МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1 $\alpha; 2; 3; 5$

Пусть $a=2^{x_1}\cdot 3^{y_1}\cdot 5^{z_1}\cdot \alpha$, где $x_1, y_1, z_1 \in 0; 1; 2; 3; \dots$, α — некоторое натуральное число (~~α тоже может содержать в своих множителях 2, 3, 5~~).

Аналогично: $b=2^{x_2}\cdot 3^{y_2}\cdot 5^{z_2}\cdot \beta$ $c=2^{x_3}\cdot 3^{y_3}\cdot 5^{z_3}\cdot \gamma$.

Рассмотрим условия: $ab \vdots 2^7 3^{11} 5^{14}$. Это значит, что сумма показателей степеней двойки у a и b больше либо равно, сумма показателей степеней тройки у a и $b \geq 11$. Перепишем все наши условия в виде систем:

$$\begin{cases} x_1+x_2\geq 7 \\ x_2+x_3\geq 13 \\ x_3+x_1\geq 14 \end{cases} (1) \qquad \begin{cases} y_1+y_2\geq 11 \\ y_2+y_3\geq 15 \\ y_1+y_3\geq 17 \end{cases} (2) \qquad \begin{cases} z_1+z_2\geq 14 \\ z_2+z_3\geq 18 \\ z_1+z_3\geq 43 \end{cases} (3)$$

Заметим, что (1) система имеет решения: $x_1=4$, $x_2=3$; $x_3=10$, — причем это минимально возможные решения, т.к. при них достигается равенство. $\Rightarrow$ мин. сумма $x_1+x_2+x_3\geq 17$.

Сложим все ~~ур-я~~ нер-ва (2) системы и получим: $2(y_1+y_2+y_3)\geq 43$,

$y_1+y_2+y_3\geq\frac{43}{2} \Rightarrow y_1+y_2+y_3\geq 22$ т.к. $y_1, y_2, y_3\in N$. Т.к. нужно найти min возможное abc, то не важно у какого числа сколько „3" в разложении, важна их сумма; а min $y_1+y_2+y_3=22$.

Сложим все нер-ва (3) системы: $2(z_1+z_2+z_3)\geq 75 \Rightarrow z_1+z_2+z_3\geq\frac{75}{2}$

$z_1+z_2+z_3\geq 38$ т.к. $z_1, z_2, z_3\in N$ или 0. Минимальная сумма $z_1+z_2+z_3=38$

$\min(abc)=2^{\min(x_1+x_2+x_3)}\cdot 3^{\min(y_1+y_2+y_3)}\cdot 5^{\min(z_1+z_2+z_3)}=2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{38}$,

Ответ: $abc=2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{38}$

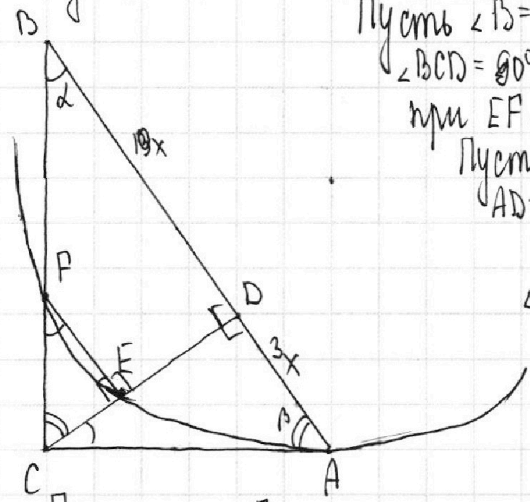
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2



Пусть $\angle B = \alpha$, $\angle A = \beta$. ~~Из прямо~~ Тогда $\angle ACD = 90 - \beta = \alpha$. $\angle BCD = 90^\circ - \alpha = \beta$. $\angle CFE = \angle CBD = \alpha$ – соответственные при $EF \parallel AB$

Пусть $BD = 10x$, тогда $AB = 13x$ (по условию) $\Rightarrow$ $AD = 3x$.

~~$\triangle CFE$~~ Высота в прямоугольном $\triangle$ проведенная к гипотенузе равна:

$$CD^2 = BD \cdot AD \Rightarrow CD = \sqrt{10x \cdot 3x} = \sqrt{30}\,x$$

По теореме Пифагора для $\triangle ADC$: $AC = \sqrt{(\sqrt{30}x)^2 + (3x)^2} = \sqrt{39}\,x$.

По теореме Пифагора для $\triangle ABC$: $BC = \sqrt{169x^2 - 39x^2} = \sqrt{130}\,x$.

По свойству касательной и секущей: $CF \cdot CB = AC^2 \Rightarrow CF = \frac{AC^2}{CB} = \frac{39x^2}{\sqrt{130}\,x} = \frac{39}{\sqrt{130}}x$.

$\triangle CFE \sim \triangle ACD$ по двум углам: $\angle ADC = \angle FEC = 90^\circ$ и $\angle CFE = \angle DCA = \alpha$.

~~CF~~ Коэффициент подобия k: $k = \frac{AC}{CF} = \frac{\sqrt{39}\,x}{\frac{39}{\sqrt{130}}x} = \sqrt{\frac{130}{39}}$.

Тогда их площади относятся как k^2, т.е. как $\frac{130}{39}$.

Ответ: $\frac{130}{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

~~$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ Ограничения: $-1 \le \sin x \le 1$ — итак выполняется~~

~~$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$~~

~~$5\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x$~~

~~arccos возвращает значение угла $\in [0; \pi]$. Поэтому:~~

~~① когда ~~угол~~ угол $\frac{\pi}{2} - x \in [0; \pi]$: $5(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{3\pi}{2} + x$ $\pi = 6x$ $x = \frac{\pi}{6}$~~

~~Проверка: $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \in [0; \pi] \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ — решение~~

~~Решение~~

~~② ~~когда~~ $5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$. Т.к. $\arccos(\sin x) \in [0; \pi]$, то~~

~~$5\arccos(\sin x) \in [0; 5\pi]$. Ограничения арккосинуса выполняются: $|\sin x| \le 1$~~

~~$0 \le \frac{3\pi}{2} + x \le 5\pi \Rightarrow x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$ | $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$~~

~~• при $x \in [-\frac{3\pi}{2}$ $x \in [-\frac{3\pi}{2}; -\pi]$: $5\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x$~~

~~$5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x) + 2\pi = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow 6x = 3\pi$ $x = \frac{\pi}{2}$ — не на отрезке, не подходит~~

~~• при $x \in (-\pi; 0)$: —~~

Уравнение имеет вид: $5\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x$

• при ~~$\frac{\pi}{2} - x \in [-\pi; 0]$~~, т.е. при $x \in [$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$. Ограничения: $|\sin x| \le 1$ – выполняются

~~ТК~~ Т.к. $\arccos(\sin x) \in [0; \pi]$, то $5\arccos(\sin x) \in [0; 5\pi]$, ~~или~~ и

$0 \le \frac{3\pi}{2} + x \le 5\pi$ $\quad -\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$. $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ Уравнение имеет

следующий вид: $5\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$. Учитывая ограничения

на x: $-3\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le 2\pi$.

~~• при $-3\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le -2\pi$: $5\left(\frac{\pi}{2} - x + 3\pi\right) = \frac{3\pi}{2} + x$ $\quad \frac{5\pi}{2} - 5x + 15\pi = \frac{3\pi}{2} + x$~~

~~$6x = 16\pi$ $\quad x = \frac{8}{3}\pi$. $\frac{\pi}{2} - \frac{8\pi}{3} = \frac{-13\pi}{6}$ -~~

~~• при $-2\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le -\pi$: $5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi\right) = \frac{3\pi}{2} + x$ $\quad \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi = \frac{3\pi}{2} + x$~~

• при $-3\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le -2\pi$: $5\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2\pi\right) = \frac{3\pi}{2} + x$ $\quad 5\left(-\frac{5\pi}{2} + x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$4x = 14\pi$ $\quad x = \frac{7\pi}{2}$. $\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{2} = -3\pi \in [-3\pi; -2\pi]$ – $x = \frac{7\pi}{2}$ – корень

• при $-2\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le -\pi$: $5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi\right) = \frac{3\pi}{2} + x$ $\quad 5\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$6x = 11\pi$ $\quad x = \frac{11\pi}{6}$ $\quad \frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{6} = \frac{-16\pi}{12} = -\frac{4\pi}{3} \in [-2\pi; -\pi]$ – корень!

• при $-\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le 0$: $5\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$ $\quad 5x - \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + x$

~~$4x = 3\pi$~~ $4x = 4\pi$ $\quad x = \pi$ $\quad \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi; 0]$ – $x = \pi$ – корень!

• при $0 \le \frac{\pi}{2} - x \le \pi$: $5 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$ $\quad \frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$ $\quad 6x = \pi$

$x = \frac{\pi}{6}$ $\quad \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$ $\quad x = \frac{\pi}{6}$ – корень

• при $\pi \le \frac{\pi}{2} - x \le 2\pi$: $5 \cdot \left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi\right) = \frac{3\pi}{2} + x$ $\quad 5x - \frac{5\pi}{2} + 10\pi = \frac{3\pi}{2} + x$

$4x = -6\pi$ $\quad x = -\frac{3\pi}{2}$ $\quad \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 2\pi \in [\pi; 2\pi]$ $\quad x = -\frac{3\pi}{2}$ – корень!

Ответ: $x = \frac{7\pi}{2}$; π; $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

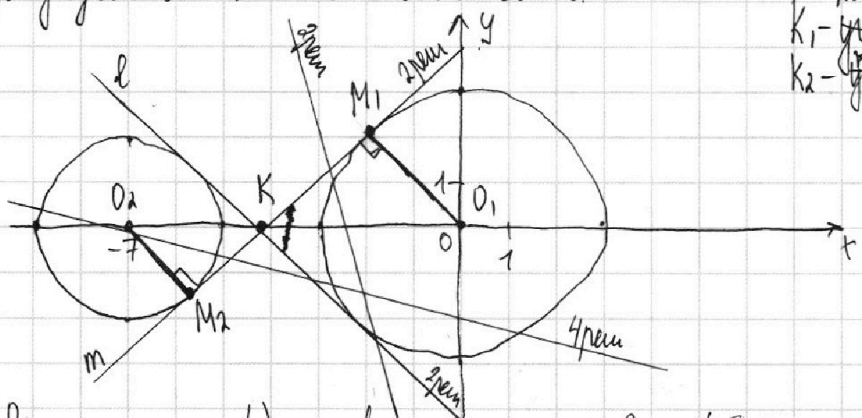
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\begin{cases} \cancel{x}+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3ay=-x+7b \quad (1) \\ ((x+7)^2+y^2-4)(x^2+y^2-9)=0 \quad (2) \end{cases}$$

(2) уравнение системы дает решения: $(x+7)^2+y^2=2^2$ или $x^2+y^2=3^2$ — уравнения окружностей с центрами в точках $(-7;0)$ и $(0;0)$ и радиусами 2 и 3 соответственно.

k_1 – коэф. ~~угол~~ наклона прямой в m
k_2 – коэф ~~угол~~ наклона прямой ~~m~~ l



Рассмотрим (1) уравнения когда $a=0$: ~~x~~ получим: $x+0-7b=0$ $x=7b$ — график прямой, из графика видно, что решений при такой системе максимум два $\Rightarrow$ $a=0$ — не подходит. Перепишем (1) ур-е в виде:

$$y=\frac{7b-x}{3a}=-\frac{x}{3a}+\frac{7b}{3a}.$$

Заметим, что коэффициент угла наклона прямой такого графика зависит только от $\underline{a}$, а то, насколько сдвинута прямая по вертикали зависит от b т.е. для любого a можно подобрать такое b, чтобы прямая занимала любое положение относительно по вертикали. Проведем общие касательные к окружностям, несложно увидеть, что при наклоне прямой $\in (k_2; k_1)$ всегда можно подобрать такое b, чтобы эта прямая пересекала окр-ти в 4-ех точках. при $k=k_1; k_2$ — решений всего 2, а при $k\in(-\infty; k_2)\vee(k_1;+\infty)$ — решений максимум 2

~~Пусть l, имеет уравнение: $y=k_2x+c_2$ прямая m: $y=k_1x+c_1$.~~
~~Подставим в ур-я окружностей l: ур-е для m:~~

$$\cancel{\begin{cases} x^2+14x+(k_1x+c_1)^2+45=0 \\ x^2+(k_1x+c_1)^2=0 \end{cases} \quad D=0 \quad x^2+14}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть M_1 и M_2 - точки касания прямой m и окружностей. Заметим, что окружности симметричны относительно оси X $\Rightarrow$ K - точка пересечения этих касательных, тоже лежит на оси X (в силу симметрии)

$\triangle O_2M_2K \sim \triangle O_1M_1K$ по двум углам: $\angle O_2M_2K = \angle O_1M_1K = 90°$, $\angle O_2KM_2 = \angle M_1KO_1$ - вертикальные) $\Rightarrow$

$$\frac{O_2K}{KO_1} = \frac{O_2M_2}{O_1M_1} = \frac{2}{3}.$$ А т.к. $O_1O_2 = 7$, то $O_2K = \frac{2}{5}\cdot 7$, $O_1K = \frac{3}{5}\cdot 7$

Коэффициент наклона прямой m равен $tg\angle M_1KO_1$. По теореме Пифагора для $\triangle M_1KO_1$: $KM_1 = \sqrt{O_1K^2 - O_1M_1^2} = \sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 3^2} = \sqrt{\left(\frac{21}{5}-3\right)\left(\frac{21}{5}+3\right)} = \sqrt{\frac{6}{5}\cdot\frac{36}{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{6}$

$$\Rightarrow tg\angle M_1KO_1 = \frac{M_1O_1}{KM_1} = \frac{3}{\frac{6\sqrt{6}}{5}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

Т.к. картинка симметрична относительно оси X, то коэффициент наклона прямой ℓ противоположен коэф. наклона прямой m. Т.е. равен $-tg\angle M_1KO_1 = -\frac{5\sqrt{6}}{12}$.

Т.к. коэффициента наклона прямой $y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$ не может равняться нулю, то: ~~ответ~~: значения параметра k, при которых сущ. пар. b выглядит так: $k \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{12}; 0\right) \cup \left(0; \frac{5\sqrt{6}}{12}\right)$

~~Ответ: $a \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{12}; 0\right) \cup \left(0; \frac{5\sqrt{6}}{12}\right)$~~ $k \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{12}; 0\right) \cup \left(0; \frac{5\sqrt{6}}{12}\right)$, где

$k = -\frac{1}{3a}$ (из ур-я прямой $y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$) $\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{5\sqrt{6}}{12} < -\frac{1}{3a} < 0 \\ 0 < -\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{6}}{12} \end{array}\right. \Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}; +\infty\right)$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$$

Ограничения: $x \neq \pm\frac{1}{6},\ x>0;\ y>0;\ y\neq \pm 1$

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \frac{3}{2}\log_{6x}7 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \frac{5}{2}\log_y 7 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_7^4(6x) - \frac{7}{2}\log_{6x}7 + 4 = 0 \quad (1) \\ \log_7^4 y + \frac{7}{2}\log_y 7 + 4 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

~~Пусть~~ $\cancel{f(x) = \log_7^4 x - \frac{7}{2}\log_x 7 + 4}$, $g(x) = \log_7^4 x + \frac{7}{2}\log_x 7 + 4$ — функции.

~~Пусть $\log_7 x = t$. Тогда функции можно представить в виде:~~

~~$f(t) = t^4 - \frac{7}{2t} + 4$, $g(t) = t^4 + \frac{7}{2t} + 4$. Возьмём производные от обеих функций:~~

~~$g(t) = t^4 + \frac{7}{2t} + 4$ и $f(t) = t^4 - \frac{7}{2t} + 4$ Возьмём производные от обеих функций: $g'(t) =$~~

$\log_7(6x)\neq 0$ и $\log_7(y)\neq 0$ т.к. $x\neq\frac{1}{6};\ y\neq 1$

Домножим (1) на $\log_7(6x)$, а (2) на $\log_7 y$. Получим:

$$\begin{cases} \log_7^5(6x) - \frac{7}{2} + 4\log_7(6x) = 0 \quad (3) \\ \log_7^5 y + \frac{7}{2} + 4\log_7 y = 0 \quad (4) \end{cases}$$

Пусть $f(x)$ выглядит следующим образом: $f(x) = \log_7^5 x - \frac{7}{2} + 4\log_7 x$, а $g(x) = \log_7^5 x + \frac{7}{2} + 4\log_7 \cancel{y}\,x$. Функции также можно представить в виде $f(t) = t^5 + 4t - \frac{7}{2}$, где $t = \log_7 x$

и $g(t) = t^5 + \cancel{4\log_7}\, 4t + \frac{7}{2}$, где $t = \log_7 x$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Возьмем производные от обеих функций:

$g'(t) = 5t^4 + 4$, $f'(t) = 5t^4 + 4$. Заметим, что производные обеих функций всегда положительны $\Rightarrow$ функции монотонно возрастают.

Т.к. ~~они~~ $\Rightarrow$ Они пересекаются ровно в 1 точке, когда:

$t^5 +$

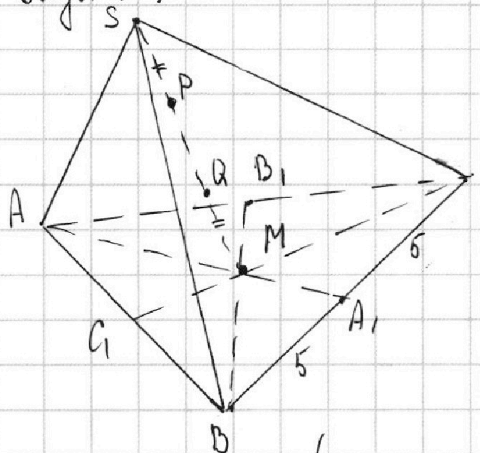
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

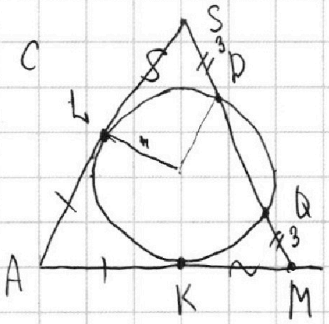
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 7



Рассмотрим сечение сферой пирамиды в плоскости ASM:



$AL = AK$ – касательные

По свойству о касательной и секущей:

~~$KM^2 = KQ \cdot K$~~

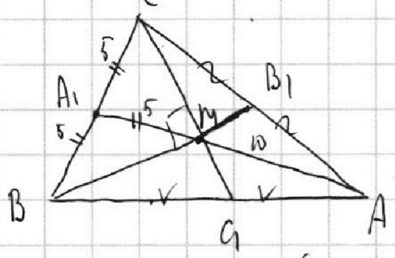
$KM^2 = MQ \cdot MP$, где

$SL^2 = SP \cdot SM$

$MQ = SP$, $MP = MQ$ (т.к. $MP = MQ + QP$, $SQ = SP + PQ$) $\Rightarrow KM = SL$.

Заметим, что $AM = AS = AL + LS = AK + KM = 10$. По свойству медианы для $\triangle ABC$: $AM : AA_1 = 2 : 3 \Rightarrow AA_1 = 15$. $\Rightarrow MA_1 = 5$.

Рассмотрим пл-ть ABC:



Рассмотрим $\triangle BMC$: у него медиана равна половине стороны $\Rightarrow$ он прямоугольный $\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$

Несколько раз воспользуемся методом площадей:

$S_{\triangle CBB_1} = \frac{1}{2} S$, где S – площадь $\triangle ABC$ (т.к. $CB_1 = B_1A$)

$S_{\triangle CMB} = \frac{2}{3} S_{\triangle BB_1C}$ (т.к. $BM : BB_1 = \frac{2}{3}$ – св-во точки пересечения медиан).

$\Rightarrow S_{\triangle CMB} = \frac{2}{3} \cdot S_{\triangle BB_1C} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} S = \frac{1}{3} S = \frac{1}{3} \cdot 60 = 20$. Т.к. $\triangle BMC$ – прямоугольный, то $S_{\triangle CMB} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot CM \Rightarrow BM \cdot CM = 2 \cdot 20 = 40$. При учете, что $BM = \frac{2}{3} BB_1$, $CM = \frac{2}{3} CC_1 \Rightarrow \frac{4}{9} \cdot CC_1 \cdot BB_1 = 40 \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = 90$. Т.к. $AA_1 = 15$ мы знаем, то: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 90 \cdot 15 = \underline{1350}$

Ответ: а) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 1350$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

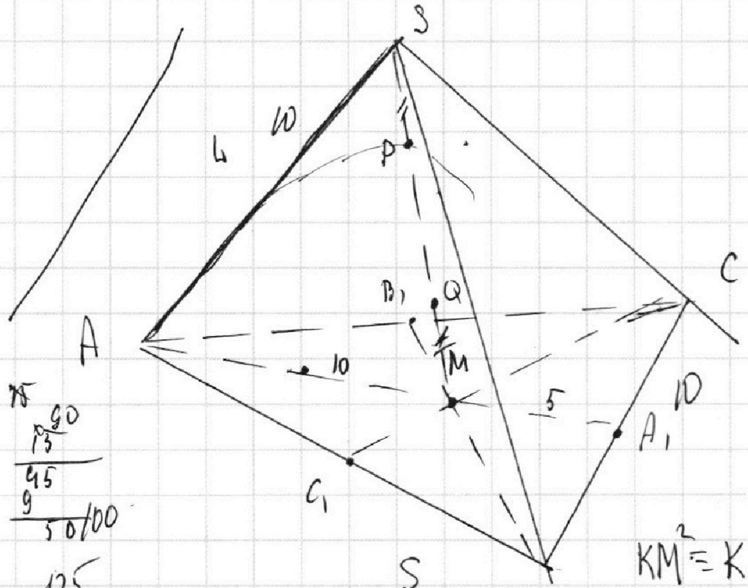
б) $SN = SP$ - касательные $\Rightarrow$ $SP = MQ = 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

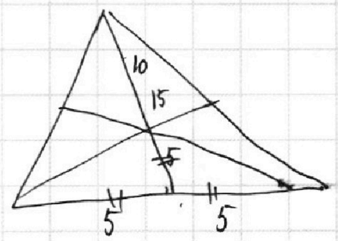
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$S_{ABC}=60$

$AA_1 : BB_1 : CC_1$



$KM^2 = KQ \quad KM = SL$

$LK \parallel$

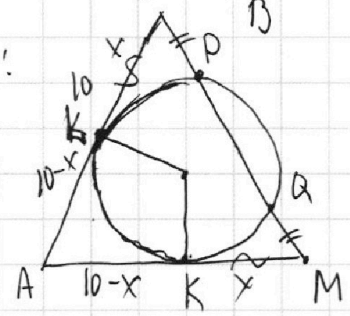
$AM=10$

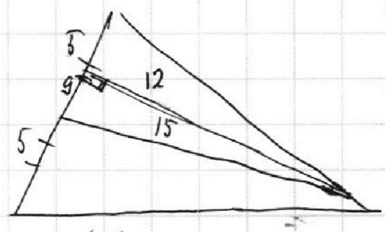
$AM=10$

$AA_1=15$

$S_{ABC}=60$

Пл-ть ASM!





$\frac{1}{2}\cdot BC\cdot h=60 \quad BC\cdot h=120 \quad h=\frac{120}{10}=12$

$\frac{3}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 60=20 \quad \log_7^4(6x)-\frac{7}{2}\log_y 7+4=0 \quad |\cdot 2\log_7(6x)$

$2\log_7^5(6x)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

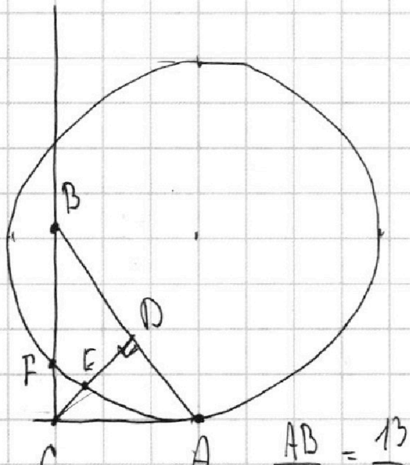
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

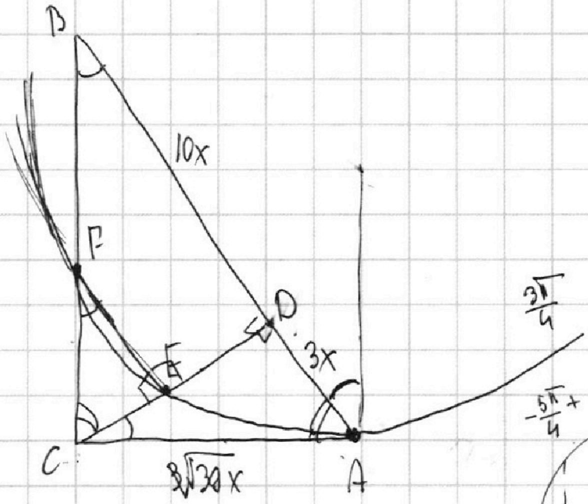
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

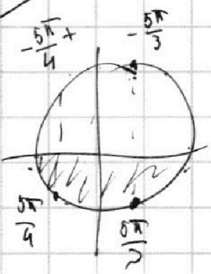
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ







$\frac{3\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}+2\pi$

$\frac{AB}{BD}=\frac{13}{10}$ $BD=\frac{10}{13}AB$ $CD=\sqrt{30x}$

$S_{\triangle ACD}:S_{\triangle CEF}$

$AC^2=CF\cdot CB=AD\cdot AB$

$\cancel{\triangle ACD \sim \triangle FCE} \sim$

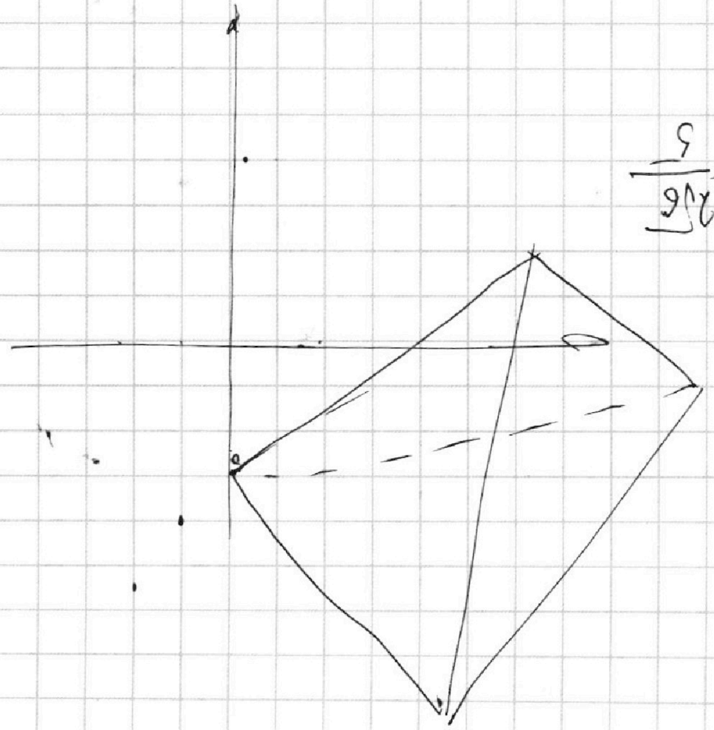
$AC^2=AB\cdot AD=13x\cdot 3x=39x^2$

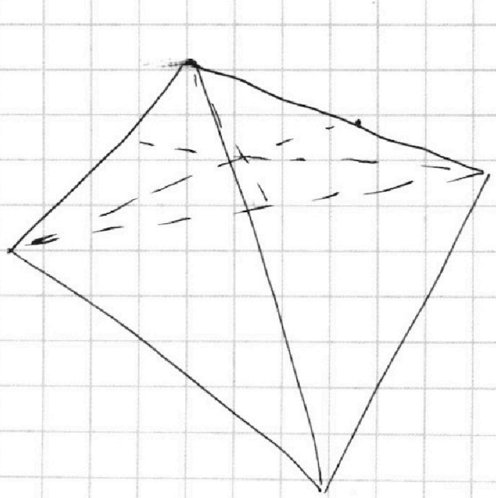
$\triangle ACD \sim \triangle CFE \sim \triangle ABC$

$AC=\sqrt{39}x$

$\frac{AC}{CF}=\frac{CD}{FE}=\frac{AD}{CE}$ $\frac{CF}{AB}=\frac{FE}{BC}=\frac{CE}{AC}$ $\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BC}=\frac{AD}{AC}$

$BC=\sqrt{169-39}x=\sqrt{130}x$ $CF=\frac{AC^2}{CB}=\frac{39}{\sqrt{130}}x$

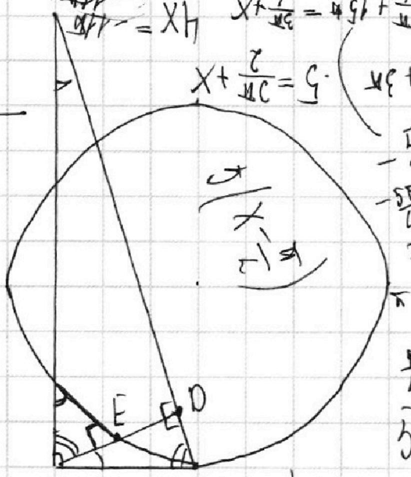


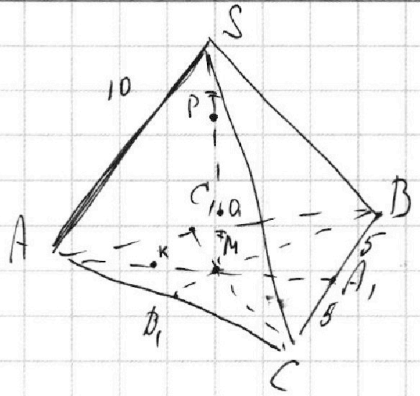


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





$5\arccos(\sin x) \in [0;\ 5\pi]$

$x \in \left[-\frac{3\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}\right]$

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$15\pi + \frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$

$6x = 16\pi \quad x = \frac{8\pi}{3}$

$\alpha = \frac{3\pi}{3}$

$\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2\pi\right)\cdot 5 = \frac{3\pi}{2} + x$

$-\frac{5\pi}{2} + 5x - 10\pi = \frac{3\pi}{2} + x$

$4x =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

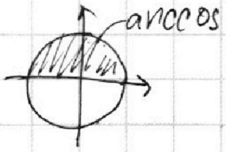
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ $\qquad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$



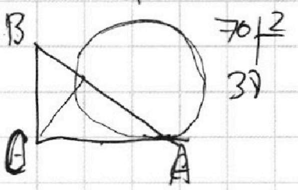
$5\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

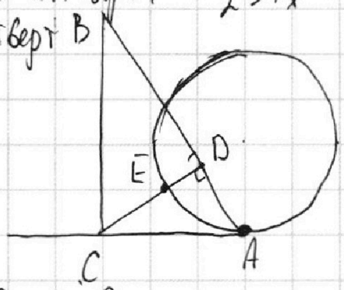
При $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, при $\frac{\pi}{2} - x \in I$ и IV четверти:

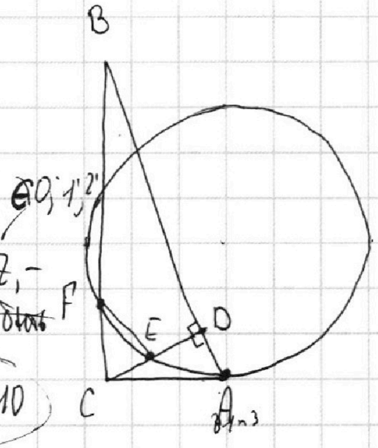
$5\cdot\frac{\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$, $\quad 6x = \pi \quad x = \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ – в I четв о-к

При $\frac{\pi}{2} - x$ во III и IV четверти: $\frac{\pi}{2}\cancel{\ldots} \;-5\cdot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x \quad -\frac{5\pi}{2} + 5x = \frac{3\pi}{2} + x$

$4x = 4\pi \quad x = \pi$ – в III четверт







$ab: 2^7\cdot 3^{11}\cdot 5^{14} \qquad abc - \min$

$bc: 2^{13}\, 3^{15}\, 5^{19}$

$ac: 2^{14}\, 3^{17}\, 5^{43}$

Пусть в a – x_1 двоек, y_1 – троек, z_1 – 5 x_1, y_1, z_1 – ~~могут быть~~

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_2 + x_3 \geq 13 \\ x_3 + x_1 \geq 14 \\ y_1 + y_2 \geq 11 \\ y_2 + y_3 \geq 15 \\ y_1 + y_3 \geq 17 \\ z_1 + z_2 = 14 \\ z_2 + z_3 \geq 18 \\ z_3 + z_1 \geq 43 \end{cases}$$

$+\begin{matrix}26\\17\end{matrix}$ 43

$2(x_1 + x_2 + x_3) = 34 \Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = 3,\ x_3 = 10$

$2(y_1 + y_2 + y_3) = 43 \qquad y_1 + y_2 + y_3 = 22$ (хотя бы 1 y больше на 1) $\quad y_3 = 11 \quad y_2 = 5 \quad y_1 = 6$

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_y(7^5) - 4 \end{cases}$$

Ограничения: $x > 0$, $x \neq \frac{1}{6}$, $\cancel{x^2} \, x \neq -\frac{1}{6}$

$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4$ ~~343 = 7·7·3·3~~ $2\_343\,|\,7$ 49 7^3

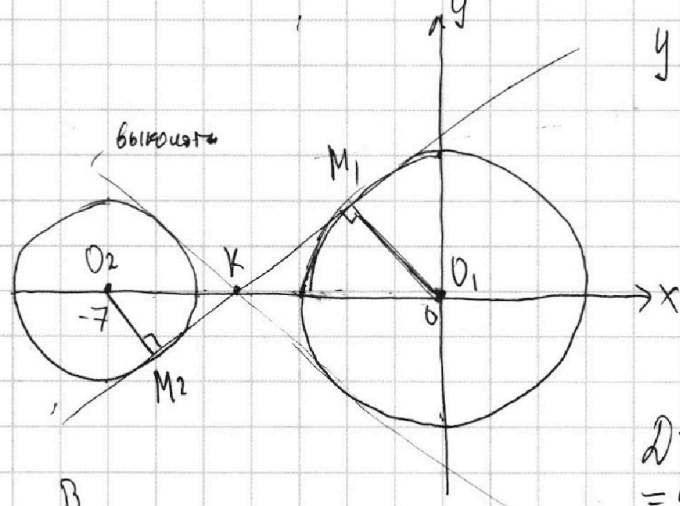
$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \frac{3}{2}\log_{6x}7 - 4$

$\log_7^4(6x) - 2\frac{1}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2}\frac{1}{\log_7(6x)} - 4$ $t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \;|\cdot 2t$

$2t^5+8t-4-3=0$ $a=0$ — 2 реш всего.

$2t^5+8t-7=0$

$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ ((x+7)^2+y^2-4)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$



$y = \frac{x-7b}{3a} = \frac{x}{3a} - \frac{7b}{a} = kx+d$

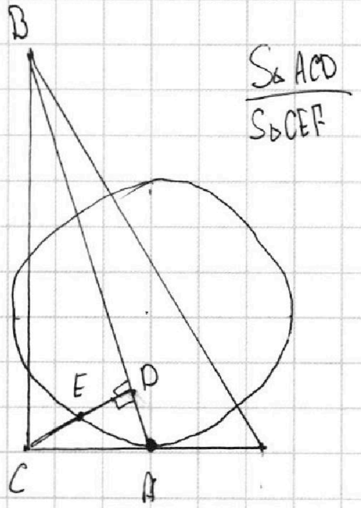
a – отв

$x^2+14x+k_1^2x^2+2k_1xc_1+c_1^2+45=0$

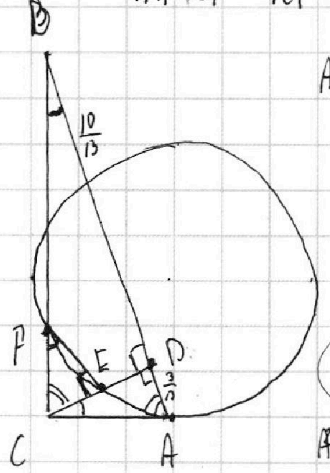
$x^2+k_1^2x_1^2+2k_1c_1x+c_1^2=0$

$(1+k_1^2)x^2+2k_1c_1x+c_1^2=0$

$D=4k_1^2c_1^2-4(1+k_1^2)c_1^2=$
$=4k_1^2c_1^2-4c_1^2+4k_1^2c_1^2$



$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}}$



$AB \parallel EF$,

$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$

$BD = \frac{AB}{13} AD$?

$\triangle CEF \sim \triangle ADC \sim \triangle ACB$

ADC $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$

$AC^2 = AB \cdot AD =$