



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

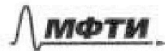
6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

Заметим, что  $m, k$  - натуральные,  
 поэтому они не могут содержать в своей разности  
 простые множители в отриц. степени

$$ab = n \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc = k \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}, \quad n, k, m \in \mathbb{N}$$

$$abc^2 = mnk \cdot 2^{39} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$$

$$abc = \sqrt{mnk} \cdot 2^{17} \cdot 3^{27,5} \cdot 5^{34}$$

Заметим, что  $m, k$

$abc \in \mathbb{N}$ , поэтому

$$abc: 3^{27,5} \Rightarrow abc: 3^{28}$$

так  $ac: 5^{39}$ , по ал. факт 1.

$$\Downarrow \\ abc: 5^{39}$$

$$\Downarrow \\ abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

пример на  $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

$$ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22} \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \quad | \quad a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{22}$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \quad | \quad b = 2^3 \cdot 3^6$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \quad | \quad c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$\text{Ответ: } \min(abc) = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$



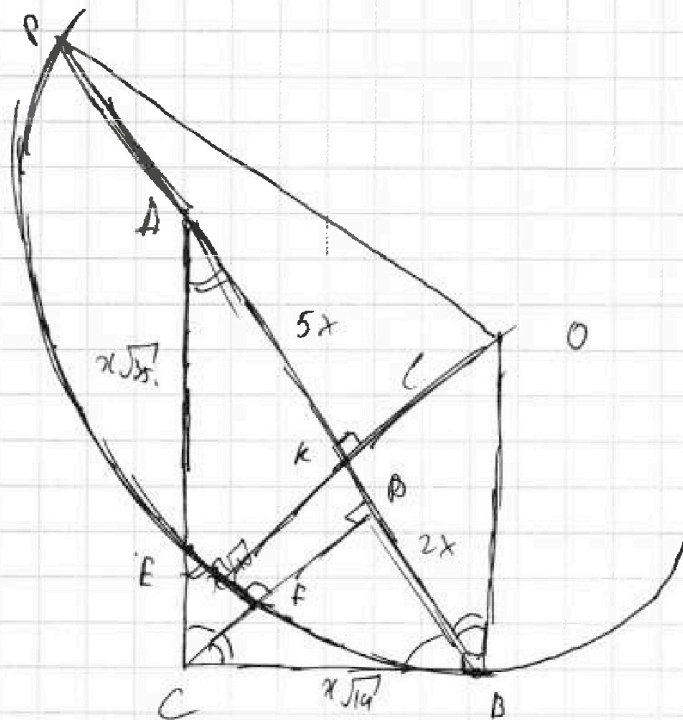
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  
  2  
  3  
  4  
  5  
  6  
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\angle BFC = \angle ADC$

Можно считать при 1/6-воде  
AB и EF и перпен.  
CD.

Заметим, что

$$CD = \sqrt{AP \cdot OB} =$$

$$= x \sqrt{10}$$

$$CD = x \sqrt{10 + 2^2} = x \sqrt{14}$$

аналогично

$$AC = x \sqrt{35}$$

$\angle CFE \sim \angle ABC:$

$AB \parallel EF$

и

$$\frac{EF}{AD} = \frac{CF}{CD}$$

O - лежит на середине перпен. к EF

ка перпен. к BC в т. В;

$OL \perp EF \Rightarrow OL \perp AB$

$OB = OP$

$OB = OP$

$\angle OBA = \angle OAC$

ABBC - равнобедренная трапеция

~~$OL \perp AB$~~

$$S_{CFE} = \frac{EF \cdot FC}{5x^2 \sqrt{10}} \cdot S_{ABC} =$$

$$= \frac{EF \cdot FC}{7x^2 \sqrt{10}} \cdot S_{ABC}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



10 arcsin(cos x) = 10 arcsin(sin(\frac{\pi}{2} - x)) = 5\pi - 10x

OA3: arcsin y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]

\pi - 2x \in [-5\pi; 5\pi]

при x \in [0; \pi]. 10 arcsin(sin(\pi - \frac{x}{2}))

10x - 5\pi = \pi - 2x

12x = 6\pi

x = \frac{\pi}{2}

10 5\pi - 10x = \pi - 2x

4\pi = 8x

x = \frac{\pi}{2}

0 = 0 - y

при x \in [\pi; 2\pi]:

10 arcsin(cos x) = 10 arcsin(sin(\frac{3\pi}{2} - x))

~~10 arcsin(cos x) = 10 arcsin(sin(\frac{3\pi}{2} - x))~~

15\pi - 10x = \pi - 2x

14\pi = 8x

x = \frac{7\pi}{4}

10 arcsin(cos \frac{7\pi}{4}) = 2,5\pi

2,5\pi = \pi - \frac{7\pi}{2}

10 arcsin(cos x) = 10

= 10 arcsin(sin(x - \frac{3\pi}{2}))

10x - 15\pi = \pi - 2x

12x = 16\pi

x = \frac{4\pi}{3}

10 arcsin(cos(\frac{4\pi}{3})) = -\frac{10\pi}{6} = -\frac{5\pi}{3}

-\frac{11}{2} - \frac{5\pi}{3} = \pi - \frac{8\pi}{3}

x \in [2\pi; 3\pi]:

10 arcsin(cos x) = 10 arcsin(sin(\frac{5\pi}{2} - x))

25\pi - 10x = \pi - 2x

24\pi = 8x

x = 3\pi

10 arcsin(cos x) = \pi - 6\pi

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arcsin(\cos x) = 10 \arcsin(\sin(x - \frac{5\pi}{2}))$$
$$10 \cdot (\frac{3\pi}{2}) = -5\pi - 4\pi.$$

$$10x - 25\pi = \pi - 2x.$$

$$12x = 26\pi.$$

$$x = \frac{13}{6}\pi$$

$\approx 2\pi + \frac{\pi}{6}$

$$10 \arcsin(\cos x) = 10 \cdot \frac{\pi}{3} > 0.$$

$$\pi - 2x = \pi - 13\frac{\pi}{3} < 0.$$

$x > 3\pi$  не подходит.

$$x \in [-\pi; 0]:$$

$$10 \arcsin(\cos x) = 10 \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2})).$$

$$10x + 5\pi = \pi - 2x.$$

$$12x = -4\pi.$$

$$x = -\frac{\pi}{3}.$$

$$10 \arcsin(\cos x) = 10 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\pi - 2x = \pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \quad \text{не подходит.}$$

$$10 \arcsin(\cos x) = 10 \arcsin(\sin(x - \frac{\pi}{2})).$$

$$-10x - 5\pi = \pi - 2x.$$

$$8x = -6\pi.$$

$$x = -\frac{3\pi}{4}$$

$$10 \arcsin(\cos x) = -\frac{\pi}{4} \cdot 10 = -\frac{5\pi}{2}.$$

$$\pi - 2x = \pi + \frac{3\pi}{2} > 0 \quad \text{не подходит.}$$

$$x \in [-2\pi; -\pi]:$$

$$10 \arcsin(\cos x) = 10 \arcsin(\sin(x + \frac{3\pi}{2})).$$

$$10x + 15\pi = \pi - 2x. \quad 12x = -14\pi.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x = -\frac{7\pi}{6} : \text{не подходит}$$

$$10 \arcsin(\cos x) = 10 \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{10\pi}{3} \cos$$

$$\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\pi - 2x = \pi + \frac{7\pi}{3} \neq 0$$

не

$$10 \arcsin(\cos x) = 10 \arcsin(\sin(-x - \frac{3\pi}{2}))$$

$$-10x - 15\pi = \pi - 2x$$

$$8x = -16\pi$$

$$x = -2\pi$$

$$10 \arcsin(\cos x) = 5\pi$$

!!

$$\pi - 2x = 5\pi - 4\pi$$

$$x = -2\pi \text{ - не подходит}$$

Ответ:  ~~$\{-2\pi, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\}$~~   $\{-2\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}, 3\pi\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице.

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0. & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 10)^2 - 36) = 0 & (2) \end{cases}$$

прямая

$$(1): y = \frac{ax + 4b}{3}$$

(2):

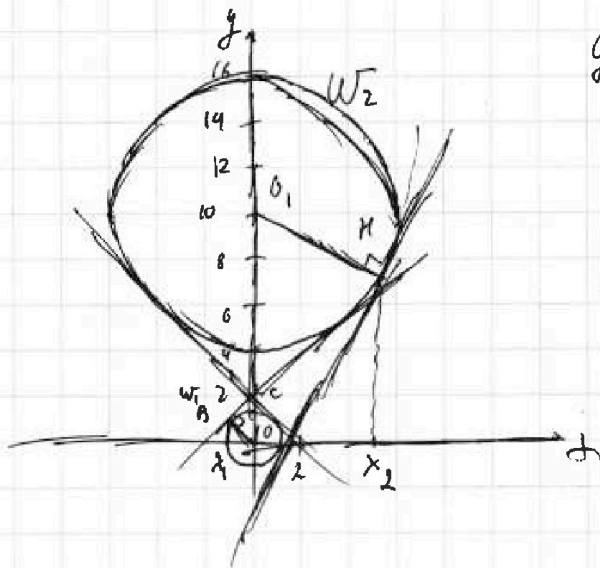
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \text{— окр. с центром } (0, 0); \text{ радиус } 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 & \text{— окр. с центром } (0, 10); \text{ радиусом } 6. \end{cases}$$

У решения будет  $\Leftrightarrow$  прямая.

$$ax - 3y + 4b = 0 \text{ — л.в.}$$

угол наклона  $>$  чем  
единица

секущей  
для обеих окр.



для внешней касат.  $\neq$  б: <sup>т.к.  $\neq$  выходя</sup>  
дугам секунты  
дугам радиус. только выт

$$y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$x_0$  — т. касания

$\Delta OCB \sim \Delta O_1CH$

по двум угл.  $\angle O_1CH = \angle OCB$

$\angle O_1HC = \angle OBC = 90^\circ$

для  $W_1$ :  $x < 0; y > 0$ .

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ y &= \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

для  $W_2$ :

$$\begin{aligned} x > 0; \\ y < 10. \\ 10 - y &= \sqrt{36 - x^2} \end{aligned}$$

$$y = 10 - \sqrt{36 - x^2}$$

$$y' = 10 + \frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}$$

$$x_2 = -6x_1 \text{ т.к.}$$

в разн. напр.

$$\frac{O_1H}{OB} = 6$$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right)' = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

для  $w_1$ :  $y_{кас1} = \sqrt{1-x_1^2} + \left(-\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}\right) \cdot (x-x_1) = \frac{1-x_1^2}{\sqrt{1-x_1^2}} + \frac{x_1^2}{\sqrt{1-x_1^2}} - \frac{x_1-x}{\sqrt{1-x_1^2}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} - \frac{x_1-x}{\sqrt{1-x_1^2}}$$

для  $w_2$ :  $y_{кас1} = -\sqrt{36-x_2^2} + 10 + \left(1 + \frac{x_2}{\sqrt{36-x_2^2}}\right) (x-x_2) =$

*минус*

$$= \frac{-36+x_2^2}{\sqrt{36-x_2^2}} + 10 + x \frac{1+x_2}{\sqrt{36-x_2^2}} - \frac{x_2^2}{\sqrt{36-x_2^2}} =$$

$$= -\frac{36}{\sqrt{36-x_2^2}} + 10 + \frac{x \cdot x_2}{\sqrt{36-x_2^2}}$$

$$\frac{0,1c}{c0} = \frac{6}{1}$$

$$0,1c = 6c0 \Rightarrow c + c0 = 10$$

Имеем, что в силу симметрии отн.  $x=0$  *нат. сим. ось*  
 2 выгнор нас симметрии *1 выгнор нас симметрии*  
 $0,1c = 6c0$

$$7c0 = 10$$

$$c0 = \frac{10}{7}$$

$x=0$ .  $y_{кас1} = \frac{10}{7}$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} = \frac{10}{7}$$

$$0,49 = 1-x_1^2$$

$x_1^2 = 0,51$  - та в 2 стороны

$$x_1 = \pm \sqrt{0,51}$$

$k = \pm \frac{\sqrt{0,51}}{0,7}$

*указание*  
 при  $k \in (-0,7; 0,7)$   
 ~~$x_1 = \pm \sqrt{0,51}$~~   
 ~~$0,7$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ищем, что при  $k \in (-\infty; -\frac{\sqrt{0,51}}{0,7}) \cup (\frac{\sqrt{0,51}}{0,7}; +\infty)$ .

Заводим член, образующий  
линейку.

$$\frac{4}{3} \sqrt{1-k}, \quad k = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 3k$$

$$a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{0,51}}{0,7}) \cup (\frac{3\sqrt{0,51}}{0,7}; +\infty)$$

Отметим  $b$   $\exists$  при  $a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{0,51}}{0,7}) \cup (\frac{3\sqrt{0,51}}{0,7}; +\infty)$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Пору QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3.$$

$$\sqrt[3]{x^3} = x \text{ — можно брать}$$

Разогранич

$$\log_5^4(2x) + 3 = \log_{2x} 5 \cdot \sqrt[3]{5} \cdot 5^3$$

OD),  $x, y > 0$ .  
 $x \neq \frac{1}{2}; y \neq 1$ .

$$\log_5^4(2x) - \log_{2x} 5^4 \cdot \sqrt[3]{5} = -3. \quad (1)$$

$$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_y 5^{0,2} - 3$$

$$\log_{y^{30,2}} = -\log_y \sqrt[3]{5}$$

$$\log_5^4 y + \log_y 5^4 \cdot \sqrt[3]{5} = -3.$$

$$\left(-\log_5 \frac{1}{y}\right)^4 + \log_y 5^4 \cdot \sqrt[3]{5} = -3.$$

$$\log_5^4 \frac{1}{y} - \log_{\frac{1}{y}} 5^4 \cdot \sqrt[3]{5} = -3. \quad (2)$$

заметим, что если найдётся  $2x = y$ , то  $\frac{1}{y} = 2x$  — тогда все уравнения выполняются

и все корни уравнения  $\frac{1}{y} = 2x$ .

$$xy = \frac{1}{2} \text{ — ед. знак}$$

Ответ:  $xy = \frac{1}{2}$ .

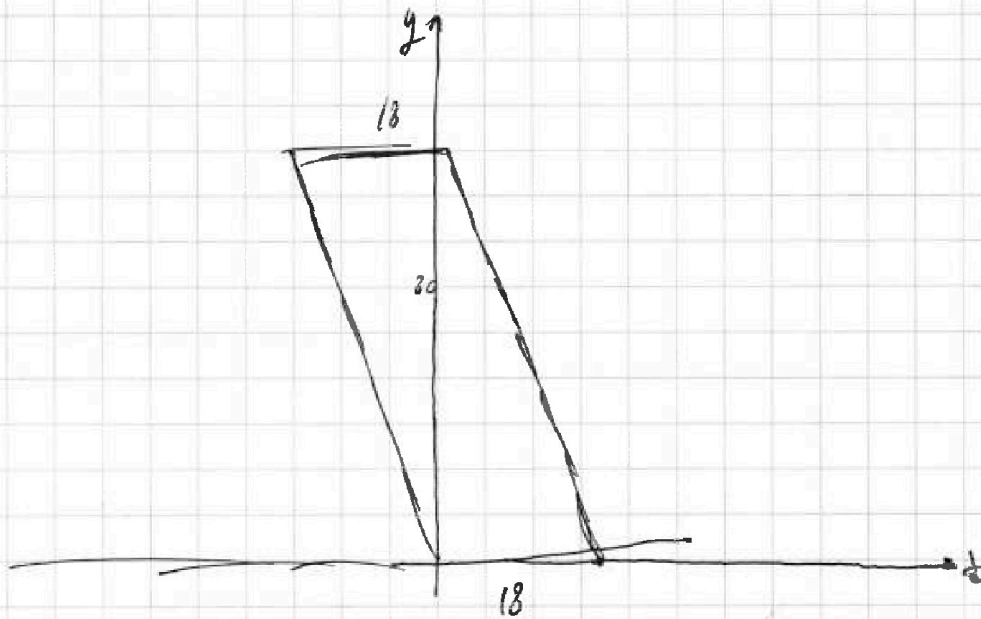
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45.$$

$$y_2 - y_1 = \frac{45}{15} - 5 \frac{(x_2 - x_1)}{15}$$

$$y_2 - y_1 \in [5; 15].$$

$$(y_2 - y_1) \in [15; 45]$$

$$(9 - x_2 + x_1) \in [16; 16].$$

$$(x_1 - x_2) \in [25; 7].$$

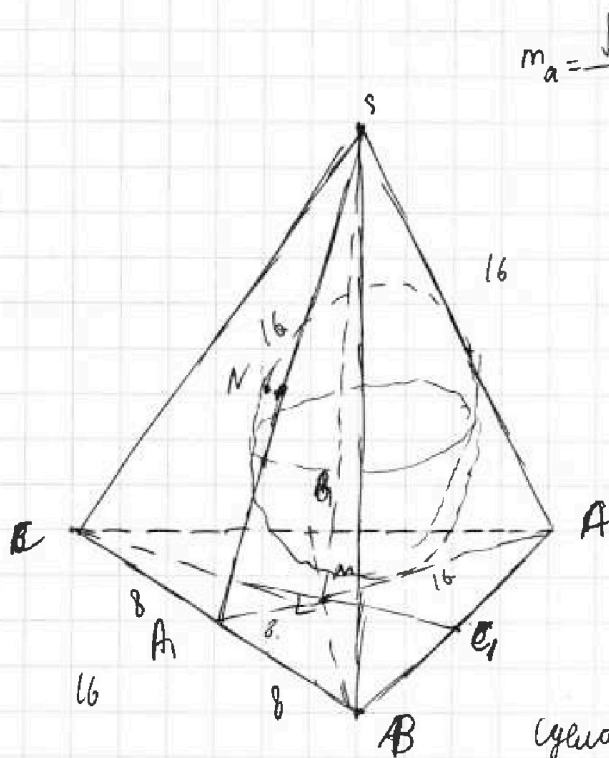
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

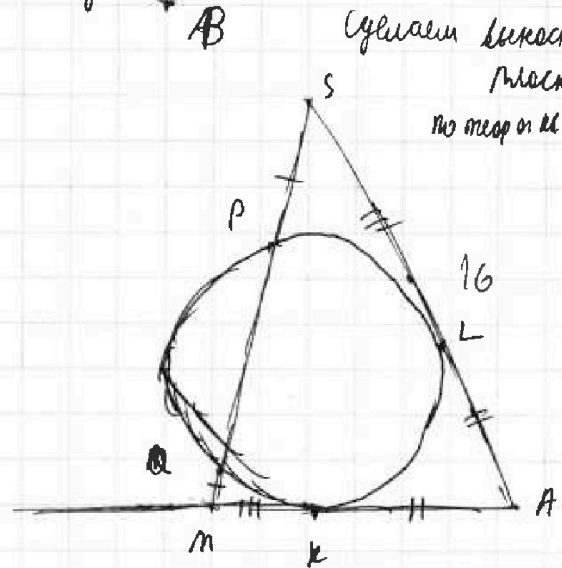
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}$$



Сделаем касательной чертёж.

Плоскости (SAB).

по теореме о кас.

$$mk^2 = mk \cdot mp.$$

$$AL = kA \text{ - отпр кас.}$$

$$SL^2 = SP \cdot SQ$$

$$SQ = SP + PQ =$$

$$= MQ + PQ = MP$$

↓.

$$SL = mk$$

∩

$$AM = 16.$$

mk m-центр масс, т.о.

$$AA_1 = \frac{3}{2} AM = 24$$

$$\triangle CMB_1 \quad MA_1 = \frac{CB}{2} \Rightarrow$$

MA<sub>1</sub> - медиана

$$\angle CMB = 90^\circ$$

$$S_{CMB} = \frac{CM \cdot MB}{2}$$

$$S_{CMB} = \frac{S_{ABC}}{3}, \text{ т.к. } CM, BM \text{ - медианы.}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$SM \cdot MB = \frac{2}{3} CC_1 \cdot \frac{2}{3} BB_1 = \frac{4}{9} CC_1 \cdot BB_1$$

$$S_{SMO} = \frac{100}{3} = \frac{SM \cdot MB}{2} \Rightarrow SM \cdot MB = \frac{200}{3}$$

$$CC_1 \cdot BB_1 = \frac{9}{4} SM \cdot MB$$

$$CC_1 \cdot BB_1 = \frac{50 \cdot 3}{1} = 150$$

$$\frac{50 \cdot 3}{2} = \frac{150}{2} \Rightarrow 150$$

$$AA_1 = 24$$

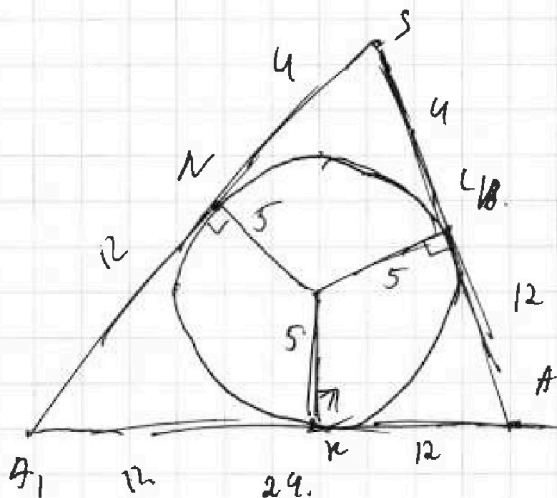
$$AA_1 \cdot CC_1 \cdot BB_1 = 150 \cdot 24 = 600 \cdot 6 = 3600$$

Заметим, что если  $\Omega$  касается  $BCS$ , то  $\Omega$  вписана.

$\Omega$  вписана в  $AS + (BCS)$ ,  
то  $\Omega$  вписана в  $AS + (ABC)$

вписана в двугр. угол  $A(BC)S$ .  
то  $\Omega$  касается  $S$  и  $BC$  в одной точке  $L$  и  $M$

ср. величинах чертёж



Проложит одна прямая,  
 $SN$  проложит  $KL$  т.  $A$ ,  
она касат. полукр.

$$SA_{\Omega} = SL = SN;$$

$$AL = AK; AN = BL$$

$$SN = 4 = SL \Rightarrow AL = 16 - 4 = 12 =$$

$$AK$$

$$AK = 24 - 12 = 12 = AN$$

$$SA_1 = 16$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Sk

м.к.  $SA_1 = SA$ , то  $\angle$  из м.с на

$AA_1$  перпенд. к м.к. ( $A_1K \perp AK$ )

и

$SK \perp AA_1$

м.к.  $\perp$  вписана в  $\angle SA_1A$

Плоск. (с о.в.) делит двугр. угол пополам

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OK}{A_1K} = \frac{5}{12}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{7 \cdot 17}{12 \cdot 12}} = \frac{24 \cdot 5}{7 \cdot 17} = \frac{120}{119}$$

Объем  $AA_1BB_1CC_1 = 3600$ ;  $\angle A(BC)S = \arctg \frac{120}{119}$

$$\frac{7 \cdot 17}{119}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{2}-x)) = \frac{3\pi}{2}-x$$

$$x > \pi$$

$$x \in (\pi, 2\pi)$$

$$x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos x = 0$$

$$\sin x =$$

$$\arcsin 0 = 0$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$$

$$\frac{\pi}{2}-x$$

$$\frac{3\pi}{2}-x$$

$$x - \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$\pi - (\frac{\pi}{2}-x) = \frac{\pi}{2} + x$$

$$2, 5\pi =$$

$$\cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{3\pi}{2}-x$$

$$\frac{3\pi}{2}$$

$$10 \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{7\pi}{2} =$$

$$=$$

$$-\frac{1}{2} \cos \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$abc: 2^{17} \cdot 3^{23} \cdot 5^{39}$$

$$\frac{69}{10}$$

$$14+20+21=55$$

$$\begin{array}{r} a \quad b \quad c \\ 5 \quad 3 \quad 9 \\ \hline 29 \end{array}$$

$$12+17+39=68$$

$$\begin{cases} a+b=14 \\ b+c=20 \\ a+c=22 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 710+11= \\ =28 \\ c=14 \\ a=8 \\ b=6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{22} \\ b &= 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \\ c &= 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 8 \\ c &= 5 \\ b &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ 139 \\ \hline 68 \end{array}$$



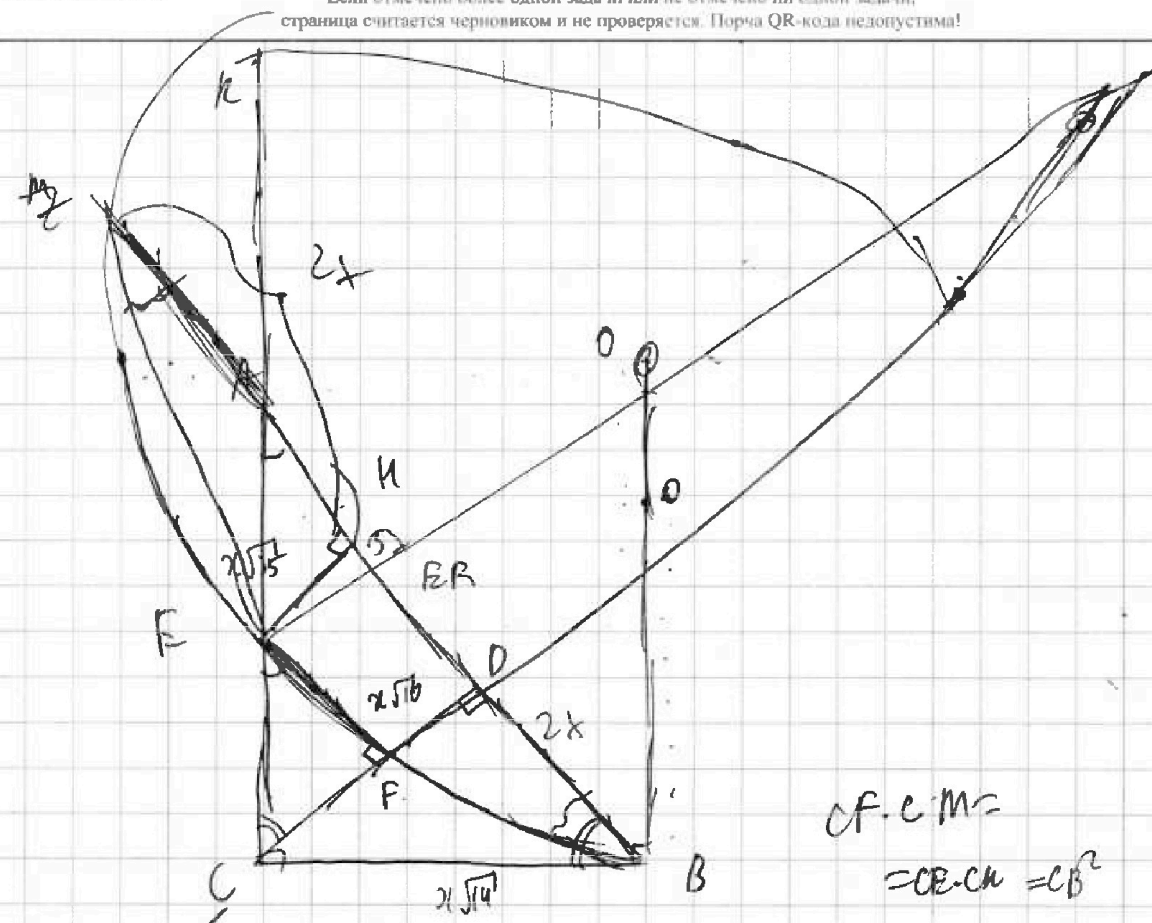
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

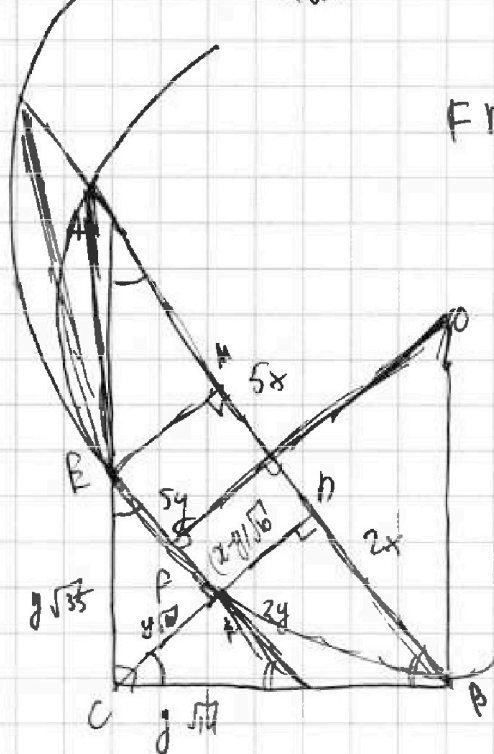
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CF \cdot CM = CE \cdot CH = CB^2$$

$$FB = FE + E$$

$$\frac{5x}{2\sqrt{5}} =$$



$$\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \frac{EF}{2x} \cdot \frac{CF}{CD}$$

$$\frac{CE}{AC} = \frac{CF}{CD}$$

$$\frac{CE}{BD} = AE - KB$$

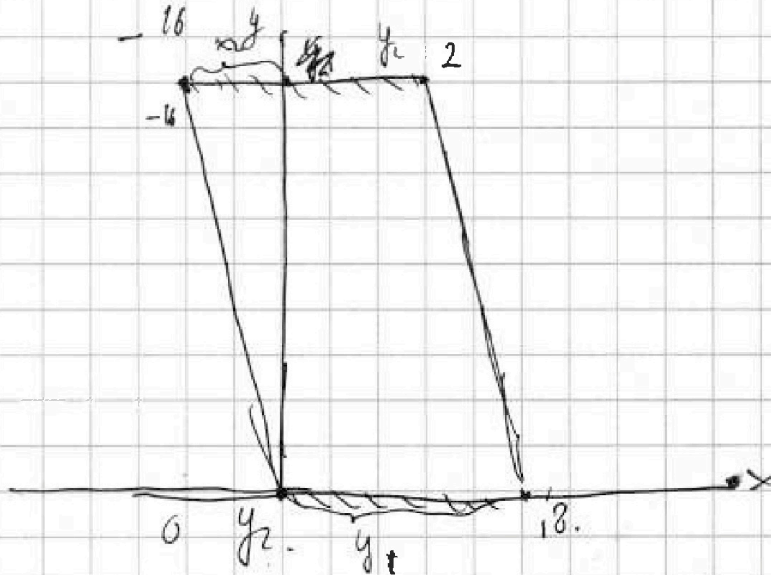
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5(x_2 - x_1) + y_1 - y_2 = 45.$$

$$(8; -18) \quad (-80; 80)$$

$$(-90; 90) \\ (90; -80) - 45$$

$$(-34.5; 34.5 - 45) \quad (y_1 - y_2) \\ (-80; 80)$$

$$(y_1 - y_2) \cdot (-80; 80)$$

$$\begin{matrix} -80 \\ -75 \end{matrix}$$

$$y_1 - y_2 = -80 \quad 45 - 80 = -35$$

$$45 - 75 = -30$$

$$5(x_2 - x_1) = -85$$

$$x_2 - x_1 = 6$$

$$x_2 - x_1 = 7$$

$$x_2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  ~~cos x~~

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi - 2x}{10}$$

$$\frac{4\pi}{10} = \frac{8x}{10}$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(\sin(x - \frac{\pi}{2})) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

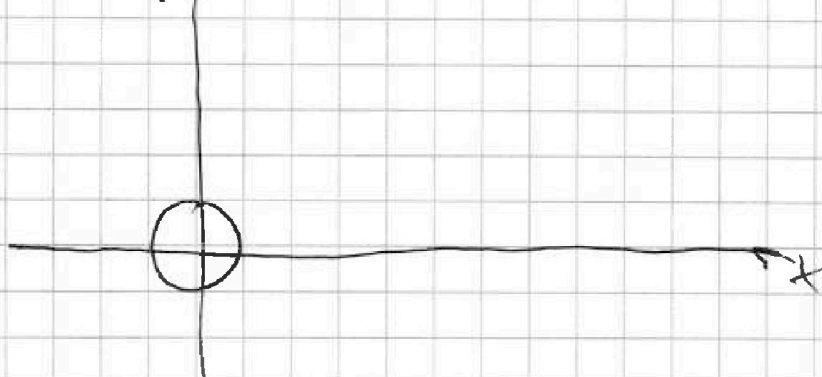
$$x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi - 2x}{10}$$

~~$$\frac{12x}{10} = \frac{\pi}{10}$$~~

нч

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 4) \cdot (x^2 + (y - 10)^2 - 36) = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{4b}{3} + \frac{ax}{3}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1}$

$$ab = n \cdot 2^3 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc = k \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac = z \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$abc = \sqrt{nkz} \cdot 2^{17} \cdot 3^{55}$$

$$14 + 20 + 21 = 55$$

32

$$\sqrt{2x} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$$2x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$$

$$2x \in [-4\sqrt{3}\pi, 3]$$

$$x \in [-2\sqrt{3}\pi, 1.5]$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$10 \arcsin \frac{1}{11} \in [0, \frac{3\sqrt{2}}{2}]$$

$$10 \arcsin \frac{1}{11} \in [0, \frac{5\sqrt{2}}{2}]$$

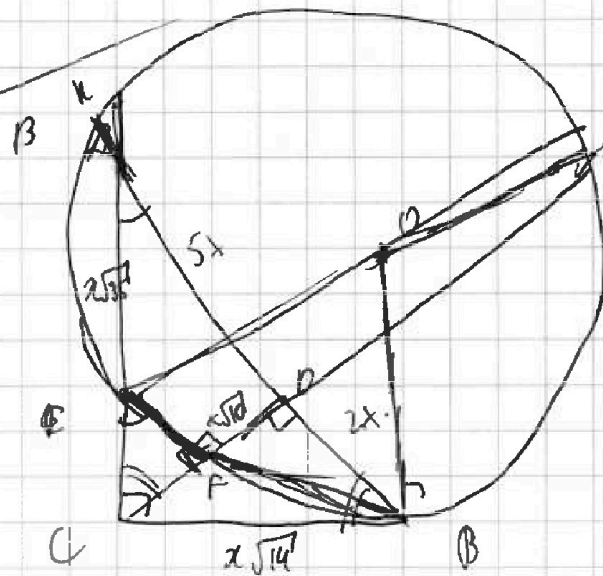
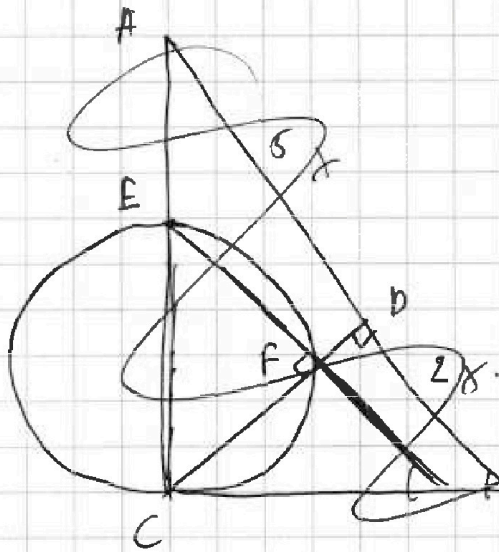
$$5\pi - \pi$$

$\sqrt{2}$

CE-диам  $\angle EFC = \angle ADC = 90^\circ$

соединим AB и EF  
сек CD

$$\overline{KB} = CA = \frac{2\sqrt{14}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ

- 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y_{кас} = \frac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} + \frac{x_0^2 + 1 - x_0^2}{\sqrt{1-x_0^2}} =$$

$$= x \left( -\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}$$

$$y = \sqrt{36-x^2} + 10$$

$$y_{кас} = x \left( -\frac{x_0}{\sqrt{36-x_0^2}} \right) + \frac{36}{\sqrt{36-x_0^2}} + 10$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y_{кас} = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

$$y_{кас} = \frac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}(x-x_0) + \sqrt{1-x_0^2}$$

$$x = -\frac{4b}{a}$$

$$x=0:$$

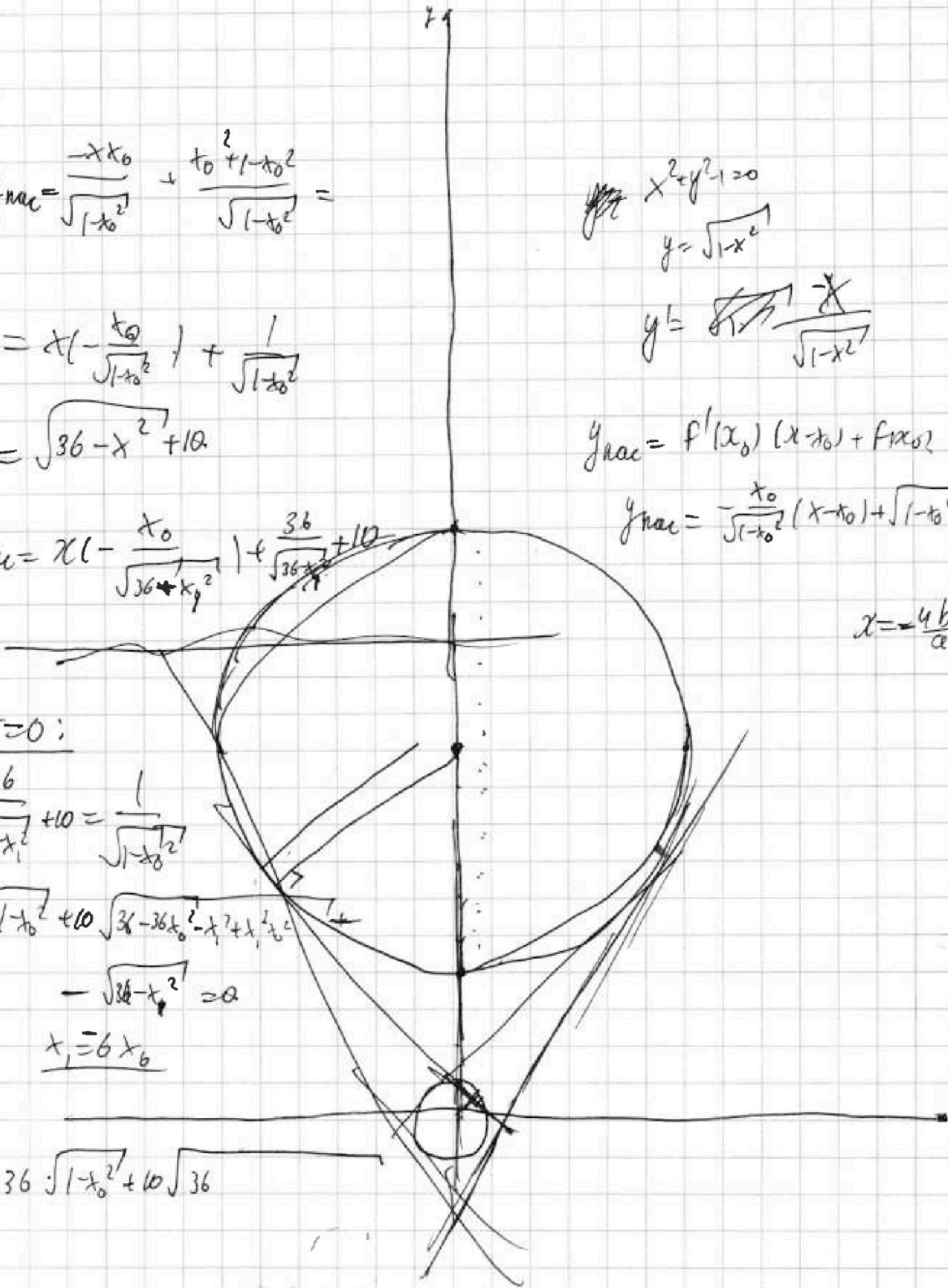
$$\frac{36}{\sqrt{36-x_1^2}} + 10 = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}$$

$$36\sqrt{1-x_0^2} + 10\sqrt{36-36x_0^2 - x_1^2 + x_1^2 x_0^2}$$

$$-\sqrt{36-x_1^2} = 0$$

$$x_1 = 6x_0$$

$$36\sqrt{1-x_0^2} + 10\sqrt{36}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45.$$

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$\frac{\sqrt{3a^2}}{2} \quad \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_{2x} 5} = \log_{2x} 5^3 - 3$$

$$\log_5^4(2x) + 3 = \log_{2x} 5^3 \cdot 5^3$$

лог

$$\log_5^4 y + \log_y 5^4 = \log_y 5^3 - 3$$

$$\log_5^4 y + 3 = -\log_y 5^4 \cdot \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[3]{5} \quad \sqrt[3]{5} \quad 0 < y < 1$$

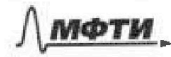
$$\boxed{2x = \frac{1}{y}} \quad \underline{xy = \frac{1}{2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

