



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Пусть $ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$, то $ab \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$. Аналогично
 $bc \geq 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$, $ac \geq 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$. Перемножим ab , bc ,
 ac : $ab \cdot bc \cdot ac \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$, т.е.
 $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{94} \cdot 3^{49} \cdot 5^{75}$. (числа a, b, c по условию натураль-
ные, поэтому при их перемножении никаких проблем со
знаком не возникает, так что $abc > 0$). Тогда:
 $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{24} \cdot 5^{37} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$, числа a, b и c — натураль-
ные, поэтому abc — тоже натуральное. Значит, оно
не иррациональное $\Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$.

Заметим, что показатели степеней простых мно-
жителей в разложении числа abc не могут быть
меньше показателей степеней простых множителей
в разложении чисел ab, bc, ac . То есть, если $ac \geq$
 $\geq 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$, то степень 5 в разложении abc не менее
43, т.к. abc содержит в себе множитель ac . Таким
образом, получаем, что $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$. Числа a
и b и bc подобны подобные множители соблюдены.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1 (продолжение).

Осталось показать, что равенство $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ возможно. Возьмем $a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{15}$, $b = 2^3 \cdot 3^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{28}$.

Действительно, $ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$, $bc = 2^{13} \cdot 3^{16} \cdot 5^{18}$,

$ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$, а $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

Дано: Решение:

$\triangle ABC$ - прямо-

угольный,

CD - высота,

$AB \parallel EF$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

Найти:

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

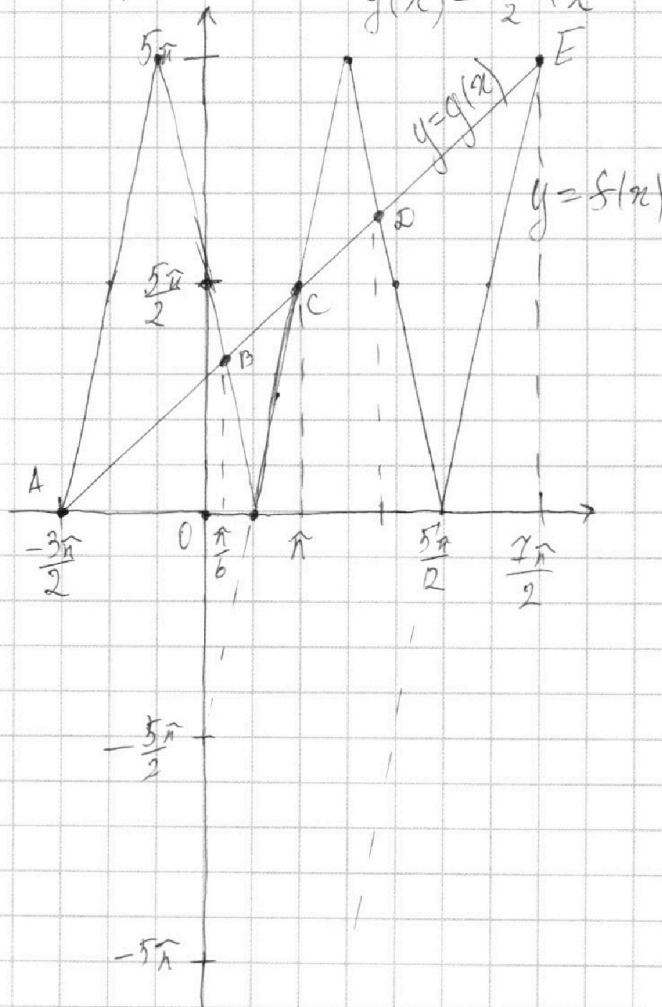
Задача 3.

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x.$$

Отметим, что $0 \leq \arccos(\sin x) \leq \pi \Rightarrow 0 \leq 5 \arccos(\sin x) \leq 5\pi$,

Поэтому мы рассматриваем такие x , что $0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$, т.е. $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$.

Построим графики $f(x) = 5 \arccos(\sin x)$ на отрезке $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$
 $g(x) = \frac{3\pi}{2} + x$



По графику проверим 5 точек: A, B, C, D, E:

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (продолжение)

Точка A принадлежит участку $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, где $f(x) = 5x + \frac{15}{2}\pi$.

$$\text{Тогда } 5x + \frac{15\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}.$$

Поступим аналогично для остальных точек:

$$B: f(x) = -5x + \frac{5\pi}{2}; \Rightarrow -5x + \frac{5\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$C: f(x) = 5x - \frac{5\pi}{2} \Rightarrow 5x - \frac{5\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \pi$$

$$D: f(x) = -5x + \frac{25\pi}{2} \Rightarrow -5x + \frac{25\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6}$$

$$E: f(x) = 5x - \frac{25\pi}{2} \Rightarrow 5x - \frac{25\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{2}.$$

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \pi, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



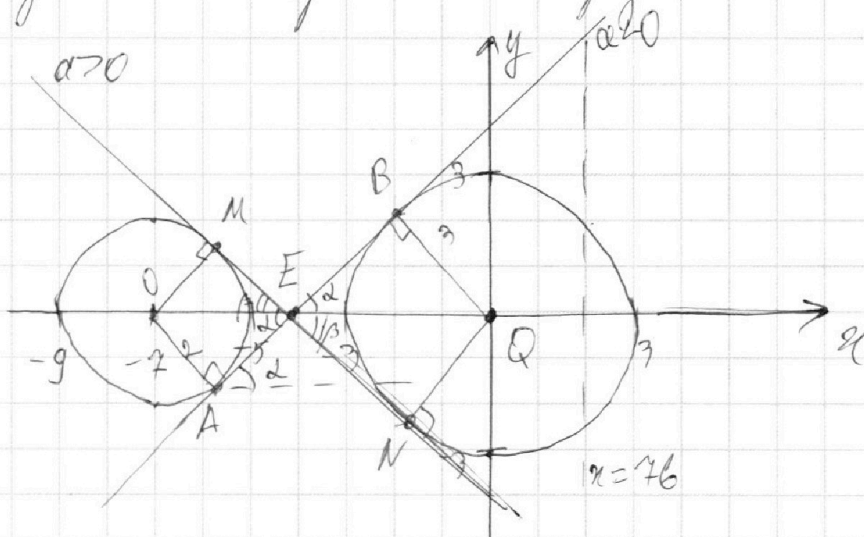
Задача 4.

$$\begin{cases} x + 2xy - 76 = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

Нижнее уравнение системы задает совокупность:

$$\begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 - \text{окр-ть с центром } O(-7; 0) \text{ и радиусом } r=2 \\ x^2 + y^2 = 9 - \text{окр-ть с центром } Q(0; 0) \text{ и радиусом } R=3. \end{cases}$$

Изобразим эти окр-ти на коорд. плоскости:



Сначала рассмотрим $a=0$. Тогда прямая (заданная уравнением $x=76$). Эта прямая всегда параллельна оси ординат \Rightarrow не имеет более двух общих точек с окр-тями при всех b . Значит, $a=0$ не подходит. Тогда при $a \neq 0$ прямая (задана: $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{76}{3a}$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

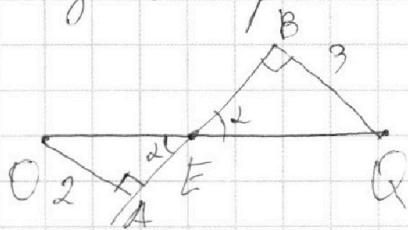


Задача 4 (продолжение).

Такая прямая имеет разный угол наклона и параллельно переносится на любые значения при разном b .

Пусть $a < 0$. Тогда $\frac{1}{-3a} > 0 \Rightarrow$ прямая l образует острый угол с осью абсцисс. Прямая будет 4 раза пересекать окружности при таких a , когда она не касается их обеих, как показано на графике (см. пред. стр.). При таком угле наклона ~~и~~ и угле больше него прямая будет сначала иметь 2 общие точки с окружностью с центром O , затем с окружностью с центром Q , но никак не одновременно. В случае же касания прямая l будет иметь по одной общей точке с окружностями.

Из геометрии найдем $\tan \alpha$:



$$OQ = 7, BQ = R = 3, OA = r = 2.$$

$$\triangle OAE \sim \triangle QBE \text{ по углу } \angle OEA \text{ и } \angle BEQ.$$
$$\frac{QE}{OE} = \frac{BQ}{OA} = \frac{3}{2} \Rightarrow QE = \frac{3}{2} \cdot OE$$

$$QE + OE = \frac{5}{2} OE = OQ = 7 \Rightarrow OE = \frac{14}{5}.$$

$$\tan \alpha = AE = \sqrt{OE^2 - OA^2} = \sqrt{\frac{196}{25} - \frac{100}{25}} = \frac{\sqrt{96}}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (продолжение)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OA}{AE} = \frac{2}{4\sqrt{6}} = \frac{2 \cdot 5}{4\sqrt{6}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = -\frac{1}{3a}$$

$$15a = -2\sqrt{6} \Rightarrow a = -\frac{2\sqrt{6}}{15} \Rightarrow \text{при } a < -\frac{2\sqrt{6}}{15} \quad \operatorname{tg} \alpha < \frac{5}{2\sqrt{6}},$$

и система может иметь 4 решения при каком-то a .

Картинка симметрична при $a=0$ прямая l соответственно будет убывать, и картинка будет симметрична относительно оси абсцисс той картинке,

которую мы рассматривали при $a < 0$. Соответственно 4 решения для $a > 0$ может быть при $a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$.

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5.

$$\begin{cases} \log_2^4(6x) - 2 \log_2 7 = \log_{26x}^2 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log_7 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4 \end{cases}$$

Сразу скажем про ограничения для x и y :

$$6x > 0 \Rightarrow x > 0 \quad 36x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm \frac{1}{6}$$

$$6x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{6} \quad y > 0, y \neq 1, y^2 \neq 1 \Rightarrow y \neq \pm 1$$

Подытожим: $x > 0, x \neq \frac{1}{6}, y > 0, y \neq 1$.

Разберёмся с верхним уравнением системы:

$$\log_2^4(6x) - 2 \cdot \frac{1}{\log_2 6x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 6x} - 4$$

Пусть $t = \log_2 6x$.

$$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4, t \neq 0$$

$$t^5 + 4t - 2 - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0 \quad (1)$$

Заметим, что $f(t) = t^5$ — возрастающая монотонно функция, $g(t) = t$ — тоже $\Rightarrow t^5 + 4t - \frac{7}{2} = h(t)$ монотонно возрастает, т.е. ур-е (1) имеет только 1 решение, которому соответствует только 1 значение x ($t = \log_2 6x$ тоже монотонно возрастает).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5 (продолжение)

Теперь проверим 0 нижним ур-ии системы:

$$\log_7^4 y + 6 \cdot \frac{1}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4$$

Пусть $n = \log_7 y$, $n \neq 0$. Тогда:

$$n^4 + \frac{6}{n} = \frac{5}{2n} - 4 \Rightarrow n^5 + 4n + 6 - \frac{5}{2} = 0$$

$$n^5 + 4n + \frac{7}{2} = 0 \quad (2)$$

Сравним (2) получаем аналогичную ситуацию, как и с ур-ем (1). Есть только одно

значение y , удовл. ур-ю (2). Сложим ур-я (1) и (2):

$$n^5 + 4n + t^5 + 4t + \frac{7}{2} - \frac{7}{2} = 0$$

$$n^5 + t^5 + 4(t+n) = 0$$

$$(t+n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4) + 4(t+n) = 0$$

$$(t+n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4) = 0$$

$$\begin{cases} t+n=0, \\ t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t+n=0 \\ \cancel{(t^2 - 2 \cdot t \cdot \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}t \cdot n^2 + n^4 + \frac{1}{2}t^2 + 4 = 0} \end{cases}$$

Для нижнего ур-я совокупности имеем:

$$(t^2)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}tn \cdot t^2 + \frac{1}{4}t^2n^2 + \frac{1}{4}t^2n^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}tn \cdot n^2 + n^4 + \frac{1}{2}t^2n^2 + 4 = 0$$

$$(t^2 - \frac{1}{2}tn)^2 + (\frac{1}{2}tn - n^2)^2 + \frac{1}{2}t^2n^2 + 4 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 (продолжение).
 $(t^2 - \frac{1}{2}tn)^2 \geq 0$, $(\frac{1}{2}tn - n^2)^2 \geq 0$, $\frac{1}{2}t^2n^2 \geq 0$, $4 > 0$, поэтому
 $(t^2 - \frac{1}{2}tn)^2 + (\frac{1}{2}tn - n^2)^2 + \frac{1}{2}t^2n^2 + 4 > 0$, т.е. левая часть
системы не имеет решений. Вот и остается:

$t+n=0 \Leftrightarrow \log_7 6x + \log_7 y = \log_7 1 \Rightarrow \log_7 6xy = \log_7 1$
 $6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$. Можно взять $x=1$, $y=\frac{1}{6}$. Тогда
как раз будет соблюдено ОДЗ и будет полу-
чатся такое значение xy .

Ответ: $\frac{1}{6}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

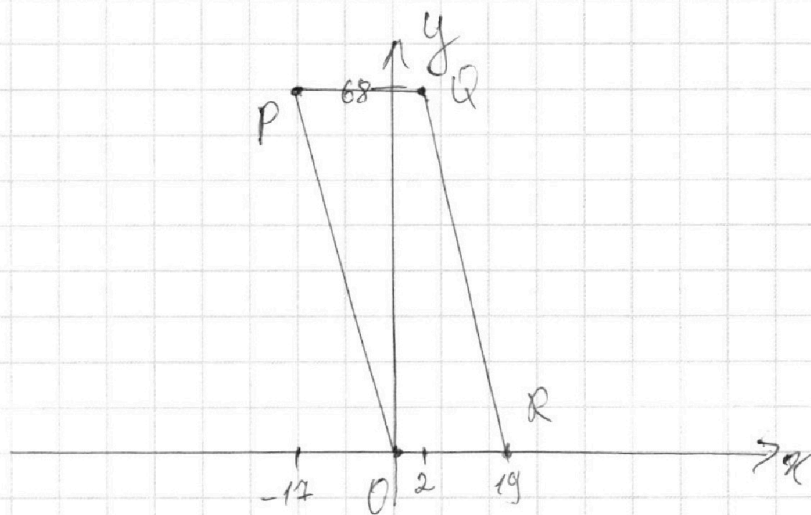
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.
Изобразим на координатной плоскости параллелограмм $OPQR$:



Заметим, что если у нас есть прямая $y = -4x + a$, и если ей принадлежат точки $(x_1, -4x_1 + a)$, а также есть прямая $y = -4x + 40 + a$, и если ей принадлежат точки $(x_2, -4x_2 + 40 + a)$, то как раз выполняется условие $4x_2 - 4x_1, -4x_2 + 40 + a + 4x_1 - a = 40$. То есть, нам нужно посчитать количество точек в параллелограмме $OPQR$ таких, что ^{первая} одна из них принадлежит прямой $y = -4x + a$, а вторая — прямой $y = -4x + a + 40$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

задача 6 (продолжение)

Сразу скажем, что сторона PQ задана уравнением ~~$y = -4x + 40$~~ $y = -4x$ (коор-ды точек P и O действительно удовл. этой прямой). Найдем прямую, задающую сторону QR :

$$\begin{cases} 68 = 2a + b & \text{— коор-ды т. } Q \\ 0 = 19a + b & \text{— коор-ды т. } R \end{cases} \Rightarrow a = -17 - 4, b = 46.$$

$$QR: y = -4x + 46$$

То есть две прямые $y = -4x + a$ и $y = -4x + a + 40$ можно сказать, что: $a \geq 0$, $a + 40 \leq 46$, т.к. прямые эти лежат в паралл-апе $OPQR$ или лежат на его границах. Отсюда $0 \leq a \leq 36$.

Через любую прямую такую. На любой такой прямой будет лежать 18 целых точек, т.к. $0 \leq y \leq 68$, т.е. мы ограничены сверху и снизу и ищем по целым точкам, т.е. $0 \leq -4x + a \leq 68$. Соответственно, у нас 37 значений a , для каждого из которых есть 18 точек на одной прямой, которые соответствуют по 18 точек

Для $a = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$ есть по 18 целых точек, для $a = 4k + 1, 4k + 2, 4k + 3$ по 17.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 (продолжение)

$$10 \cdot 18 \cdot 18 + 9 \cdot 17 \cdot 17 + 9 \cdot 17 \cdot 17 + 9 \cdot 17 \cdot 17$$

Ответ: $10 \cdot 18 \cdot 18 + 9 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4(6x) - 2\log_6 x^7 = \frac{3}{2} \log_6 x^7 - 4$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7 y^7 = \frac{5}{2} \log_7 y^7 - 4$$

$$\log_7^4 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 6x} - 4$$

$$t = \log_7 6x \quad t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$$

$$t^5 - 2 = \frac{3}{2} - 4t \quad t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0$$

$$\boxed{\begin{matrix} x > 0 \\ x \neq \pm \frac{1}{6} \end{matrix}}$$

$$x \neq$$

$$36x^2 - 170$$

$$(6x-1)(6x+1) \neq 0$$

$$\boxed{\begin{matrix} y > 0 \\ y \neq \pm 1 \end{matrix}}$$

$$\log_7 n = \log_7 y$$

$$n^4 + \frac{6}{n} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n} - 4 \quad n^5 + 6 - \frac{5}{2} + 4n = 0$$

$$n^5 + 4n + \frac{7}{2} = 0$$

$$t+n = \log_7 6xy$$

$$t^5 + n^5 + 4(t+n) = 0$$

$$(t+n)(t^4 + t^3n + t^2n^2 + tn^3 + n^4) + 4(t+n) = 0$$

$$t+n=0 \quad (t^4 + t^3n + t^2n^2 + tn^3 + n^4) + 4 = 0$$

$$6xy = t$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$t^4 + n^4 + tn(t^2 + n^2) + t^2n^2 = 0$$

$$t^4 + n^4 + tn(t^2 + n^2) + t^2n^2 = 0$$

$$(t+n)$$

$$(t+n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4) + 4(t+n) = 0$$

$$t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4 = 0$$

$$(t+n)(t^3 - tn^2 + 4 + t^2n^2 - tn(t^2 + n^2)) = 0$$

$$(t^2 + n^2)^2 - t^2n^2 - tn(t^2 + n^2) + 4 = 0 \quad (t^2 + n^2)^2 - tn(t^2 + n^2) + 4 - t^2n^2 = 0$$

$$t \quad (t^2 + n^2)^2 - tn(t^2 + n^2) + 4 - t^2n^2 = 0$$

$$t^4 - t^3n + \frac{1}{2}t^2n^2 + \frac{1}{2}t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4 = 0$$

$$t^4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot tn + \frac{1}{4}t^2n^2 + \frac{1}{4}t^2n^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}tn \cdot n^2 + n^4 + 4 = 0$$

$$(t^2 - \frac{1}{2}tn)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

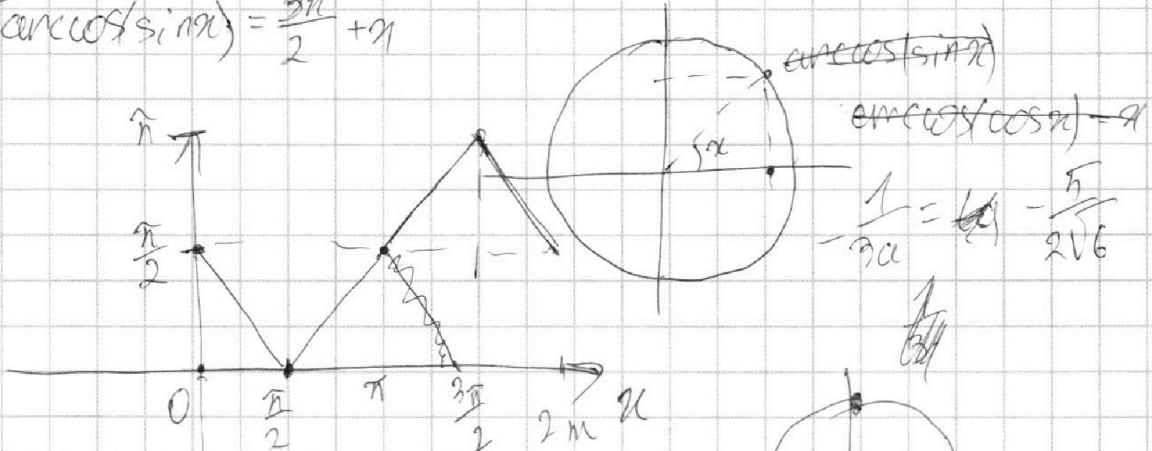
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

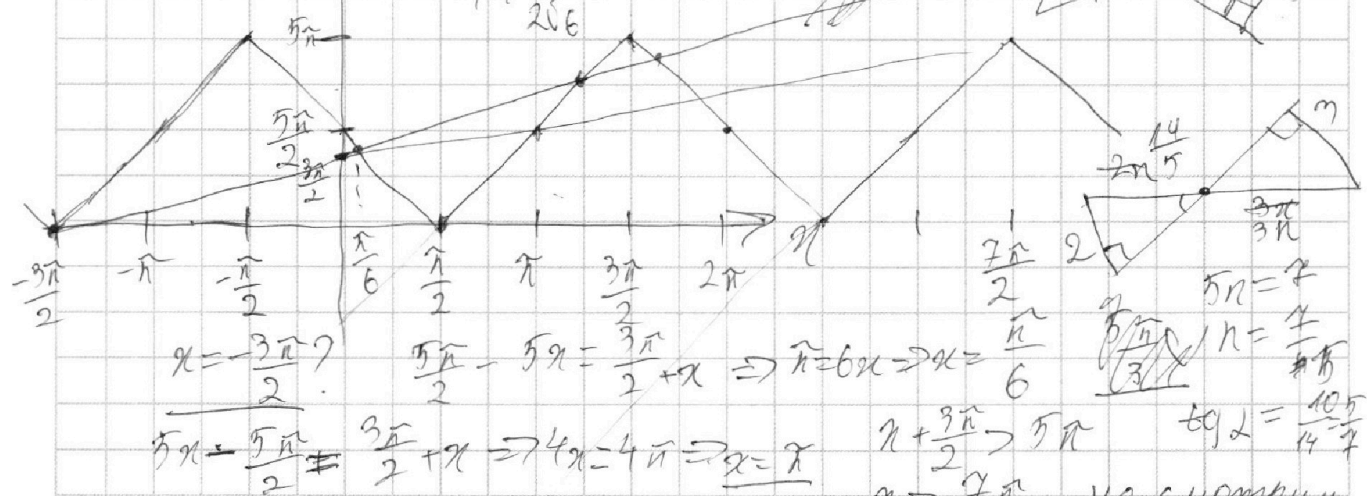
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

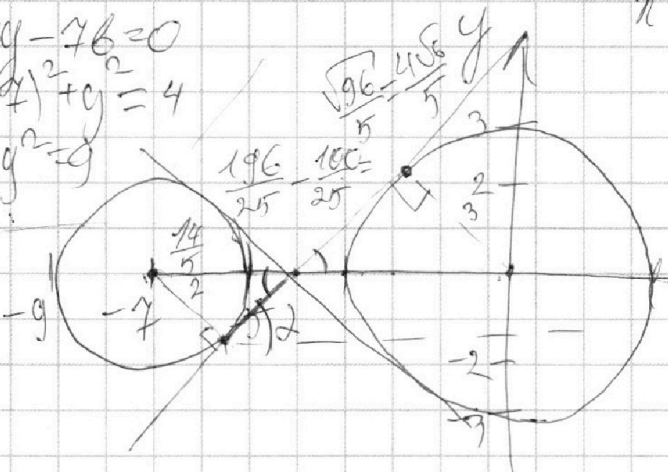
$$5 \cos(\cos(\sin \alpha)) = \frac{3\pi}{2} + \pi$$



1) $4 \cdot 24 = 16 \cdot 6$
 $-1 < \frac{5}{2\sqrt{6}}$
 $3\alpha = \frac{15\alpha}{2\sqrt{6}}$
 $-14 \frac{15\alpha}{2\sqrt{6}}$
 $\alpha < \frac{2\sqrt{6}}{15}$



$$\begin{cases} x + 2xy - 16 = 0 \\ (x+4)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$



$\alpha \neq 0: 2xy + 2y = -x + 16$
 $y = -\frac{1}{3\alpha}x + \frac{16}{3\alpha}$
 $\alpha < 0: \text{tg } \alpha = -\frac{1}{3\alpha} = \frac{\pi}{1}$
 $3\alpha - 15\alpha = -12$
 $\alpha = -\frac{2}{3}$



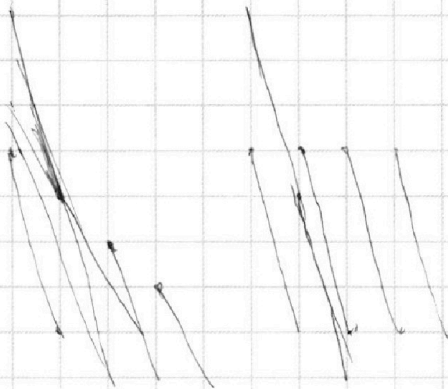
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



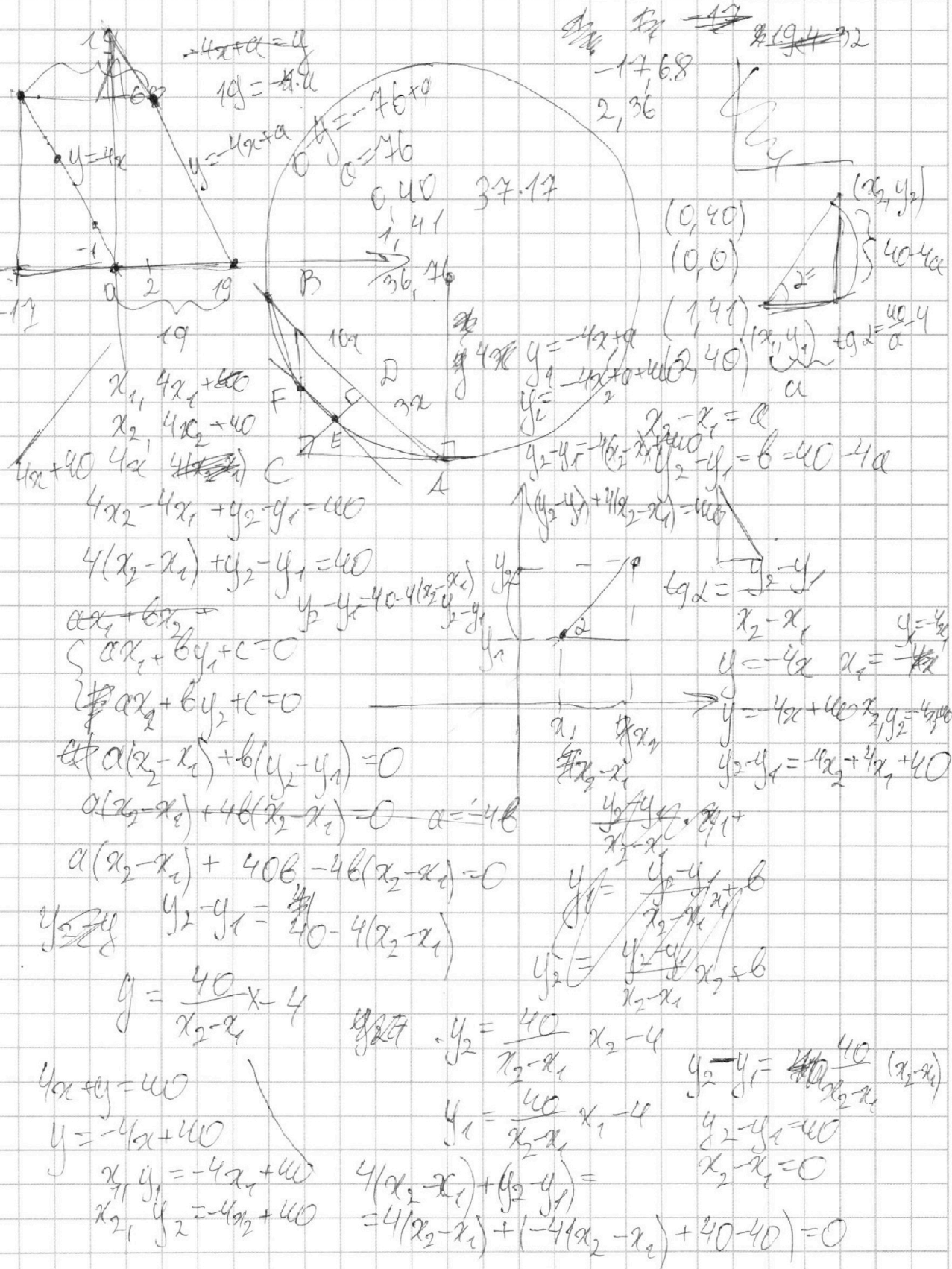
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

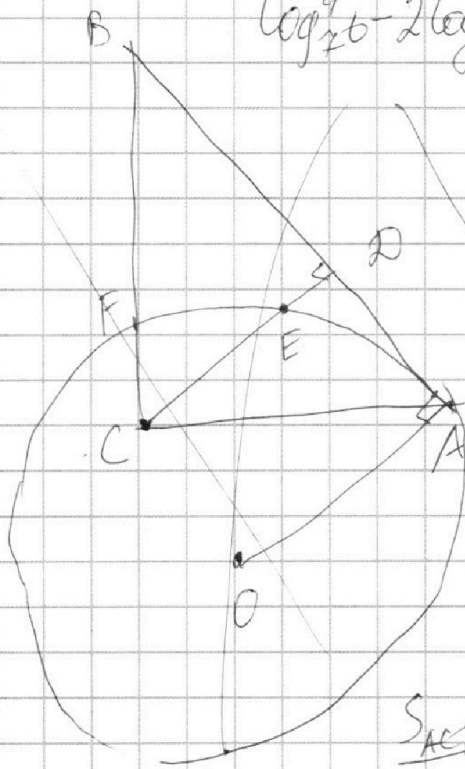
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

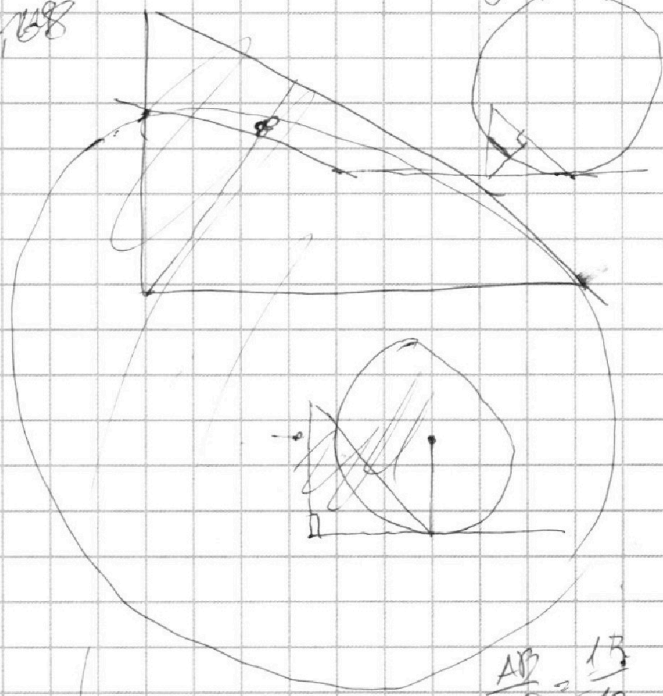
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{\frac{4}{7}} 6 - 2 \log_{\frac{4}{7}} 7 = \log_{\frac{4}{7}} 36 \quad 7^2 = 49 \Rightarrow \log_{\frac{4}{7}} 6 - \frac{2}{\log_7 4} = \frac{3}{\log_7 6}$$



44/168

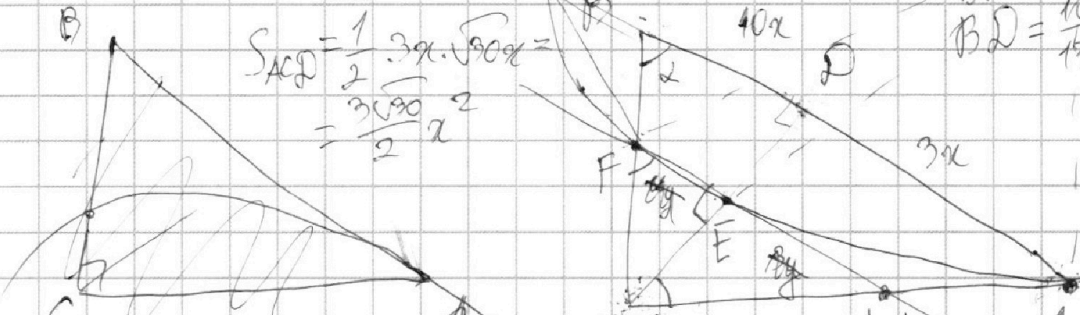


$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

$$BD = \frac{10}{13} AB$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \sqrt{90}x = \frac{3\sqrt{90}}{2} x^2$$



$\frac{CE}{CD} = \frac{10y}{20x} = \frac{y}{2x}$
 $CD^2 = BD \cdot AD = 30x^2$
 $CE = 30y^2$

$AC^2 = CE \cdot CD$
 $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BC} = \frac{CL}{FL}$
 $\frac{y^2}{x^2} = \frac{y}{x} \Rightarrow xy^2 = yx^2 \Rightarrow y = x?$

$\frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow CD = x\sqrt{90}$
 $AC^2 = CD^2 + AD^2 = 39x^2$
 $AC = x\sqrt{39}$

$\frac{CE}{CD} = \frac{FE}{BD} = \frac{CE}{BC}$
 $CE^2 = FE \cdot EL$
 $\frac{FL}{BA} = \frac{CL}{AC}$

$AL^2 = LE \cdot FL$
 $\frac{AL}{CE} = \frac{BE}{CF}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$, $bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$, $ac: 2^{11} \cdot 3^{14} \cdot 5^{18}$
 $ab: 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$
 $bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$
 $ac: 2^{11} \cdot 3^{14} \cdot 5^{18}$
 $abc = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ $abc = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{49}$
 $a \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ $b \geq 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$ $c \geq 2^{11} \cdot 3^{14} \cdot 5^{18}$
 $a \geq 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^{14}$ $abc \geq 2^{27} \cdot 3^{32} \cdot 5^{61}$ $abc \geq 2^{20} \cdot 3^4 \cdot 5^{43}$
 $1 \leq \frac{c}{b} \leq c$ $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$
 $abc = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$ $\Rightarrow b = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$ $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$
 $a \geq 2$, $b \geq 3$, $c \geq 5$ $abc \geq 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$
 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{3^2}$ $\frac{a}{b} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^{25}$ $ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$
 $\frac{c}{b} = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \Rightarrow a = b \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5^{25}$
 $a = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{29} \Rightarrow c = a \cdot 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4$
 $ac = ab \cdot 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{29} = 2^{21}$
 $d_1 + d_2 + d_3 = 17$
 $d_1 + d_2 \neq 7$
 $d_2 + d_3 \neq 14$
 $d_1 + d_3 \neq 14$
 $d_3 - d_2 = 4 \Rightarrow d_3 = 10, d_2 = 3, d_1 = 4$
 $d_2 + d_3 = 13$
 $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 22$
 $\beta_1 + \beta_2 \neq 11$
 $\beta_2 + \beta_3 \neq 15$
 $\beta_1 + \beta_3 \neq 17$
 $\beta_3 - \beta_2 = 6 \Rightarrow \beta_3 = 10, \beta_1 = 6, \beta_2 = 8, 5, 4, 5$
 $\beta_3 + \beta_2 = 15$
 $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 39$
 $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 14$
 $\gamma_2 + \gamma_3 = 18$
 $\gamma_1 + \gamma_3 = 43$
 $\gamma_3 - \gamma_2 = 29 \Rightarrow \gamma_3 = 23, \gamma_2 = 6 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0$
 $\gamma_2 + \gamma_3 = 18$
 $2\gamma_3 = 44$
 $\gamma_3 = 22, \gamma_1 = 17$
 $C = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$
 $abc: 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$



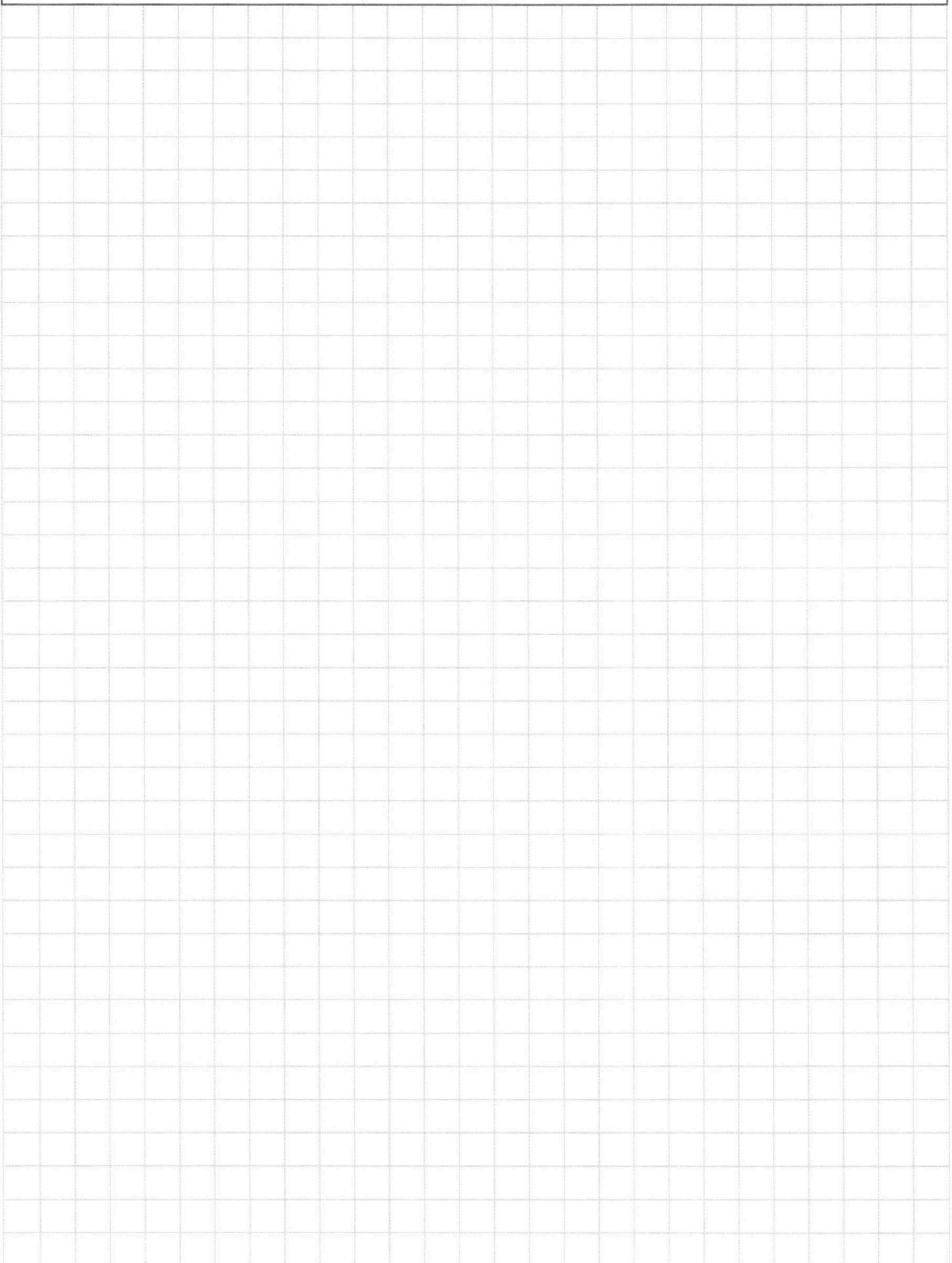
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

