МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1.

Пусть $a = k\cdot 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}$, $b = m\cdot 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}$, $c = n\cdot 2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}\cdot 5^{\gamma_3}$

$(k, m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0)$ (*). Тогда

$ab = km\cdot 2^{\alpha_1+\alpha_2}\cdot 3^{\beta_1+\beta_2}\cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2} \vdots\ 2^8\cdot 3^{14}\cdot 5^{12}$;

$bc = mn\cdot 2^{\alpha_2+\alpha_3}\cdot 3^{\beta_2+\beta_3}\cdot 5^{\gamma_2+\gamma_3} \vdots\ 2^{12}\cdot 3^{20}\cdot 5^{17}$

$ac = kn\cdot 2^{\alpha_1+\alpha_3}\cdot 3^{\beta_1+\beta_3}\cdot 5^{\gamma_1+\gamma_3} \vdots\ 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{39}$

(*) числа k, m, n не делятся на $2, 3, 5$; $\alpha_1, \dots, \gamma_3 \in \mathbb{Z}$

Тогда из условия кратности:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 8 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 12 \\ \alpha_3 + \alpha_1 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 34$$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17$ => мин. степень 2 в пр-ии abc – 17.

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 14 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 20 \\ \beta_3 + \beta_1 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 55$$

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{55}{2} > 27$ =>

=> min степень 3 в abc – 28.

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 12 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 17 \\ \gamma_3 + \gamma_1 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \geq 68$$

$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 34$, но т.к. $\gamma_1 + \gamma_3 \geq 39$ и $\gamma_2 \geq 0$, то $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 39$, min степень 5 в abc – 39.

Тогда минимальное знач-е abc – $2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$

(это возможно при $a = 2^5\cdot 3^8\cdot 5^{13}$, $b = 2^4\cdot 3^7$, $c = 2^{10}\cdot 3^{14}\cdot 5^{26}$)

Ответ: $2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

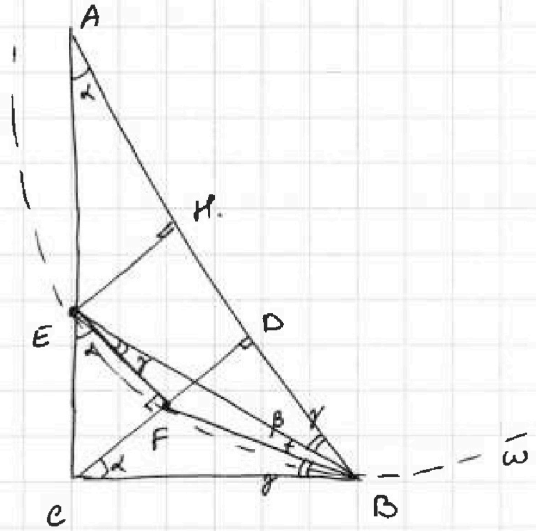
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2.



Пусть $\angle BAC=\alpha$;
$\angle EBF=\beta$, $\angle FBC=\angle FEB=\gamma$
($\angle FEB$ в окр-ти ω – вписанный, опирающийся на дугу $\breve{BF}$; $\angle FBC$ – угол м/у касательной и хордой BF, стягивающей дугу $\breve{BF}$ $\Rightarrow \angle FBC=\frac{\breve{BF}}{2}=\angle FEB$).

Т.к. $EF \parallel AB$, то $EF \perp CD$;
$\angle CEF=\angle CAD=\alpha$

В прямоугольном CEB $\alpha+\beta+2\gamma=90° \Rightarrow 90°-\alpha=\beta+2\gamma=$
$=\angle ABC \Rightarrow \angle ABE=$ ~~$90°-2\alpha$~~ $\beta+2\gamma-(\beta+\gamma)=\gamma$.

Кроме того, $CD\perp AB \Rightarrow \angle DCB=\alpha$. Тогда
$\triangle AEB \sim \triangle CFB$ по 2-м углам ($\angle BAE=\angle FCB=\alpha$;
$\angle ABE=\angle FBC=\gamma$). Тогда $\frac{BC}{AB}=\frac{CF}{AE}=\sin\alpha$.

Пусть $EH\perp AB$. Тогда $EHDF$ – прям-к $\Rightarrow EH=FD$;
$\sin\alpha=\frac{EH}{AE}=\frac{DF}{AE}=\frac{CF}{AE} \Rightarrow DF=CF \Rightarrow F$ – середина высоты CD. Т.к. $EF\parallel AB$, то $\triangle CEF \sim \triangle CAD$ с коэффициентом подобия $k=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CAD}}=\frac{1}{4}$.

У $\triangle CAD$ и CBD общая высота $CD \Rightarrow \frac{S_{CAD}}{S_{CBD}}=\frac{AD}{BD}=\frac{5}{2}$;
$S_{CAD}+S_{BCD}=S_{ABC}$

$\frac{S_{CAD}}{S_{ABC}}=\frac{5}{7}$, тогда $S_{CAD}=\frac{5}{7}S_{ABC}$; $S_{CEF}=\frac{1}{4}S_{CAD}=$
$=\frac{5}{28}S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}=\frac{28}{5}$ А.

Ответ: $\frac{28}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3.

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x \iff \arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10} \iff$

$\iff \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right) = \cos x & (1) \\ -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi - 2x}{10} \le \frac{\pi}{2} & (2) \end{cases}$

(2): $-5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi$

$-6\pi \le -2x \le 4\pi$

$-4\pi \le 2x \le 6\pi$

$-2\pi \le x \le 3\pi$ (*)

(2): $\cancel{\sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right) - \cos x = 0}$?

$\cancel{\sin}$

$\cos x - \sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right) = 0$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right) = 0$

$2\sin\left(\frac{\pi-2x}{5}\right)\cos\left(\frac{3\pi-6x}{10}\right) = 0 \iff$

$\iff \left[\begin{array}{ll} \sin\left(\frac{\pi-2x}{5}\right) = 0 & (3) \\ \cos\left(\frac{3\pi-6x}{10}\right) = 0 & (4) \end{array}\right.$

(3): $\sin\left(\frac{\pi-2x}{5}\right) = 0 \iff \frac{\pi-2x}{5} = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \iff$

$\iff \pi - 2x = 5\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{\pi - 5\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

С учётом (*) получаем $x = \frac{\pi}{2}$ $(k=0)$, $x = 3\pi$ $(k=-1)$,
$x = -2\pi$ $(k=1)$

(4): $\cos\left(\frac{3\pi-6x}{10}\right) = 0 \iff \frac{3\pi-6x}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \iff$

$\iff 3\pi - 6x = 5\pi + 10\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \iff 6x = -2\pi - 10\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \iff$

$\iff x = -\frac{\pi + 5\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$

Условию (*) удовлетворяют $x = -\frac{\pi}{3}$ (при $n=0$),
$x = -2\pi$ $(n=1)$, $x = \frac{4\pi}{3}$ $(n=-1)$, $x = 3\pi$ $(n=-2)$

Ответ: -2π; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{4\pi}{3}$; 3π.

№4.

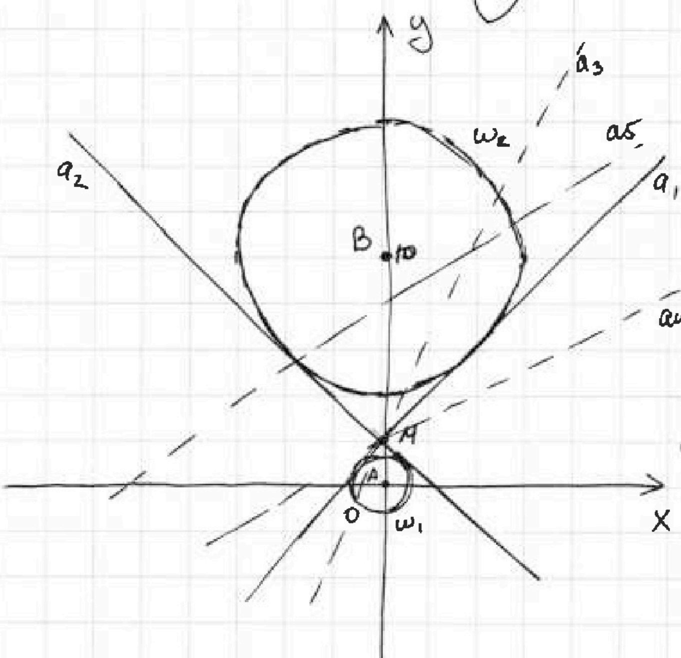
$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \quad (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \quad (2) \end{cases}$$

Ур-е (2) системы равносильно $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2-1=0 \\ x^2+y^2-20y+64=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+y^2=1 & (3) \\ x^2+(y-10)^2=36. & (4) \end{array}\right.$

Ур-е (3) задаёт на координатной пл-ти окр-ть ω_1 с центром $A(0;0)$ и радиусом $R_A=1$; ур-е (4) – окр-ть ω_2 с центром $B(0;10)$ и радиусом $R_B=6$.

Ур-е (1): $3y=ax+4b \Leftrightarrow y=-\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$ – на координатной пл-ти прямая. Чтобы исходная система имела ровно 4 решения, эта прямая должна пересекать каждую из окр-тей ровно 2 раза.



В прямой $y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$ a отвечает за угловой коэффициент ($\frac{a}{3}$ – тангенс угла наклона прямой), b – за смещение вдоль оси OY. Пусть прямые с a_1 и a_2 – общие касательные к ω_1 и ω_2. (из симметрии $a_2=-a_1$).

для Прямой $y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$ найдётся коэффициент b такой, что она пересечёт ω_1 и ω_2 по 2 раза каждую, при $a\in(a_1;a_2)$,

~~Так~~ Пусть M – точка пересечения „крайних" прямых с a_1 и $a_2=-a_1$ (из симметрии M лежит на OY). Тогда при $a\in(a_1;a_2)$ прямая $y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$, проведённая ч/з M, пересечёт каждую из 2-х окр-ей 2 раза (a_3 на рисунке); при $a\le a_1$ или $a\ge a_2$ прямая, ~~пересечёт~~ проведённая ч/з M, пересечёт либо обе окр-ти по 1 разу (при a_1 и a_2)

(см. на след. стр.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

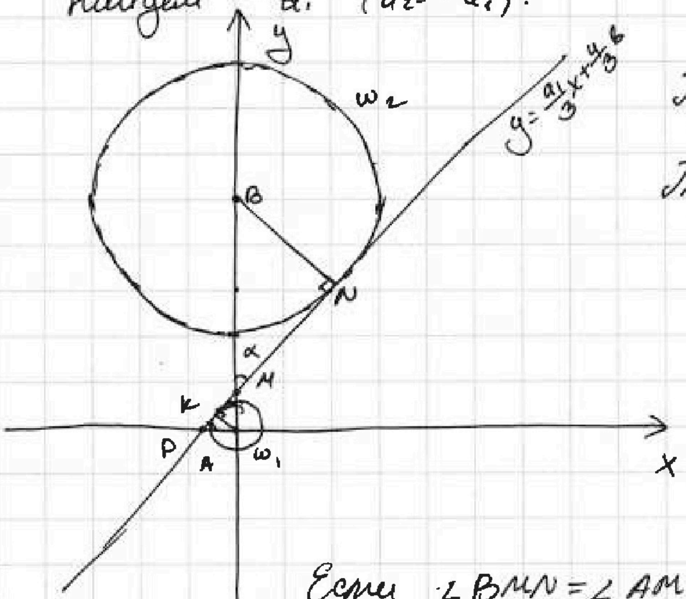
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (продолжение)

либо ни одну из окр-ей (a₄ на рисунке) и при сдвижении вверх/вниз вдоль оси OX (a₅ на рисунке) пересечёт не более 1-ой окр-ти в одной или 2-х точках.

Найдём a_1 $(a_2 = -a_1)$:



Пусть прямая касается ω_1 в т. K, ω_2 в т. N. Тогда $\triangle MBN \sim \triangle MAK$ ($\angle BMN = \angle AMK$ как вертикальные, $\angle MNB = \angle MKA = 90°$).

$AK = 1$, $BN = 6$ $\Rightarrow$ $\frac{AM}{BM} = \frac{AK}{BN} = \frac{1}{6}$;

$AB = 10 \Rightarrow AM = \frac{10}{7}$, тогда $BM = \frac{60}{7}$.

Если $\angle BMN = \angle AMK = \alpha$, то в $\triangle MAP$ (P – точка пересечения прямой и OX) $\angle MPA = 90° - \alpha = \beta \Rightarrow$ $\Rightarrow tg\beta = \frac{a_1}{3} = ctg\alpha$. $\sin\alpha = \frac{BN}{BM} = \frac{6}{\frac{60}{7}} = \frac{7}{10}$. $\cos\alpha$ (т.к. $\alpha < 90°$) $= \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$; $ctg\alpha = tg\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{51}}{7}$. Тогда $a_1 = 3tg\beta = \frac{3\sqrt{51}}{7}$

Ответ: $\left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5.

Заметим, что, т.к. есть слагаемые $\log_5^4(2x)$, $3\log_{2x}5$, $\log_5^4 y$, $4\log_y 5$, то $2x>0$ и $2x\neq 1 \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq\frac{1}{2}\end{cases}$ и

$y>0$ и $y\neq 1$ (заметим, что при таких знач-ях x и y $\log_5^4(2x)\neq 0$ и $\log_5^4 y\neq 0$).

При этих ограничениях для x и y пусть $\log_5 2x = u \neq 0$; $\log_5 y = v\neq 0$. Тогда:

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 - \log_{8x^3}625 + 3 = 0$

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 - \frac{4}{3}\log_{2x}5 + 3 = 0$ — принимает вид:

$u^4 - \frac{3}{u} - \frac{4}{3u} + 3 = 0 \mid \cdot 3u\neq 0$

$3u^5 - 9 - 4 + 9u = 0$

$3u^5 - 13 + 9u = 0$ (1) $\Rightarrow \underline{3u^5 + 9u = 13}$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 - \log_{y^3} 0{,}2 + 3 = 0$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 + \frac{1}{3}\log_y 5 + 3 = 0$ (т.к. $\log_{y^3}0{,}2 = \log_{y^3}\frac{1}{5} = -\frac{1}{3}\log_y 5$), или $v^4 + \frac{4}{v} + \frac{1}{3v} + 3 = 0 \mid \cdot 3v\neq 0$

(2)

$3v^5 + 12v + 1 + 9v = 0$

$3v^5 + 13 + 9v = 0$ (2) $\Rightarrow \underline{3(-v)^5 + 9\cdot(-v) = 13}$

~~(1)+(2): $3u^5 + 9u + 3v^5 + 9v = 0 \Leftrightarrow$~~ ~~$\Leftrightarrow u^5 + 3u + v^5 + 3v = 0 \Leftrightarrow$~~ $u^5 + 3u = (-v)^5 + 3\cdot(-v)$.

Получили $f(u) = f(-v)$, где $f(t) = 3t^5 + 9t$. Заметим, что $f(t)$ — возрастающая функция (как сумма возр. ф-й $3t^5$ и $9t$; $f'(t) = 15t^4 + 9 \geq 9 > 0$ при $\forall t$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(u) = f(-v)$ выполняется только при $u = -v$, т.е. $u + v = 0$

$u + v = \log_5(2x) + \log_5 y = \log_5(2xy) = 0$, откуда

$2xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$ — единственное возможное знач-е для xy.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

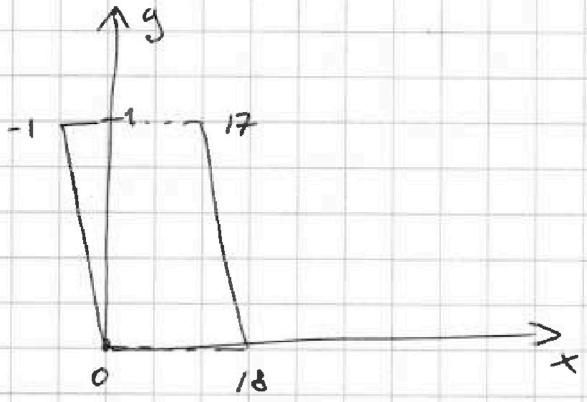
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ ~~5~~ 6

Точки P и O лежат на прямой $y=-5x$; точки Q и R - на прямой $y=-5x+90$.

$5(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=45$

$(y_2-y_1)\vdots 5$. Для $y_2-y_1=0$ должно вып-ся $x_2-x_1=9$



для $y_1, y_2, \ldots \in \mathbb{Z}$
целых x - от 0 до 18 - 19 вар $\Rightarrow$ 10 пар $x_2-x_1=9$:
0; 9, 1; 10, ..., 9; 18.
$y\in\mathbb{Z}$ - от 0 до 81 - 81 вар. Пар такого вида - $10\cdot 81=810$.

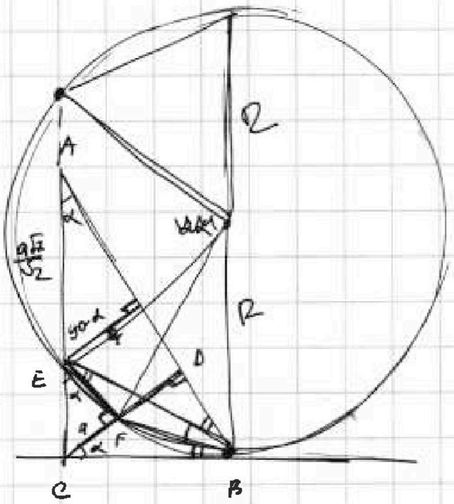
Всего пар с $x_1, x_2, y, y_2 \in \mathbb{Z}$:
$19\cdot 81$.

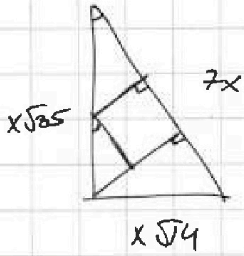
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





$CB^2 = CE \cdot \ldots$

$h = x\sqrt{10}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{14}}{7} = \sqrt{\frac{2}{7}}$

$\frac{a}{AE} = \sqrt{\frac{2}{7}} = AE = \cancel{\frac{\sqrt{14}}{7a}} \quad \frac{a\sqrt7}{\sqrt2}$

$CE = x\sqrt{35} - \frac{\sqrt{14}}{7a} \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{5}{7}}$

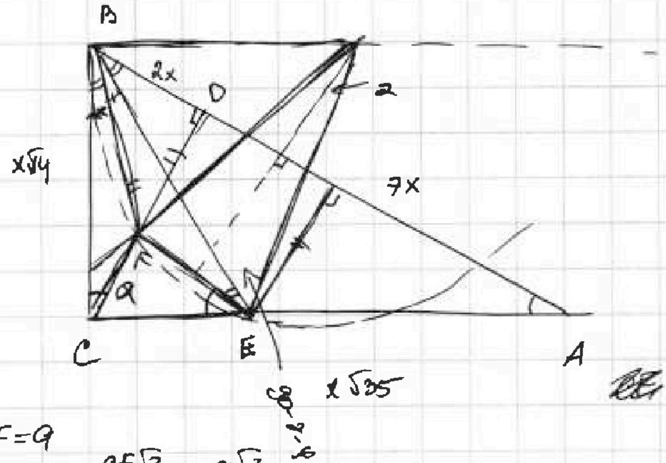
$\frac{CF}{CE} = \sin\alpha \Rightarrow CF =$

$CE\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{7}}\left(x\sqrt{35} - \frac{\sqrt{14}}{7a}\right) =$

$= x\sqrt{10} - a$

$\frac{\frac{a\sqrt7}{\sqrt2}}{h} = \sin\alpha = \frac{\sqrt2}{\sqrt7}$

$h = \frac{\frac{a\sqrt7}{\sqrt2}}{\frac{\sqrt2}{\sqrt7}} = \frac{7}{2}a$



$\frac{CB}{AB} = \frac{CF}{AE} = \frac{BF}{BE}$

$CF = a$

$AE = \frac{CF\sqrt7}{\sqrt2} = \frac{a\sqrt7}{\sqrt2}$

$\frac{CF}{AE} = \frac{CB}{AB} = \frac{x\sqrt{14}}{7x} = \sqrt{\frac{2}{7}}$

$\frac{\sqrt2}{\sqrt7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3} 625 - 3$

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 - \frac{4}{3}\log_{2x}5 + 3 = 0$

$\log_5 2x = u$

xy

$\log_5 xy = \log_5 x + \log_5 y$

$\log_5 2xy = \log_5 2x + \log_5 y$

$u^4 - \frac{3}{u} - \frac{4}{3u} + 3 = 0 \quad | \cdot 3u$

$3u^5 - 9 - 4 + 9u = 0$

$3u^5 + 9u - 13 = 0 \quad (1)$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 + \frac{1}{3}\log_y 5 + 3 = 0$

$v^4 + \frac{4}{v} + \frac{1}{3v} + 3 = 0 \quad | \cdot 3v$

$\log_5 y = v$

$3v^5 + 12 + 1 + 9v = 0$

$3v^5 + 9v + 13 = 0 \quad (2)$

$u + v - ?$

$u + v = 0$

$\log_5 2xy = 0$

$2xy = 1 \quad xy = \frac{1}{2}$

$(1) + (2): \quad 3u^5 + 9u + 3v^5 + 9v = 0$

$u^5 + 3u + v^5 + 3v = 0$

$(u+v)(\dots) = 0$

$\cancel{u^5+v^5 = (u+v)}(u^4 + u^3v + u^2v^2 + uv^3 + v^4 + 3) \quad | : v^4$

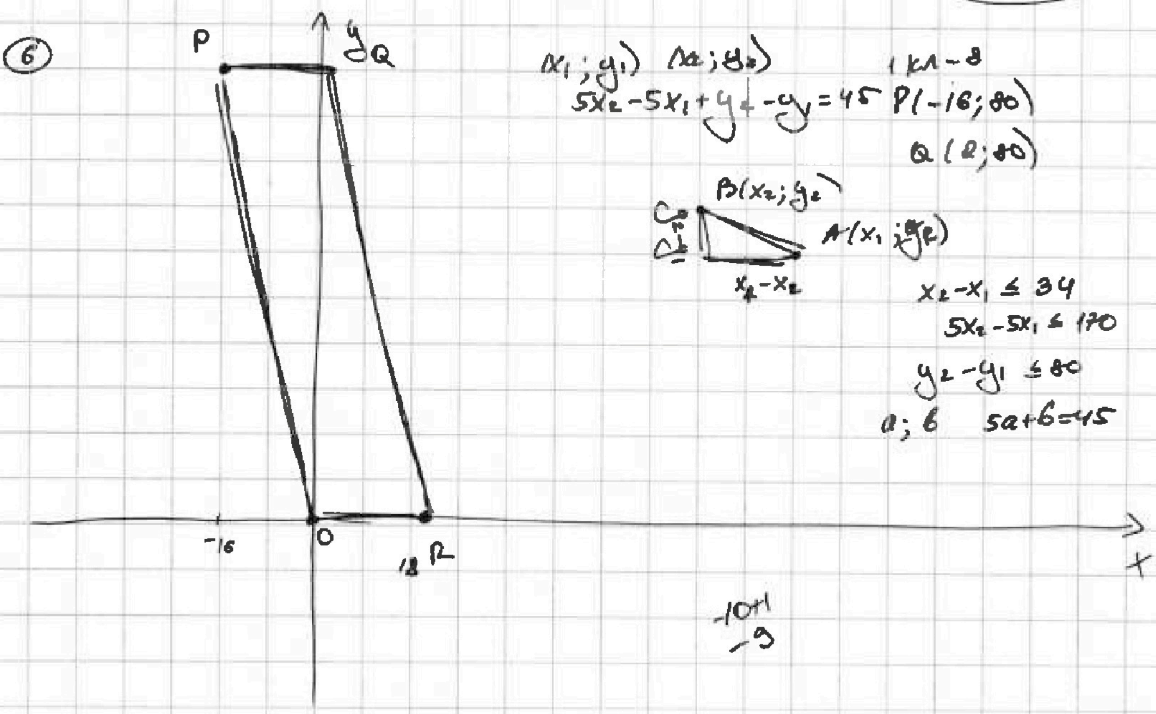
$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{3}{t^4} = f(t)$

$4t^3 + 3t^2 + 2t + 1 - \frac{12}{t^5}$

$u^5 + 3u = -v^5 - 3v \quad f(u) = f(-v)$

$f(t) = t^5 + 3t \uparrow \quad \Rightarrow u = -v$

⑥



$(x_1; y_1) \quad (x_2; y_2)$

$|k| \leq 8$

$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$

$P(-16; 80)$

$Q(2; 80)$

$B(x_2; y_2)$

$A(x_1; y_1)$

$y_2 - y_1$

$x_1 - x_2$

$x_2 - x_1 \leq 34$

$5x_2 - 5x_1 \leq 170$

$y_2 - y_1 \leq 80$

$a; b \quad 5a + b = 45$

$-10+1$

-9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

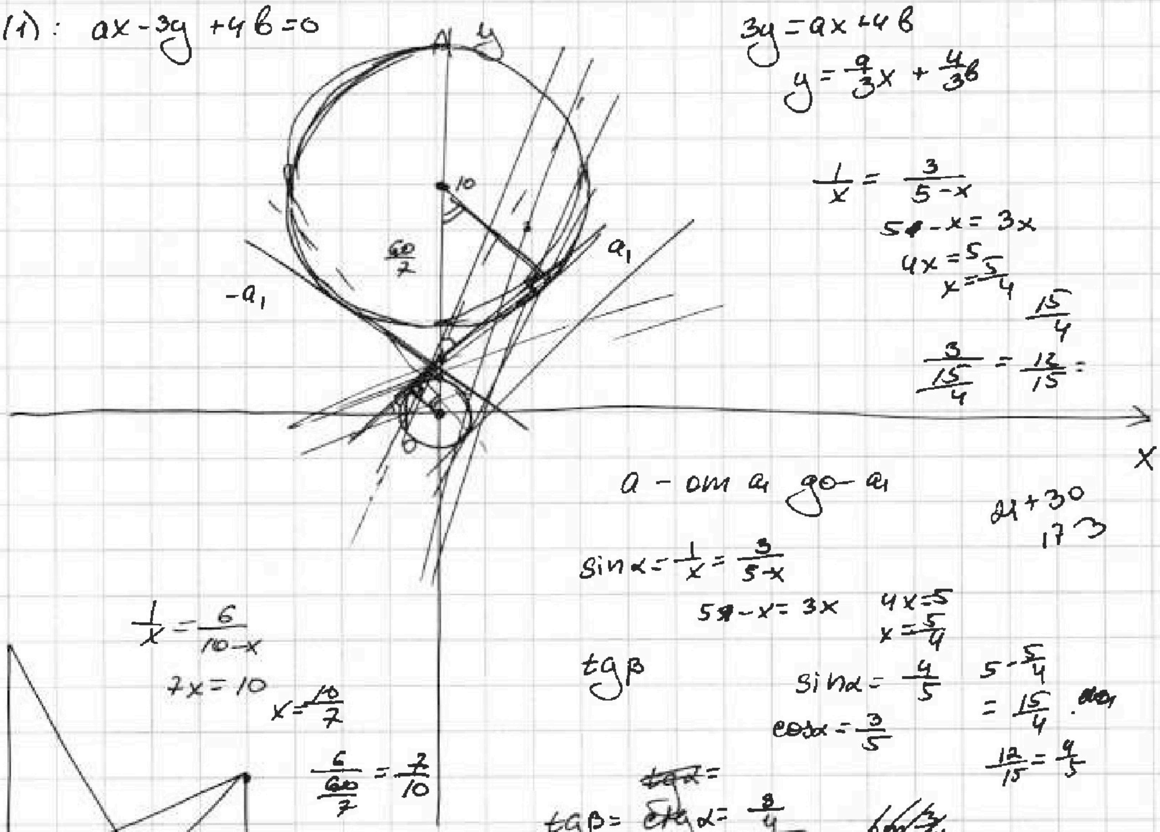
(4) $\begin{cases} ax-3y+4b=0 & (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 & (2) \end{cases}$

(2) : $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=6^2 \end{array}\right.$

$x^2+y^2-20y+64 =$
$= x^2+(y-10)^2+100-36$

(1) : $ax-3y+4b=0$

$3y=ax+4b$
$y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$



$\frac{1}{x}=\frac{3}{5-x}$
$5-x=3x$
$4x=5$
$x=\frac{5}{4}$
$\frac{15}{4}$
$\frac{3}{\frac{15}{4}}=\frac{12}{15}=$

a - от a_1 до $-a_1$

$21+30$
$17\,3$

$\sin\alpha=\frac{1}{x}=\frac{3}{5-x}$
$5-x=3x$ $4x=5$
$x=\frac{5}{4}$

$\frac{1}{x}=\frac{6}{10-x}$
$7x=10$
$x=\frac{10}{7}$

$\frac{6}{\frac{60}{7}}=\frac{7}{10}$

$tg\beta$

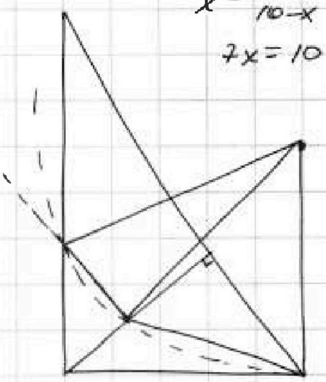
$\sin\alpha=\frac{4}{5}$
$\cos\alpha=\frac{3}{5}$

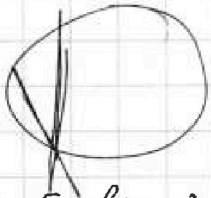
$5-\frac{5}{4}$
$=\frac{15}{4}$
$\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$

$\cancel{tg\alpha}=$
$tg\beta=ctg\alpha=\frac{3}{4}$

$-\frac{a}{3}$ - от $\frac{3}{4}$ до $-\frac{3}{4}$
a - от $\frac{9}{4}$ до $-\frac{9}{4}$

$\left(\frac{9}{4};-\frac{9}{4}\right)$





$\frac{1}{x}=\frac{6}{10-x}$ $10-x=6x$
$7x=10$ $x=\frac{10}{7}$

(5) $\log_5^4(2x)-3\log_{2x}5=\log_{8x^3}625-3$; $\log_5^4 y+4\log_y 5=\log_{y^3}0{,}2-3$

$\frac{4}{3}\log_{2x}5$

$y>0,\ y\neq 1$
$x>0,\ x\neq\frac{1}{2}$

$\log_5(2x)=t$

$\log_{y^3}0{,}2=\log_{y^3}\frac{1}{5}=$
$=-\frac{1}{3}\log_y 5$ $625=5^4$

$t^4-\frac{3}{t}=\frac{4}{3}t-3$ $\mid\cdot 3t$
$3t^5-9-4t^2+9t=0$ $t=4$
$3t^5-4t^2+9t-9=0$

$\log_5 y=V$
$V^4+\frac{4}{V}=-\frac{1}{3}V-3$ $\mid\cdot 3V$
$3V^5+12+V^2+9V=0$
$3V^5+V^2+9V+12=0$

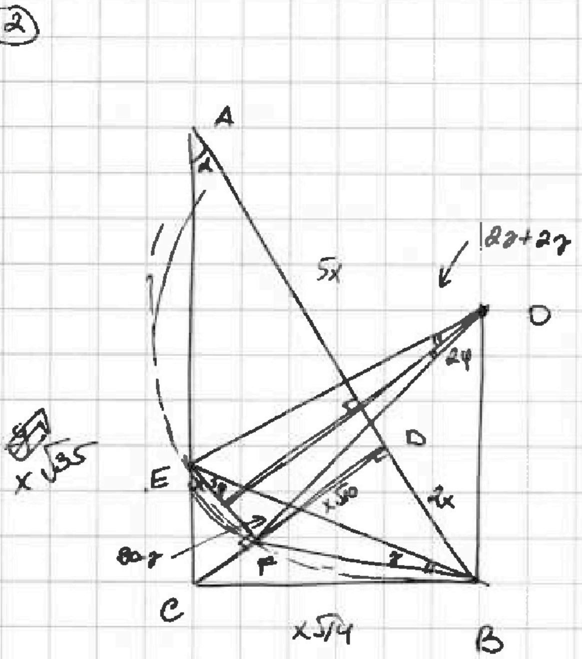
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

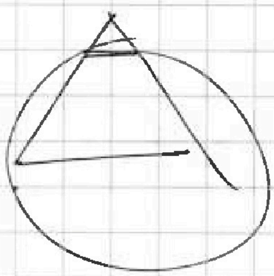
1 2 3 4 5 6 7

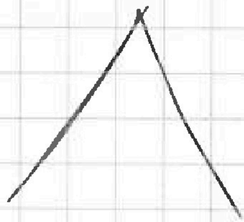
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

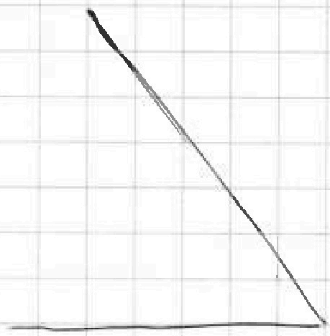
МФТИ

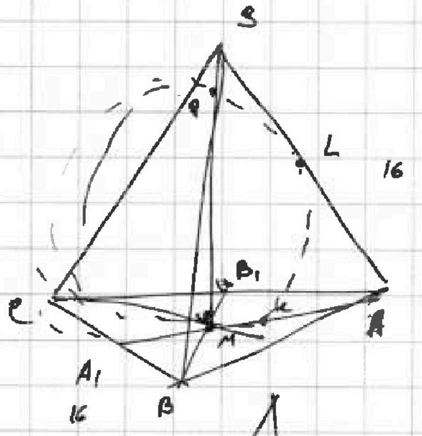
2

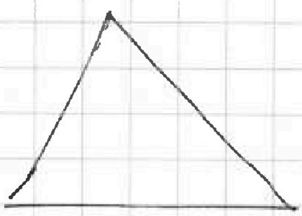


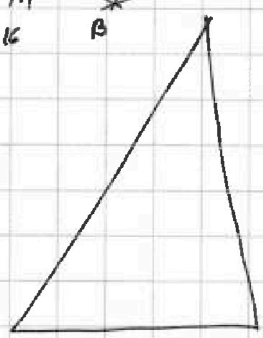


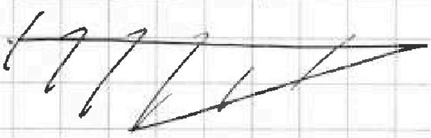


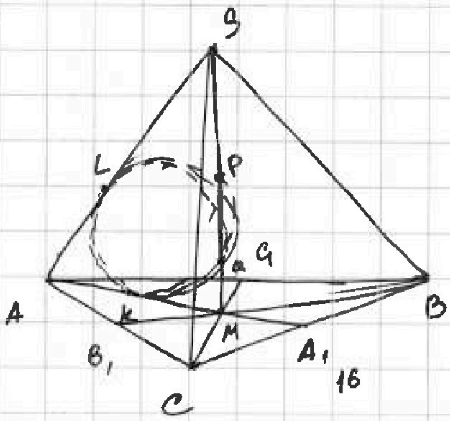












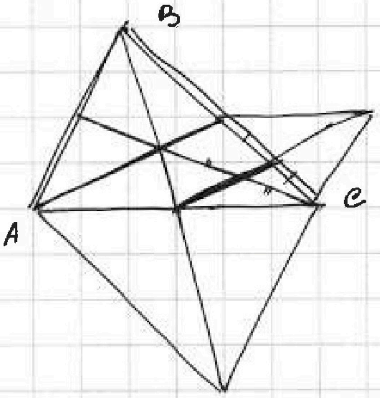
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

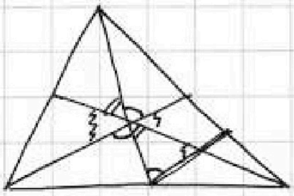
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$34-16$
18





$\frac{a\sqrt3}{2}$ коэфф. подобия $\frac{3}{4}$ S

3_{ax} медиан – 75

$y=0$
$y=80$

$5(x_2-x_1)+y_2-y_1=45$

$0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 9$

$x_2-x_1=9$ $0, 9$ $1, 10, \ldots, 9\ 18$

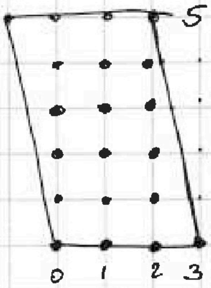
$18\cdot5=90$

$\leftarrow 16$
$\uparrow 80$
$\leftarrow 2$ $\leftarrow 1$
$\uparrow 10$ $\uparrow 5$

PO: $y=-5x$
$-16; 80$

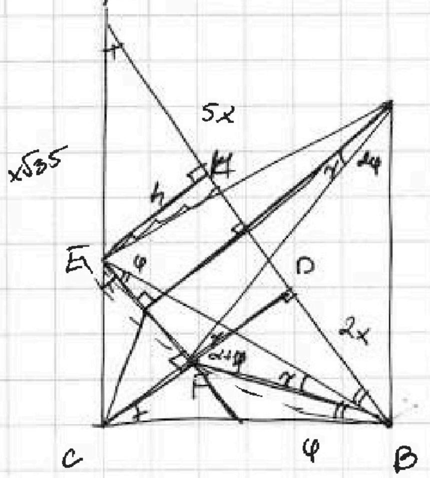
QR: $y=-5x+$
$-5x+80$

$y_2-y_1 : 5$

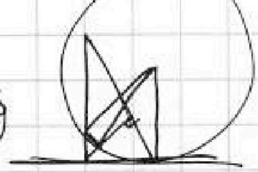


QR – 19
$19\cdot16+$
$19\cdot17+(80-17)\cdot18$ – целых точек

$y_2=y_1$: $10\cdot17+(80-17)\cdot9$



$\frac{x^2\cdot7\sqrt{5}}{2}$



$\frac{BC}{AB}=\frac{CF}{AE}=\frac{\sqrt2}{\sqrt7}$

$2\varphi+\gamma+\alpha=90°$
$2\varphi+\gamma=90°-\alpha$

$\sin\alpha=\ldots$

$CF=a$ $AE=\frac{a\sqrt7}{\sqrt2}$

$\frac{h}{AE}=\sin\alpha=\frac{CF}{AE}=h=CF$ F – середина
ср

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(1) $ab = k\cdot 2^8 3^{14} 5^{12}$; $bc = m\cdot 2^{13}3^{20}5^{12}$, $ac = n\cdot 2^{14}3^{21}5^{39}$

$a^2b^2c^2 = mnk\cdot 2^{35}\cdot 3^{55}\cdot 5^{68}$

$2^{36}\cdot 3^{56}\cdot 5^{68}$

$abc = 2^{18}\cdot 3^{28}\cdot 5^{34}$

$ab = 2^8 3^{14} 5^{12}$

$m, n, k - 2, 3$

$k=1$, $m=2$, $n=3$

$8+13+14 = 21+14$

$14+20+21 = 14+41$

$12+17+39 = 29+39 = 68$

$12+17+39$, 29, 28, 34

$abc: 5^{39}$ $\quad 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{39}$ $- abc$

$bc = 2^{14}\cdot 3^{20}\cdot 5^{17}$?

$abc = 2^{18}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$

$b = 2^4\cdot 3^7$ $\quad a = 2^4\cdot 3^7\cdot 5^{12}$ $\quad c = 2^{10}\cdot 3^{13}\cdot 5^5$

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}$ $\quad b = 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}$ $\quad c = 2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}\cdot 5^{\gamma_3}$

$$\begin{cases}\beta_1+\beta_2 \ge 14\\ \beta_2+\beta_3 \ge 20\\ \beta_3+\beta_1 \ge 21\end{cases}\quad \beta_2 = 0$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2 \ge 8\\ \alpha_2+\alpha_3 \ge 13\\ \alpha_3+\alpha_1 \ge 14\end{cases}\quad 20, 14$$

$2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \ge 35$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \ge 18$

18: $\alpha_3 = 10$, $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 4$

$2(\beta_1+\beta_2+\beta_3) \ge 55$

$\beta_1+\beta_2+\beta_3 = 28$

$\beta_3 = 14$, $\beta_1 = 8$, $\beta_2 = 7$

$$\begin{cases}\gamma_1+\gamma_2 \ge 12\\ \gamma_2+\gamma_3 \ge 17\\ \gamma_3+\gamma_1 \ge 39\end{cases}\quad 56,\ 68$$

$2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) \ge 68$

$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \ge 34$

$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \ge 39$

$2^{18}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$

$a = 2^5\cdot 3^8\cdot 5^{19}$

$b = 2^4\cdot 3^7$

$c = 2^{10}\cdot 3^{14}\cdot 5^{20}$

$\beta_2 = 0$, $\alpha_2 = 0$

$\gamma_1 = 12$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 17$, 39

$20, 13$

(3) $10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\alpha = \arcsin a$ $\quad \begin{cases}\sin\alpha = a\\ -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi-2x}{10}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right) = \cos x & (1)\\ -\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi-2x}{10}\le\frac{\pi}{2} & (2)\end{cases}$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

(2): $-5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi$

$-6\pi \le -2x \le 4\pi$

$-4\pi \le 2x \le 6\pi$

$-2\pi \le x \le 3\pi$

$\sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right) - \cos x = 0$

$\sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 0$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right) = 0$

$\sin\left(\frac{\pi-2x}{5}\right)\cos\left(\frac{3\pi-6x}{10}\right) = 0$

$\frac{\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi-2x}{10}}{2} =$

$= \frac{5\pi - 10x - \pi + 2x}{20} =$

$= \frac{4\pi - 8x}{20} = \frac{\pi-2x}{5}$

$\frac{5\pi - 10x + \pi - 2x}{20} = \frac{6\pi - 12x}{20} = \frac{3\pi - 6x}{10}$

$2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{39}$ $\quad b = 2^7\cdot 3^{13}$

$c = 2^6\cdot 3^7\cdot 5^{22}$

$\frac{5\pi - 10x - \pi + 2x}{10}$ $\quad \frac{4\pi - 8x}{10}$ $\quad \frac{4\pi-8x}{20}$ $\quad \frac{\pi - 2x}{5}$

$\frac{5\pi - 10x + \pi - 2x}{20}$ $\quad \frac{6\pi - 12x}{20}$ $\quad \frac{3\pi - 6x}{10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $\sin\left(\frac{\pi-2x}{5}\right)=0$ $\quad -2\pi \le x \le 3\pi$

$\frac{\pi-2x}{5}=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ $\quad \pi-2x=5\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$2x=\pi-5\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi-5\pi k}{2}\ \ k\in\mathbb{Z}$

$k=0:\ \frac{\pi}{2}$ $\quad k=-1:\ \frac{6\pi}{2}=3\pi$ $\quad k=1\ \ \frac{-4\pi}{2}=-2\pi$

2): $\cos\left(\frac{3\pi-6x}{10}\right)=0$

$\frac{3\pi-6x}{10}=\frac{\pi}{2}+\pi k$

$3\pi-6x=5\pi+10\pi k$

$6x=-2\pi-10\pi k$

$x=-\frac{2\pi+10\pi k}{6}=-\frac{\pi+5\pi k}{3}$

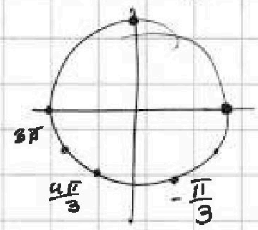
$k=0:\ -\frac{\pi}{3}$

$k=1\ \ -\frac{6\pi}{3}=-2\pi$

$k=-1:\ -\frac{-4\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$

$k=-2:\ \frac{9\pi}{3}=+3\pi$

$\left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{3} \\ \frac{4\pi}{3} \\ -2\pi \\ 3\pi \end{array}\right.$



$3\pi:\ \cos x=-1$

$\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$

-5π

$\pi-6\pi$ $\quad -2\pi$

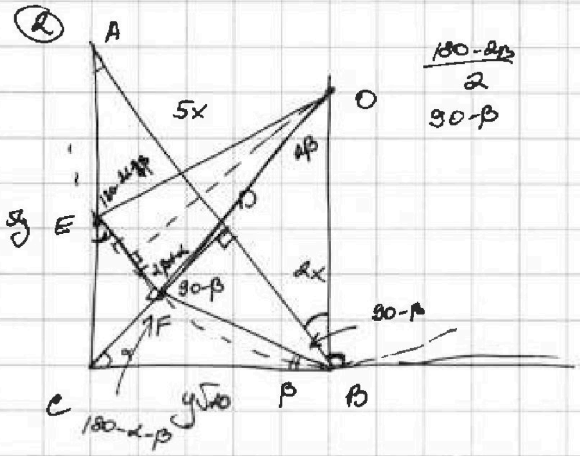
$\cos x$ $\ 5\pi$

$\frac{4\pi}{3}:\ -\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{\pi}{3}:\ \cos x=\frac{1}{2}$

$-\frac{\pi}{6}$ $\quad 10\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{3}$

$-\frac{5\pi}{3}$ $\quad \pi-\frac{8\pi}{3}=-\frac{5\pi}{3}$ $\quad \pi+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$

②



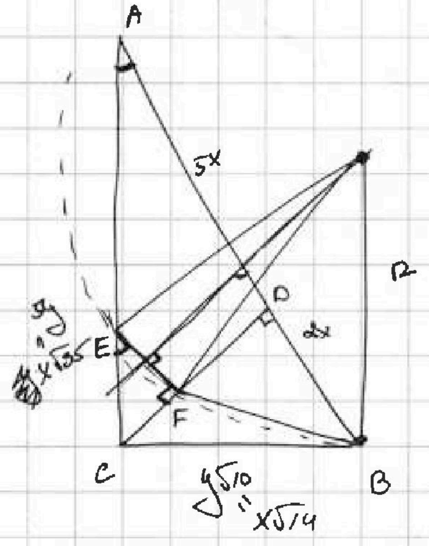
$\frac{180-2\beta}{2}$

$90-\beta$

$AD:DB=5:2$ $\quad \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}-?$

$tg\,\alpha=\frac{h}{5x}=\frac{2x}{h}$ $\quad AB\parallel EF$ $\quad \frac{CF}{CD}=\frac{CE}{CA}$

$h^2=10x^2$ $\quad h=x\sqrt{10}$ $\quad \frac{BC}{AC}=\frac{h}{5x}=\frac{\sqrt{10}}{5}$



$25y^2+10y^2=35y^2$

$y\sqrt{35}=7x$

$y=\frac{7x}{\sqrt{35}}=x\sqrt{\frac{7}{5}}$

$S_{ABC}=\frac{x^2\sqrt{35\cdot14}}{2}=$

$=\frac{x^2\cdot7\sqrt{10}}{2}$

$y\cdot5=\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{5}}x=\frac{25\sqrt{7}}{5}$

$\sqrt{35}\ x$

$\sqrt{10}y=\sqrt{\frac{70}{5}}x=$

$=\sqrt{14}\ x$

$360-180+\alpha+\beta-90+\beta-90=$

$=2\beta+\alpha$

$180-\alpha-\alpha-2\beta$