



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 1

Пусть  $ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ , то  $ab \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ . Аналогично  
 $bc \geq 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$ ,  $ac \geq 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$ . Перемножим  $ab$ ,  $bc$ ,  
 $ac$ :  $ab \cdot bc \cdot ac \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$ , т.е.  
 $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{94} \cdot 3^{49} \cdot 5^{75}$ . (числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  по условию натураль-

ные, поэтому при их перемножении никаких проблем со  
знаком не возникает, так что  $abc > 0$ ). Тогда:

$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{24} \cdot 5^{37} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ , числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  — натураль-  
ные, поэтому  $abc$  — тоже натуральное. Значит, оно  
не иррациональное  $\Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$ .

Заметим, что показатели степеней простых мно-  
жителей в разложении числа  $abc$  не могут быть  
меньше показателей степеней простых множителей  
в разложении чисел  $ab$ ,  $bc$ ,  $ac$ . То есть, если  $ac \geq$   
 $\geq 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$ , то степень 5 в разложении  $abc$  не менее  
43, т.к.  $abc$  содержит в себе множитель  $ac$ . Таким  
образом, получаем, что  $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ . С числами  
 $a$ ,  $b$  и  $c$  подобно подобным условиям соблюдаются.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1 (продолжение).

Осталось показать, что равенство  $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$  возможно. Возьмём  $a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{15}$ ,  $b = 2^3 \cdot 3^5$ ,  $c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{28}$ .

Действительно,  $ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ ,  $bc = 2^{13} \cdot 3^{16} \cdot 5^{18}$ ,

$ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$ , а  $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ .

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

Дано: Решение:

$\triangle ABC$  - прямо-

угольный,

$CD$  - высота,

$AB \parallel EF$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

Найти:

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

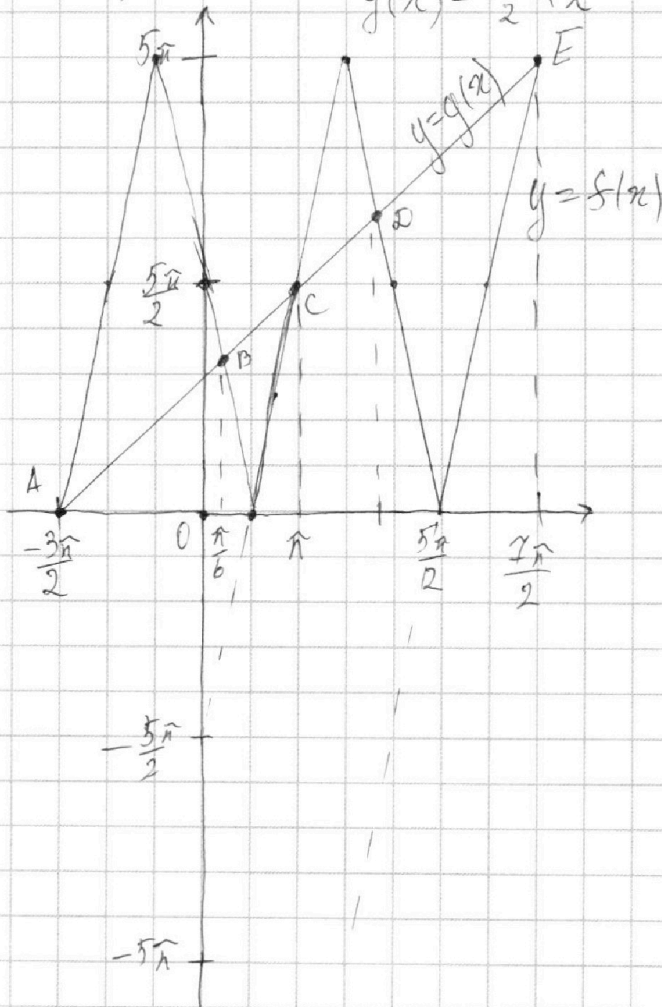
Задача 3.

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x.$$

Отметим, что  $0 \leq \arccos(\sin x) \leq \pi \Rightarrow 0 \leq 5 \arccos(\sin x) \leq 5\pi$ ,

Поэтому мы рассматриваем такие  $x$ , что  $0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$ , т.е.  $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$ .

Построим графики  $f(x) = 5 \arccos(\sin x)$  на отрезке  $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$   
 $g(x) = \frac{3\pi}{2} + x$



По графику проверим 5 точек: A, B, C, D, E:

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (продолжение)

Точка A принадлежит участку  $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$ , где  $f(x) = 5x + \frac{15}{2}\pi$ .

$$\text{Тогда } 5x + \frac{15\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}.$$

Поступим аналогично для остальных точек:

$$B: f(x) = -5x + \frac{5\pi}{2}; \Rightarrow -5x + \frac{5\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$C: f(x) = 5x - \frac{5\pi}{2} \Rightarrow 5x - \frac{5\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \pi$$

$$D: f(x) = -5x + \frac{25\pi}{2} \Rightarrow -5x + \frac{25\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6}$$

$$E: f(x) = 5x - \frac{25\pi}{2} \Rightarrow 5x - \frac{25\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{2}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \pi, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



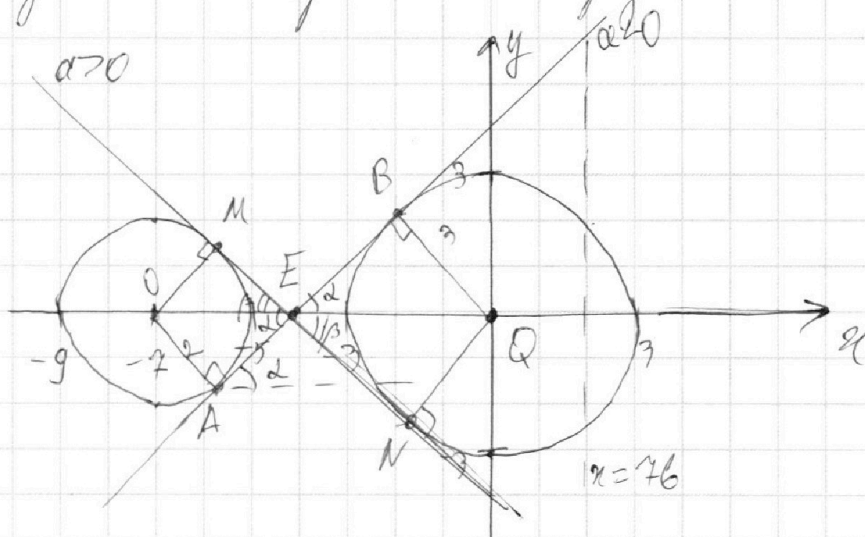
### Задача 4.

$$\begin{cases} x + 2xy - 76 = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

Нижнее уравнение системы задает совокупность:

$$\begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 - \text{окр-ть с центром } O(-7; 0) \text{ и радиусом } r=2 \\ x^2 + y^2 = 9 - \text{окр-ть с центром } Q(0; 0) \text{ и радиусом } R=3. \end{cases}$$

Изобразим эти окр-ти на коорд. плоскости:



Сначала рассмотрим  $a=0$ . Тогда прямая (заданная уравнением  $x=76$ ). Эта прямая всегда параллельна оси ординат  $\Rightarrow$  не имеет более двух общих точек с окр-тями при всех  $b$ . Значит,  $a=0$  не подходит. Тогда при  $a \neq 0$  прямая (задана:  $y = -\frac{1}{2a}x + \frac{76}{2a}$ )



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

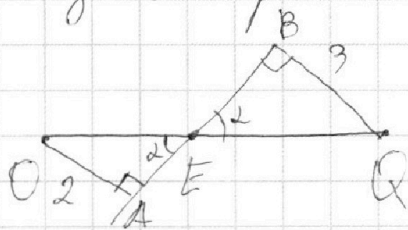


### Задача 4 (продолжение).

Такая прямая имеет разный угол наклона и параллельно переносится на любые значения при разном  $b$ .

Пусть  $a < 0$ . Тогда  $\frac{1}{-3a} > 0 \Rightarrow$  прямая  $l$  образует острый угол с осью абсцисс. Прямая будет 4 раза пересекать окружности при таких  $a$ , когда она не касается их обеих, как показано на графике (см. пред. стр.). При таком угле наклона ~~и~~ и угле больше него прямая будет сначала иметь 2 общие точки с окружностью с центром  $O$ , затем с окружностью с центром  $Q$ , но никак не одновременно. В случае же касания прямая  $l$  будет иметь по одной общей точке с окружностями.

Из геометрии найдем  $\tan \alpha$ :



$$OQ = 7, BQ = R = 3, OA = r = 2.$$

$$\triangle OAE \sim \triangle QBE \text{ по углу } \angle OEA \text{ и } \angle BEQ.$$
$$\frac{QE}{OE} = \frac{BQ}{OA} = \frac{3}{2} \Rightarrow QE = \frac{3}{2} \cdot OE$$

$$QE + OE = \frac{5}{2} OE = OQ = 7 \Rightarrow OE = \frac{14}{5}.$$

$$\tan \alpha = AE = \sqrt{OE^2 - OA^2} = \sqrt{\frac{196}{25} - \frac{100}{25}} = \frac{\sqrt{96}}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (продолжение)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OA}{AE} = \frac{2}{4\sqrt{6}} = \frac{2 \cdot 5}{4\sqrt{6}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = -\frac{1}{3a}$$
$$15a = -2\sqrt{6} \Rightarrow a = -\frac{2\sqrt{6}}{15} \Rightarrow \text{при } a < -\frac{2\sqrt{6}}{15} \quad \operatorname{tg} \alpha < \frac{5}{2\sqrt{6}},$$

и система может иметь 4 решения при каком-то  $a$ .  
Картинка симметрична при  $a > 0$  прямая  $l$  соответственно будет убывать, и картинка будет симметрична относительно оси абсцисс той картинке, которую мы рассматривали при  $a < 0$ . Соответственно 4 решения для  $a > 0$  может быть при  $a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$ .

Ответ:  $a \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_7^2 7 = \log_{36x}^2 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log_7^2 7 = \log_{y^2}^2(7^5) - 4 \end{cases}$$

Сразу скажем про ограничения для  $x$  и  $y$ :

$$6x > 0 \Rightarrow x > 0 \quad 36x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm \frac{1}{6}$$

$$6x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{6} \quad y > 0, y \neq 1, y^2 \neq 1 \Rightarrow y \neq \pm 1$$

Подытожим:  $x > 0, x \neq \frac{1}{6}, y > 0, y \neq 1$ .

Разберёмся с верхним уравнением системы:

$$\log_7^4(6x) - 2 \cdot \frac{1}{\log_7 6x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 6x} - 4$$

Пусть  $t = \log_7 6x$ .

$$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4, t \neq 0$$

$$t^5 + 4t - 2 - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow t^5 + 4t - \frac{7}{2}(t+1) = 0 \quad (1)$$

Заметим, что  $f(t) = t^5$  — возрастающая монотонно функция,  $g(t) = t - \frac{7}{2}$  — тоже  $\Rightarrow t^5 + 4t - \frac{7}{2} = h(t)$  монотонно возрастает, т.е. ур-е (1) имеет только 1 решение, которому соответствует только 1 значение  $x$  ( $t = \log_7 6x$  тоже монотонно возрастает).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 5 (продолжение)

Теперь проверим 0 нижним ур-ии системы:

$$\log_7^4 y + 6 \cdot \frac{1}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4$$

Пусть  $n = \log_7 y$ ,  $n \neq 0$ . Тогда:

$$n^4 + \frac{6}{n} = \frac{5}{2n} - 4 \Rightarrow n^5 + 4n + 6 - \frac{5}{2} = 0$$

$$n^5 + 4n + \frac{7}{2} = 0 \quad (2)$$

Сравним (2) получаем аналогичную ситуацию, как и с ур-ем (1). Есть только одно

значение  $y$ , удовл. ур-ю (2). Сложим ур-я (1) и (2):

$$n^5 + 4n + t^5 + 4t + \frac{7}{2} - \frac{7}{2} = 0$$

$$n^5 + t^5 + 4(t+n) = 0$$

$$(t+n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4) + 4(t+n) = 0$$

$$(t+n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4) = 0$$

$$\begin{cases} t+n=0, \\ t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t+n=0 \\ \cancel{(t^2 - 2 \cdot t \cdot \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}t \cdot n^2 + n^4 + \frac{1}{2}t^2 + 4 = 0} \end{cases}$$

Для нижнего ур-я совокупности имеем:

$$(t^2)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}tn \cdot t^2 + \frac{1}{4}t^2n^2 + \frac{1}{4}t^2n^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}tn \cdot n^2 + n^4 + \frac{1}{2}t^2n^2 + 4 = 0$$

$$(t^2 - \frac{1}{2}tn)^2 + (\frac{1}{2}tn - n^2)^2 + \frac{1}{2}t^2n^2 + 4 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 (продолжение).  
 $(t^2 - \frac{1}{2}tn)^2 \geq 0$ ,  $(\frac{1}{2}tn - n^2)^2 \geq 0$ ,  $\frac{1}{2}t^2n^2 \geq 0$ ,  $4 > 0$ , поэтому  
 $(t^2 - \frac{1}{2}tn)^2 + (\frac{1}{2}tn - n^2)^2 + \frac{1}{2}t^2n^2 + 4 > 0$ , т.е. левая часть  
системы не имеет решений. Вот и остается:

$t+n=0 \Leftrightarrow \log_7 6x + \log_7 y = \log_7 1 \Rightarrow \log_7 6xy = \log_7 1$   
 $6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$ . Можно взять  $x=1$ ,  $y=\frac{1}{6}$ . Тогда  
как раз будет соблюдено ОДЗ и будет полу-  
чатся такое значение  $xy$ .

Ответ:  $\frac{1}{6}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

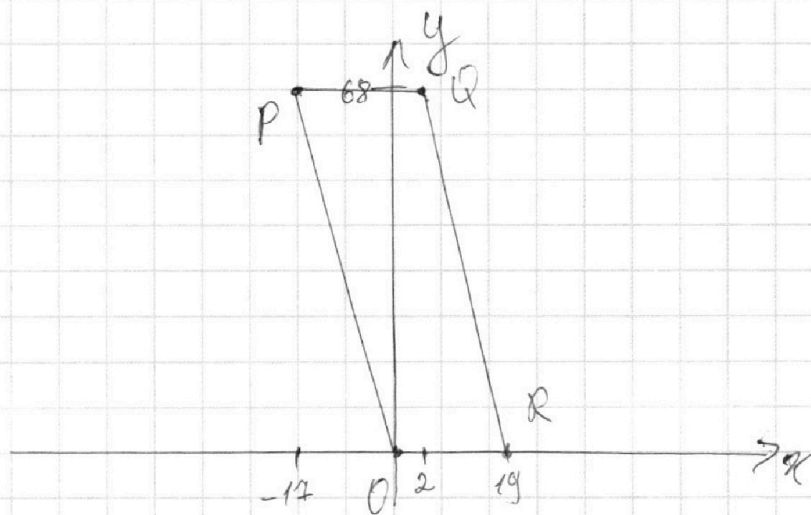
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.  
Изобразим на координатной плоскости параллелограмм  $OPQR$ :



Заметим, что если у нас есть прямая  $y = -4x + a$ , и если ей принадлежат точки  $(x_1, -4x_1 + a)$ , а также есть прямая  $y = -4x + 40 + a$ , и если ей принадлежат точки  $(x_2, -4x_2 + 40 + a)$ , то как раз выполняется условие  $4x_2 - 4x_1, -4x_2 + 40 + a + 4x_1 - a = 40$ . То есть, нам нужно посчитать количество точек в параллелограмме  $OPQR$  таких, что <sup>первая</sup> одна из них принадлежит прямой  $y = -4x + a$ , а вторая — прямой  $y = -4x + a + 40$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

задача 6 (продолжение)

Сразу скажем, что сторона  $PQ$  задана уравнением  ~~$y = -4x$~~   $y = -4x$  (коор-ды точек  $P$  и  $O$  действительно удовл. этой прямой). Найдем прямую, задающую сторону  $QR$ :

$$\begin{cases} 68 = 2a + b & \text{— коор-ды т. } Q \\ 0 = 19a + b & \text{— коор-ды т. } R \end{cases} \Rightarrow a = -17 - 4, b = 76.$$

$$QR: y = -4x + 76$$

То есть две прямые  $y = -4x + a$  и  $y = -4x + a + 40$  можно сказать, что:  $a \geq 0$ ,  $a + 40 \leq 76$ , т.к. прямые эти лежат в паралл-ле  $OPQR$  или лежат на его границах. Отсюда  $0 \leq a \leq 36$ .

Через любую прямую такую. На любой такой прямой будет лежать 18 целых точек, т.к.  $0 \leq y \leq 68$ , т.е. мы ограничены сверху и снизу и ищем по целым точкам, т.е.  $0 \leq -4x + a \leq 68$ . Соответственно, у нас 37 значений  $a$ , для каждого из которых есть 18 точек на одной прямой, которые соответствуют по 18 точек

Для  $a = 4k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  есть по 18 целых точек, для  $a = 4k+1, 4k+2, 4k+3$  по 17.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 (продолжение)

$$10 \cdot 18 \cdot 18 + 9 \cdot 17 \cdot 17 + 9 \cdot 17 \cdot 17 + 9 \cdot 17 \cdot 17$$

Ответ:  $10 \cdot 18 \cdot 18 + 9 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4(6x) - 2\log_6 x^7 = \frac{3}{2} \log_6 x^7 - 4$$

$$\log_7^4 y + 6\log_7 y^7 = \frac{5}{2} \log_7 y^7 - 4$$

$$\log_7^4 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 6x} - 4$$

$$t = \log_7 6x \quad t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$$

$$t^5 - 2 = \frac{3}{2} - 4t \quad t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0$$

$$\log_7 n = \log_7 y$$

$$t + n = \log_7 6xy$$

$$6xy = t$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$n^4 + \frac{6}{n} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n} - 4$$

$$n^5 + 6 - \frac{5}{2} + 4n = 0$$

$$n^5 + 4n + \frac{7}{2} = 0$$

$$t^5 + n^5 + 4(t+n) = 0$$

$$(t+n)(t^4 + t^3n + t^2n^2 + tn^3 + n^4) + 4(t+n) = 0$$

$$(t+n) = 0$$

$$t^4 + n^4 + tn(t^2 + n^2) + t^2n^2 = 0$$

$$(t+n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4) + 4(t+n) = 0$$

$$t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4 = 0$$

$$(t+n)(t^3 - tn^2 + 4 + t^2n^2 - tn(t^2 + n^2)) = 0$$

$$(t^2 + n^2)^2 - t^2n^2 - tn(t^2 + n^2) + 4 = 0$$

$$(t^2 + n^2)^2 - tn(t^2 + n^2) + 4 - t^2n^2 = 0$$

$$t^4 - t^3n + \frac{1}{2}t^2n^2 + \frac{1}{2}t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4 = 0$$

$$t^4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot tn + \frac{1}{4}t^2n^2 + \frac{1}{4}t^2n^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot tn \cdot n^2 + n^4 + 4 = 0$$

$$(t^2 - \frac{1}{2}tn)^2$$

$$x > 0$$

$$x \neq \pm \frac{1}{6}$$

$$x \neq$$

$$36x^2 - 170$$

$$(6x-1)(6x+1) \neq 0$$

$$y > 0$$

$$y \neq \pm 1$$





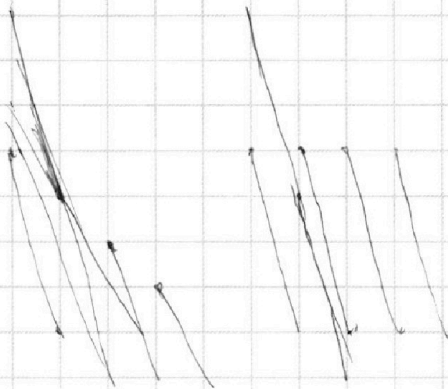


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.  
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a circle and a line.

**Diagram:** A circle with center  $O(0, 40)$  and radius  $R = 40$ . A line  $l$  is tangent to the circle at point  $A(x_1, y_1)$ . The line  $l$  has the equation  $y = -4x + 40$ . The distance from the center  $O$  to the line  $l$  is  $40$ . The line  $l$  intersects the x-axis at point  $B(10, 0)$ . The distance from the origin  $O(0, 0)$  to point  $B$  is  $10$ . The distance from the origin  $O$  to the center  $O$  is  $40$ . The distance from the origin  $O$  to the point  $A$  is  $40$ . The distance from the origin  $O$  to the point  $B$  is  $10$ . The distance from the origin  $O$  to the point  $A$  is  $40$ . The distance from the origin  $O$  to the point  $B$  is  $10$ . The distance from the origin  $O$  to the point  $A$  is  $40$ .

**Equations and Calculations:**

- Equation of the line:  $y = -4x + 40$
- Equation of the circle:  $x^2 + (y - 40)^2 = 40^2$
- Distance from center  $O(0, 40)$  to line  $l$ :  $40$
- Coordinates of point  $A$ :  $(x_1, y_1)$
- Coordinates of point  $B$ :  $(10, 0)$
- Distance from origin  $O(0, 0)$  to point  $B$ :  $10$
- Distance from origin  $O$  to center  $O$ :  $40$
- Distance from origin  $O$  to point  $A$ :  $40$
- Distance from origin  $O$  to point  $B$ :  $10$
- Distance from origin  $O$  to point  $A$ :  $40$
- Distance from origin  $O$  to point  $B$ :  $10$
- Distance from origin  $O$  to point  $A$ :  $40$

**Final Answer:**  $y = -4x + 40$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

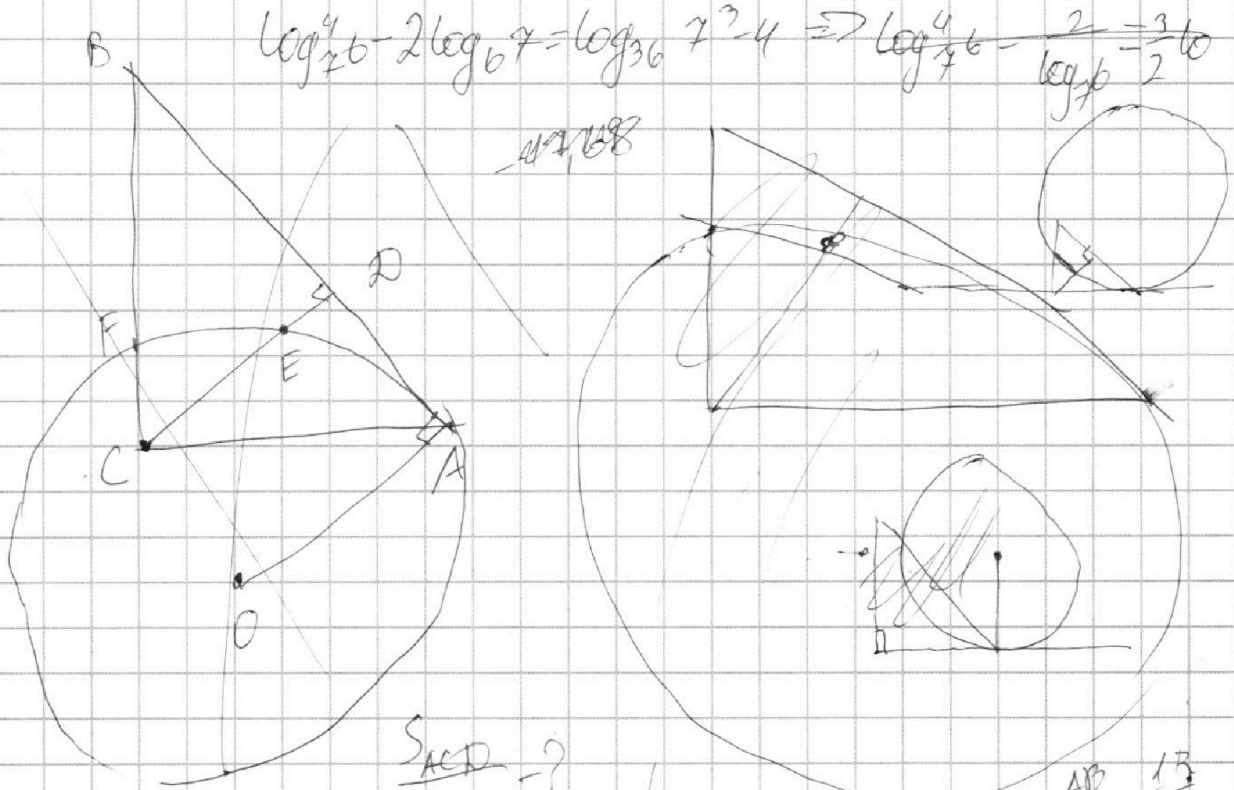
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



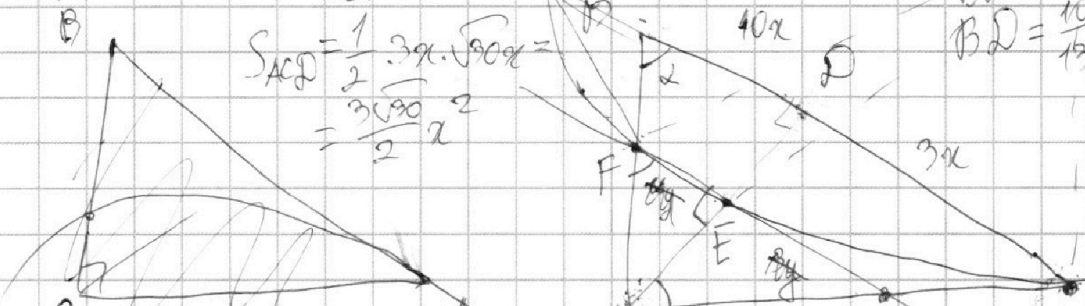
$$\log_{\frac{4}{7}} 6 - 2 \log_{\frac{4}{7}} 7 = \log_{\frac{4}{7}} 36 \quad 7^2 = 49 \Rightarrow \log_{\frac{4}{7}} 6 - \frac{2}{\log_7 4} = \frac{3}{\log_7 6}$$



$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \sqrt{90}x = \frac{3\sqrt{90}}{2} x^2$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10} \Rightarrow BD = \frac{10}{13} AB$$



$$\frac{CE}{CD} = \frac{10x}{20x} = \frac{1}{2} \quad \frac{CD}{AD} = \frac{AC}{BC} = \frac{CL}{FL} \quad \frac{4x^2}{x^2} = \frac{4}{x} \Rightarrow xy = 4x \Rightarrow y = 4$$

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow CD = x\sqrt{90} \quad AC^2 = CD^2 + AD^2 = 39x^2 \quad AC = x\sqrt{39}$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{FE}{BD} = \frac{CF}{BC} \quad \frac{CE^2}{FL} = \frac{FE \cdot EL}{FL} = \frac{FE}{FL} \quad \frac{AL^2}{CL} = \frac{LE \cdot FL}{CL} = \frac{LE}{CL} = \frac{BF}{CF}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ ,  $bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$ ,  $ac: 2^{11} \cdot 3^{14} \cdot 5^{43}$   
 $ab: 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$   
 $bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$   
 $ac: 2^{11} \cdot 3^{14} \cdot 5^{43}$   
 $abc = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$      $abc = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{49}$   
 $a \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$      $b \geq 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$      $c \geq 2^{11} \cdot 3^{14} \cdot 5^{43}$   
 $a \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$      $b \geq 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$      $c \geq 2^{11} \cdot 3^{14} \cdot 5^{43}$   
 $abc = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{49}$      $\Rightarrow b = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$      $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$   
 $a \geq 2$ ,  $b \geq 3$ ,  $c \geq 5$      $abc \Rightarrow \begin{cases} ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{49} \\ ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \\ bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \end{cases}$   
 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{3^2}$      $\frac{a}{b} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^{25}$      $\frac{c}{b} = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \Rightarrow a = b \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5^{25}$   
 $ac = ab$      $a = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^4$      $c = a \cdot 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4$   
 $\frac{c}{b} = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{29} \Rightarrow c = b \cdot 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{29}$   
 $ac = ab \cdot 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{29} = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{49}$   
 $d_1 + d_2 + d_3 = 17$   
 $d_1 + d_2 \neq 7$   
 $d_2 + d_3 \neq 14$   
 $d_1 + d_3 \neq 14$   
 $d_3 - d_2 = 4 \Rightarrow d_3 = 10, d_2 = 3, d_1 = 4$   
 $d_2 + d_3 = 13$   
 $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 22$   
 $\beta_1 + \beta_2 \neq 11$   
 $\beta_2 + \beta_3 \neq 15$   
 $\beta_1 + \beta_3 \neq 17$   
 $\beta_3 - \beta_2 = 6 \Rightarrow \beta_3 = 10, \beta_1 = 6, \beta_2 = 8, 5, 4, 5$   
 $\beta_3 + \beta_2 = 15$   
 $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 39$   
 $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 14$   
 $\gamma_2 + \gamma_3 = 18$   
 $\gamma_1 + \gamma_3 = 43$   
 $\gamma_3 - \gamma_2 = 29 \Rightarrow \gamma_3 = 23, \gamma_2 = 6 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0$   
 $\gamma_2 + \gamma_3 = 18$   
 $2\gamma_3 = 44$   
 $\gamma_3 = 22, \gamma_1 = 17$   
 $C = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$   
 $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$



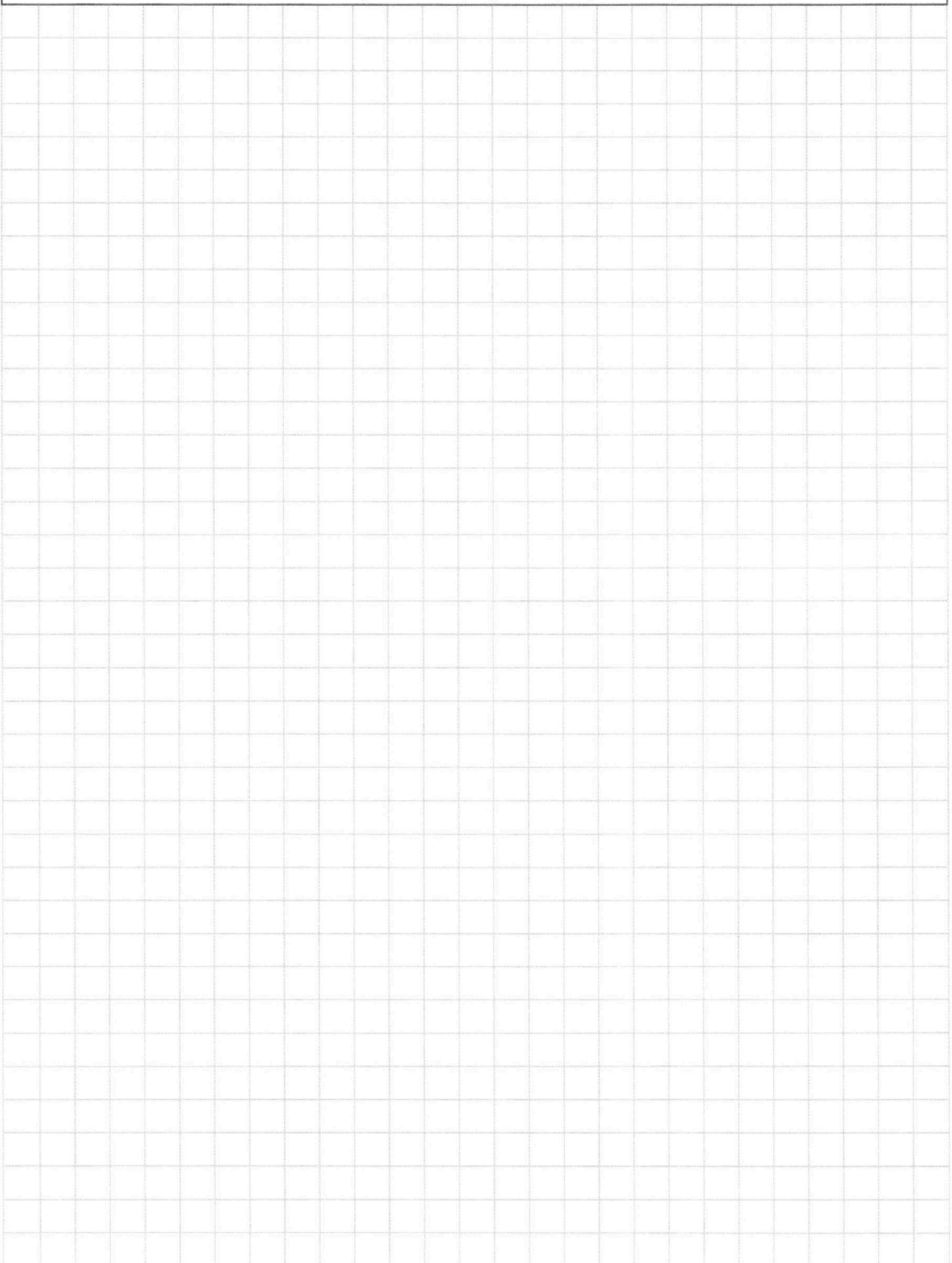
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

