} \text{ м.к.} \right)$$

$$\sqrt{55} < 9\sqrt{7}, \text{ м.к. } \sqrt{55} < \sqrt{64} \text{ (} 55 < 64 \text{)} = 8 < 9 < 9\sqrt{7} \text{ (м.к. } 7 > 1 \text{)}$$

Получа (как видишь, никакое $a \neq 0$) ищем в каждом случае b по формуле, выведенной ранее. Здесь это делать не будем.

Ответ: $-\frac{3\sqrt{55}}{55}, -\frac{\sqrt{7}}{21}, \frac{\sqrt{7}}{21}, \frac{3\sqrt{55}}{55}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

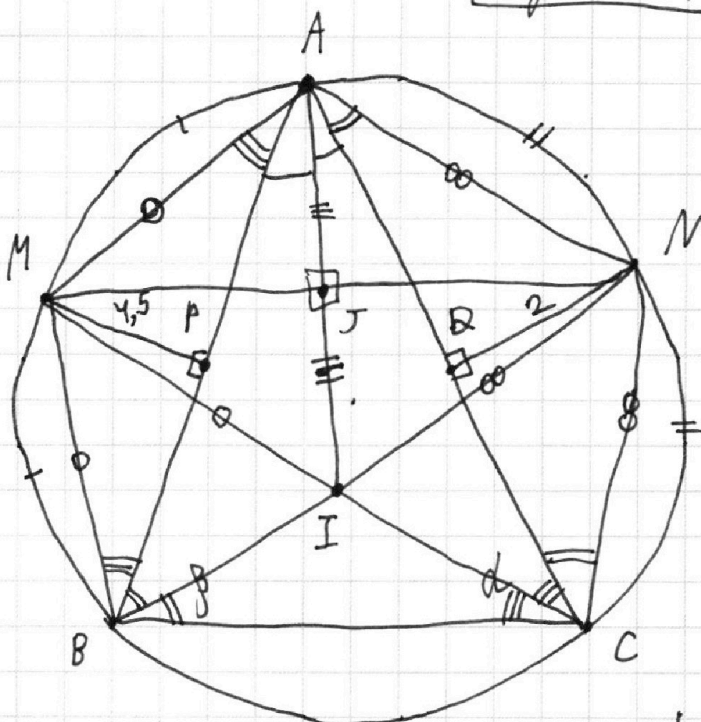
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №7

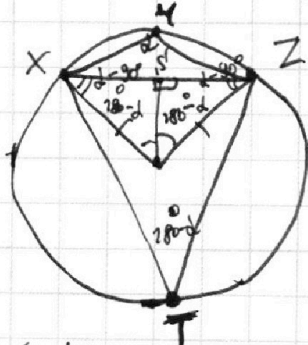
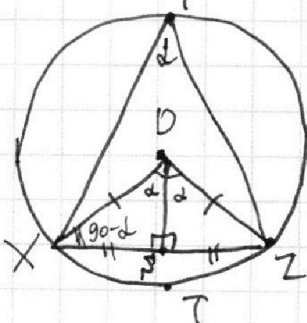


Пусть $MP \perp AB$ и $NQ \perp AC$, при этом $P \in AB$ и $Q \in AC$.
По условию:
 $MP = 4,5$ и $NQ = 2$.
По теореме, обратной *
теореме о трезубце:
 CM - биссектриса $\angle ACB$, а
 BN - биссектриса $\angle ABC$.
По свойству вписанной
окружности; I - центр
окружности, вписанной
в $\triangle ABC$, где $I = BN \cap CM$.
По теореме о трезубце:
 ~~$BM = MA = MB = MI$~~ и
 $NA = NC = NI$.

* так как дуги ~~MB~~ MA равны, то
~~дуга $\cap MB = \cap MA$ (\cap - дуга)~~, то
 $MB = MA$. Аналогично $AN = NC$

По признаку дельтоида
($AM = MI$ и $AN = NI$);

$AMIN$ - дельтоид \Rightarrow (по свойству дельтоида) $AJ \perp MN$ и
($J = AI \cap MN$) $AJ = JI = \frac{AI}{2} \Rightarrow AI = 2AJ$



Заметим, что (см. слева)
 ~~$XZ \perp ZR$ и при $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$, и при $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$,
и при $\alpha = 90^\circ$ (тогда XZ - ~~фигля~~).~~

Значит:
 $OS = R \sin |90^\circ - \alpha|$
 $R \cos \alpha | R \sin (90^\circ - \alpha)$.

$$\frac{\sin |90^\circ - \alpha|}{4,5} = \frac{\sin (90^\circ - \beta)}{2} = \frac{\sin |90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}|}{AJ}$$

предполагая, что:

- 1) $\alpha < 90^\circ$ и $\beta < 90^\circ$
- 2) $\alpha < 90^\circ$, $\beta > 90^\circ$ и $\frac{\alpha + \beta}{2} > 90^\circ$
- 3) $\alpha < 90^\circ$, $\beta > 90^\circ$ и ...

Далее решаем,

получим $AJ \Rightarrow$ и ответ.



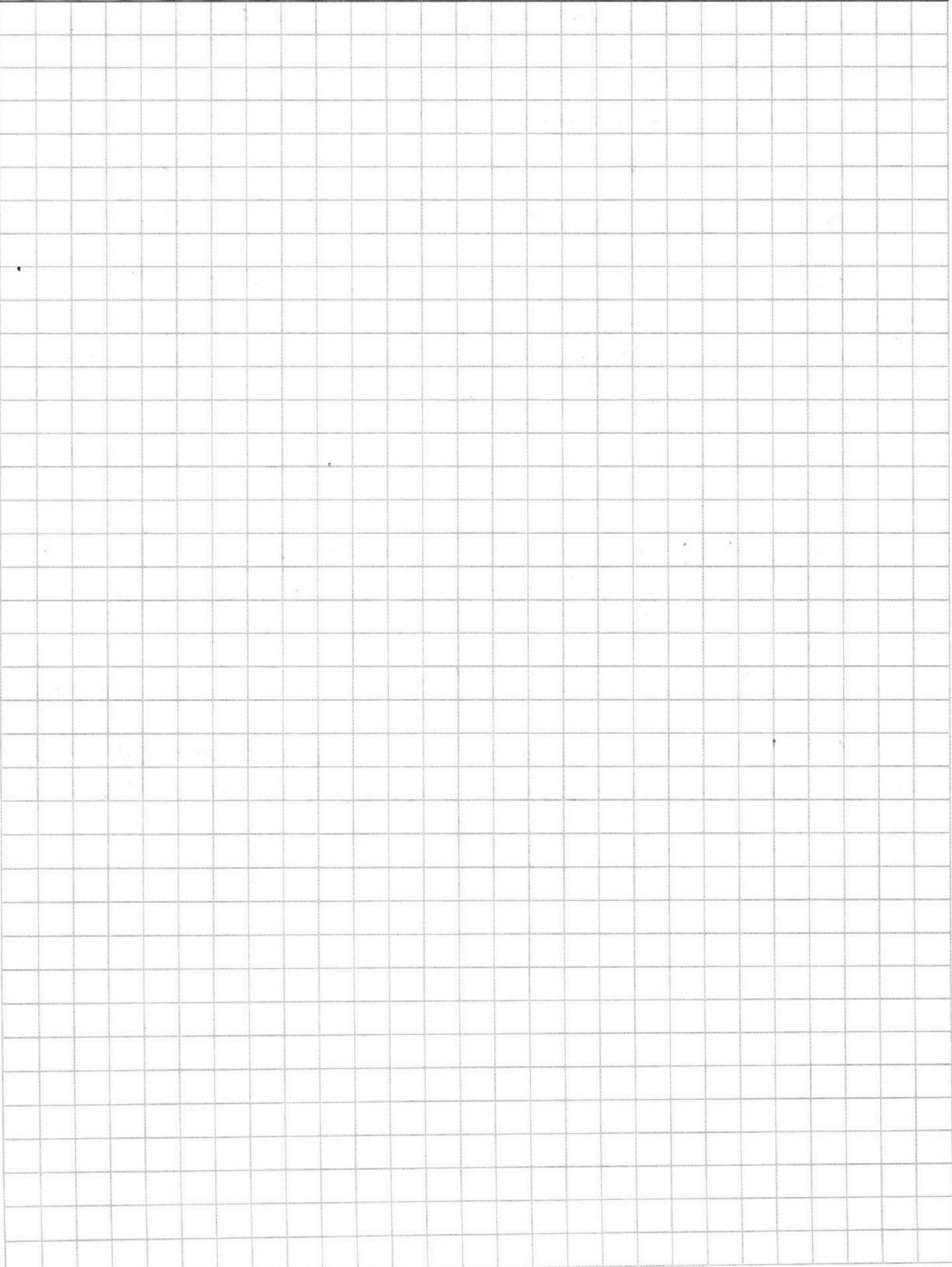
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

