



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $a_2 = \sqrt{2}(a)$ ,  $b_2 = \sqrt{2}(b)$ ,  $c_2 = \sqrt{2}(c)$ ,  
аналогично определим  $a_3, b_3, c_3, a_5, b_5, c_5$ .

$\sqrt{p}(n)$  - степень включения  $p$  в  $n$ .

Из условий:

$$\begin{cases} ab: 2^7 \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 7 \\ bc: 2^{13} \Rightarrow b_2 + c_2 \geq 13 \\ ac: 2^{14} \Rightarrow a_2 + c_2 \geq 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 7 + 13 + 14 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 17.$$

Аналогично для 3 и 5 получаем

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 11 \\ b_3 + c_3 \geq 15 \Rightarrow 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 43, a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{Z} \\ a_3 + c_3 \geq 17 \end{cases} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 22$$

$$\begin{cases} a_5 + b_5 \geq 14 \\ b_5 + c_5 \geq 18 \Rightarrow 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 75, a_5, b_5, c_5 \in \mathbb{Z} \\ a_5 + c_5 \geq 43 \end{cases} \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 38$$

Но  $a_5 + c_5 \geq 43 \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 43$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(abc) = a_2 + b_2 + c_2 \geq 17$$

$$\sqrt{3}(abc) = a_3 + b_3 + c_3 \geq 22$$

$$\sqrt{5}(abc) = a_5 + b_5 + c_5 \geq 43$$

$$\Rightarrow abc: 2^{17} 3^{22} 5^{36} \Rightarrow abc \geq 2^{17} 3^{22} 5^{43}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

...  $\Rightarrow$  то годит и малее при

$$a_2 = 4 \left\{ \begin{array}{l} a = 2^4 3^7 5^{21} \\ b = 2^3 3^5 5^0 \\ c = 2^{10} 3^{10} 5^{22} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \min(abc) = 2^{17} 3^{22} 5^{48}$$

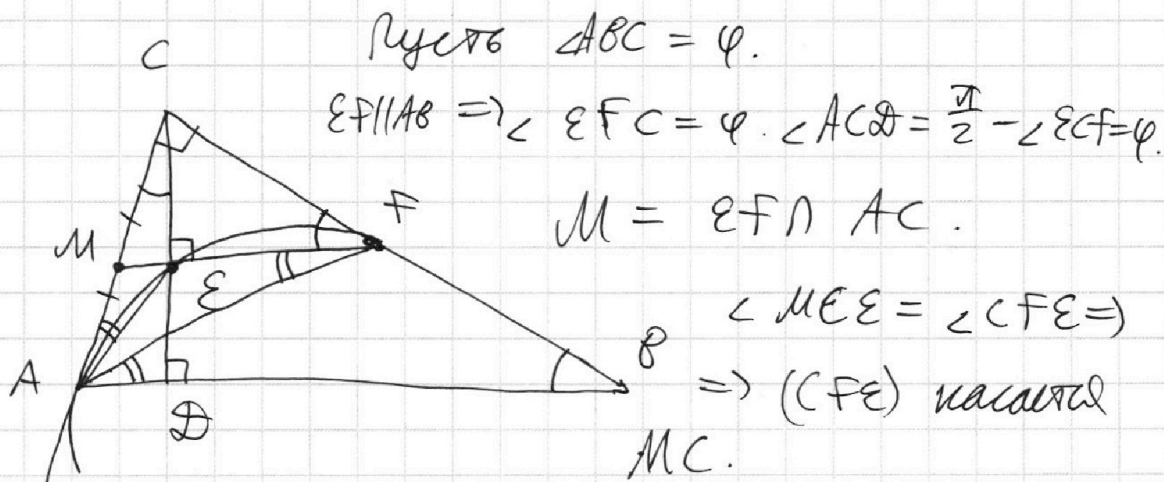
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\Rightarrow ME \cdot MF = \text{pow}(M, (CFE)) = MC^2.$$

$\text{pow}(P, \omega)$  - степень точки  $P$  отн.  $\omega$ .

$$(AFE) \text{ касается } AC \Rightarrow MA^2 = ME \cdot MF.$$

$$\Rightarrow MA^2 = ME \cdot MF = MC^2 \Rightarrow MA = MC.$$

$$\Rightarrow S_{\triangle CFE} = \frac{1}{4} S_{\triangle CBD}. \quad (EF \parallel BD \text{ и } MA = MC)$$

$$\Rightarrow MF - \text{ср. линия } \triangle CBD \Rightarrow \frac{S_{CFE}}{S_{CBD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{S_{\triangle ACB}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot CD \cdot (AB - BD)}{\frac{1}{2} \cdot CD \cdot BD} = \frac{a_1 \cdot 3}{1} = a_1 \cdot 3.$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ACB}}{S_{\triangle CEF}} = 4 \frac{S_{\triangle ACB}}{S_{\triangle BCD}} = 1,2.$$

Ответ: 1,2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} - x$$

$$\Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5}$$

$$\Rightarrow \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5} + 2\pi k & (1) \\ -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5} + 2\pi k & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{6}{5}x = \frac{\pi}{5} - 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) \Rightarrow \frac{4}{5}x = \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$4x = 4\pi + 10\pi k$$

$$x = \pi + \frac{5}{2}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + n \frac{5\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ x = \pi + \frac{5}{2}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



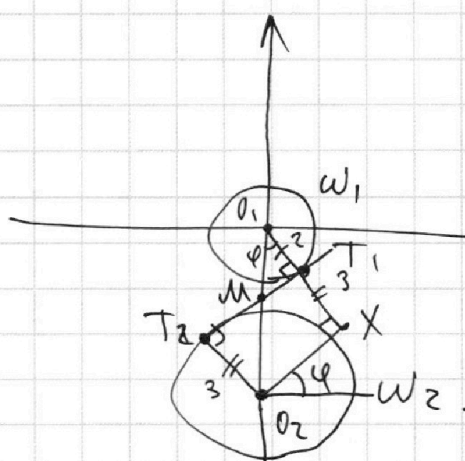
$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Построим графики. Это будут окружности  
с центрами в  $(0;0)$  и  $(-7;0)$  и  
радиусами 2 и 3.



Рассмотрим их общую  
внутреннюю касательную и  
их коэффициент наклона.

$$O_1X = R_1 + R_2 = 5$$

$$O_1O_2 = 7.$$

$$\Rightarrow O_2X = \sqrt{7^2 - 5^2} = 2\sqrt{6}.$$

$\Rightarrow$  для  $101$  касательной

$$\text{коэф. наклона } \psi_1 = \operatorname{tg} \varphi = \frac{O_2X}{O_1X} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

$$(\varphi = \frac{\pi}{2} - \angle O_1O_2X = \angle O_2O_1X).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда для второй касательной, из  
анализа,  $\psi_2 = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ .  $k = -\frac{1}{3a}$ .

Тогда, если  $k \in (\psi_2; \psi_1) \Rightarrow y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7\sqrt{6}}{3a} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = kx + \frac{7\sqrt{6}}{3a} = \omega(x)$$

$\Rightarrow$  При  $k \in [\psi_2; \psi_1]$ , <sup>если</sup> любая прямая  
такого вида ( $\omega(x)$ ) будет пересекать  
одну из окружностей в 2 точки, то она  
не будет пересекать группу, т.к. ~~тогда~~

$$k \neq 0 \quad |k| \in \psi_2 \leq k \leq \psi_1.$$

$\Rightarrow$  Такое возможно при  $k \in (-\infty; \psi_2) \cup (\psi_1; +\infty)$ .

выберем в такое, что  $\frac{7\sqrt{6}}{3a} = y_M$ , где  $M =$

$$= T_1, T_2 \cap O_1, O_2. \Rightarrow \text{При } k > \psi_1 \text{ или } k < \psi_2$$

коэф. наклона  $\omega(x)$  будет <sup>большее</sup> ~~стольнее~~, чем у  
касательной (обисей)  $\Rightarrow$  она пересечет  
обе окружности в 2 точки.

$$\Rightarrow -\frac{1}{3a} \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}; +\infty\right) \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{6\sqrt{6}}{5}\right) \cup \left(\frac{6\sqrt{6}}{5}; +\infty\right).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\log_7 y)^5 + 4 \log_7 y = -\frac{7}{2} = -((\log_7 w)^5 + 4 \log_7 w)$$

то получаем, что  $\log_7 y = -\log_7 w$

$$\Rightarrow \log_7 y + \log_7 w = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_7 (yw) = 0 \Rightarrow yw = 1$$

$$\Rightarrow 6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

Ответ:  $xy = \frac{1}{6}$ .

Других значений для  $xy$  нет,  
так как мы делаем равносильные  
перекоды и получили однозначный  
ответ.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left. \begin{array}{l} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \quad (1) \\ \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4. \quad (2) \end{array} \right\}$$

$$y > 0 \text{ и } 6x > 0 \Rightarrow y = |y|, x = |x|.$$

$$\text{Пусть } |6x| = w. \quad w > 0, |w| = w.$$

Решим выражения.  $\ln w \neq 0, \ln y \neq 0$ .

$$(1) \Leftrightarrow \left( \frac{\ln w}{\ln 7} \right)^4 - 2 \left( \frac{\ln 7}{\ln w} \right) = \frac{\ln 343}{\ln w^2} - 4$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\ln w}{\ln 7} \right)^4 - 2 \left( \frac{\ln 7}{\ln w} \right) = \frac{3 \ln 7}{2 \ln w} - 4$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\ln w}{\ln 7} \right)^5 - \frac{7}{2} + 4 \left( \frac{\ln w}{\ln 7} \right) = 0$$

$$\Rightarrow (\log_7 w)^5 + 4 \log_7 w = \frac{7}{2}.$$

$$(2) \Leftrightarrow \left( \frac{\ln y}{\ln 7} \right)^4 + 6 \frac{\ln 7}{\ln y} = \frac{5 \ln 7}{2 \ln y} - 4$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\ln y}{\ln 7} \right)^5 + \frac{7}{2} \frac{\ln y}{\ln 7} + 4 = 0. + 4 \frac{\ln y}{\ln 7} = 0.$$

$$\Rightarrow (\log_7 y)^5 + 4 \log_7 y = -\frac{7}{2}.$$

Функции  $y=x$ ,  $y=x^5$  и  $y=\log_7 x$   
прикидают каждое значение в

единственной точке  $\Rightarrow$  так как

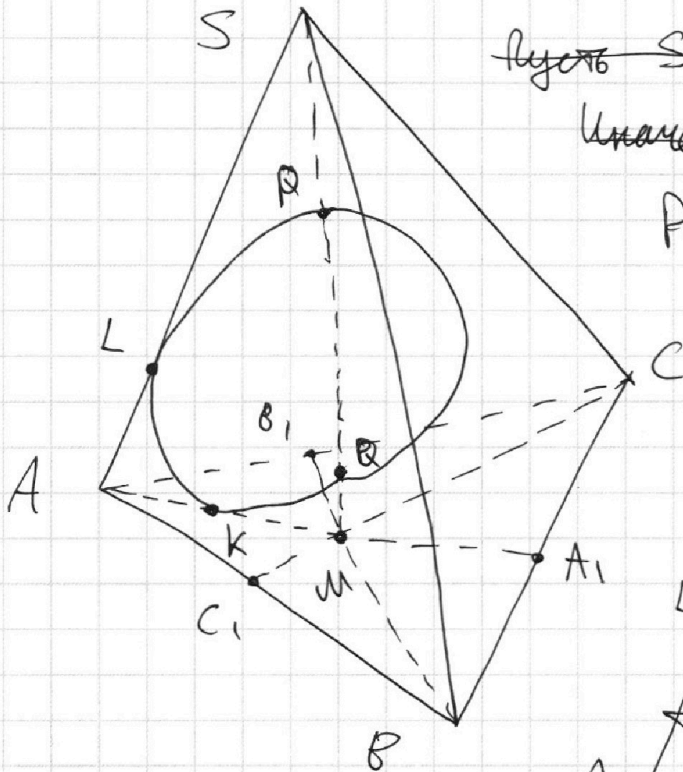
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



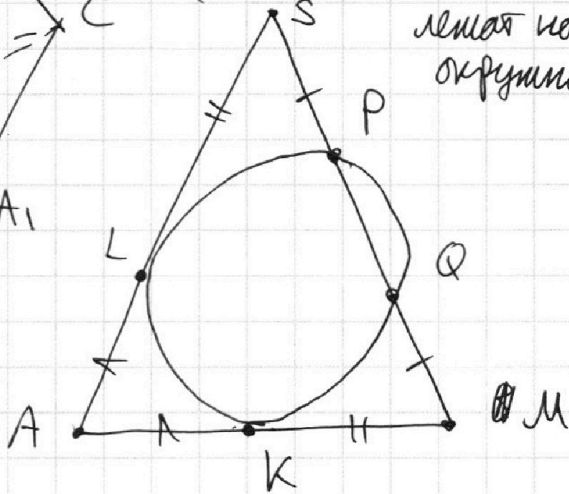
~~Пусть  $SP < SQ$ .~~

~~Тогда  $SP^* = SP - PQ = SQ^*$ .~~

Рассмотрим плоскость

$(ASM) \Rightarrow P, Q, L, K$

лежат на  
окружности.



$$\begin{aligned}
 (\star) \quad SP = MK &\Rightarrow SP \cdot PSQ = MK \cdot QM \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \text{pow}(S, (PQKL)) = \text{pow}(M, (PQKL)) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow MK^2 = LS^2 \Rightarrow MK = LS.
 \end{aligned}$$

$$\text{Но } AL = AK = \sqrt{\text{pow}(A, (PQKL))} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AM = \cancel{SA} SA = AL + LS = AK + KM.$$

$$\Rightarrow AM = SA = 10.$$

Рассмотрим  $\triangle ABC$ .

( $\star$ ) [ Если P и Q даны в другом положении, т.е.  $SP > SQ$ , то равенство всё равно выполняется ].

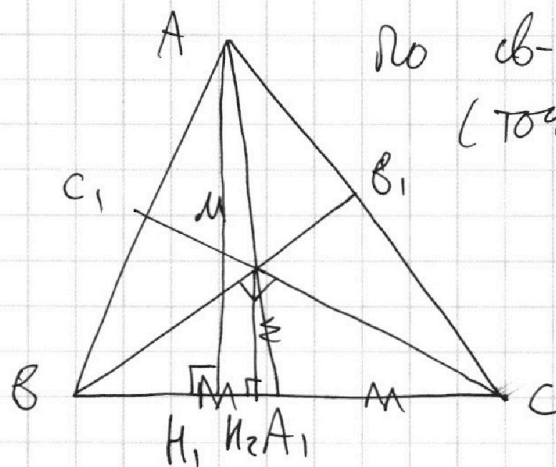
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



По св-ву центра масс  
(точки M),  $\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1} = \frac{CM}{MC_1} = \frac{2}{1}$ .

$$= 2 \Rightarrow MA_1 = \frac{1}{2} AM = 5.$$

$$\text{По } BA_1 = CA_1 = \frac{1}{2} BC = 5 = MA_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  в  $\triangle BMC$  медиана  $MA_1$  равна  
повышенной стороне  $\Rightarrow \angle BMC = \frac{\pi}{2}$ .

$$MC = \frac{2}{3} CC_1; MB = \frac{2}{3} BB_1 \Rightarrow BM \cdot MC = \frac{4}{9} BB_1 \cdot CC_1.$$

Пусть  $H_1, H_2 \in BC: AH_1 \perp BC; MH_2 \perp BC$ .

$$H_1A \parallel MH_2 \Rightarrow \triangle A_1H_2M \sim \triangle A_1H_1A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{H_2M}{H_1M} = \frac{\frac{1}{2} H_2M \cdot BC}{\frac{1}{2} H_1M \cdot BC} = \frac{S_{\triangle BMC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{A_1M}{A_1A} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle BMC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{60}{3} = 20.$$

$$\text{По } S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot MC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BM \cdot MC = 2 S_{\triangle BMC} = 40.$$

$$\text{По } BM \cdot MC = \frac{4}{9} BB_1 \cdot CC_1 \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{40}{4} \cdot 9 = 90.$$

$$AA_1 = \frac{3}{2} AM = 15 \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 90 \cdot 15 = 1350.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

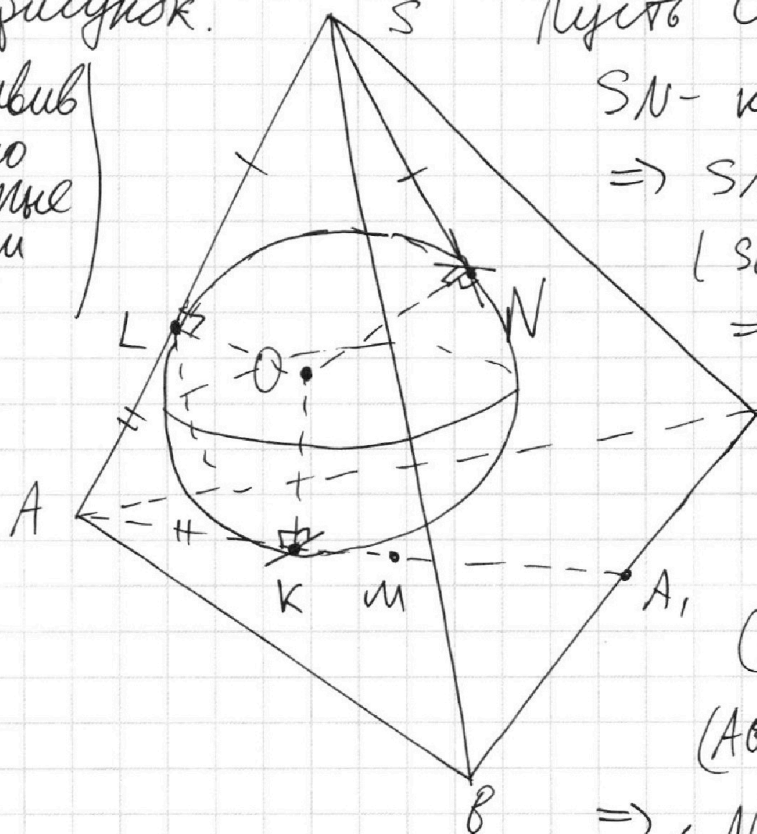
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



... Остался пункт б). Сделаем новый

рисунок.

(оставив только нужные точки)



Пусть  $O$  - центр  $\Omega$

$SN$  - касательная  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow SN = SL = 3.$$

( $SL$  - тоже касательная)

$$\Rightarrow AL = AS - SL = 10 - 3 = 7.$$

$$AK = AL = 7.$$

$\Omega$  касается

$(BSC)$  в  $N$  и

$(ABC)$  в  $K \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle NOK$  дополняет

и малый двугранный угол  $\varphi$  при  $BC$  до  $\pi$ , так как

Если мы соединим  $O$  с точкой  $T$  так, чтобы

$OT = \rho(O, BC)$ , и опустим из  $O$  перпендикуляры

$OX, OY$  на  $(ABC)$  и  $(BSC)$ , то ~~они взаимно перпендикулярны~~

$(OXTY)$  будет взаимным и  $\angle XOY + \angle YTX = \pi$ .

(в данном случае  $X = K, Y = N$ ).

$LO = \rho(O, AS)$  и  $NO = \rho(O, (BSN))$ ,  $OK = \rho(O, (BC))$

$\Rightarrow (LOKA)$  и  $(SNLO)$  по  $(SLO)$  и  $(SLA)$  и  $(OLA)$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Это одна и та же плоскость  $\Rightarrow$

$\Rightarrow N, S, L, O, A, K$  лежат на одной плоскости. рассмотрим её и

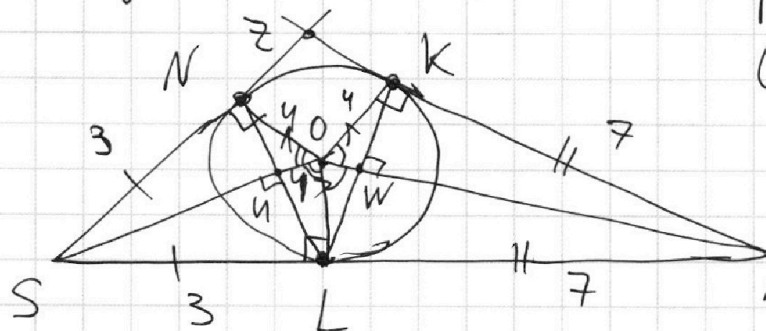
найдем  $KLN$ . ( $\sin \angle MON$ ).

по т. Пифагора,

$$OS = \sqrt{OL^2 + SL^2} = 5$$

$$AO = \sqrt{AL^2 + OL^2} =$$

$$= \sqrt{65}$$



$SO \perp NL$  и  $OA \perp LK$

в т.  $\Delta$ ,  $\frac{ab}{c} = h$ .

$$\Rightarrow \frac{NL}{2} = \rho(L, OS) = \frac{SL \cdot OL}{OS} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5}$$

$NL = \frac{24}{5}$ . Аналогично,

$$LK = \frac{56}{\sqrt{65}}$$

$$\& \angle KOL = 2 \arcsin \left( \frac{KL}{2OK} \right) = \left( \frac{7}{\sqrt{65}} \right) 2 \arcsin \left( \frac{7}{\sqrt{65}} \right)$$

$$\angle NOL = 2 \arcsin \left( \frac{LN}{2R} \right) = \frac{3}{5} 2 \arcsin \left( \frac{3}{5} \right)$$

$$\Rightarrow \angle NOK = 2\pi - \left( \arcsin \left( \frac{7}{\sqrt{65}} \right) + \arcsin \left( \frac{3}{5} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \psi = \pi - \angle NOK = 2 \arcsin \left( \frac{7}{\sqrt{65}} \right) + 2 \arcsin \left( \frac{3}{5} \right) -$$

$-\pi$  что и требовалось найти.

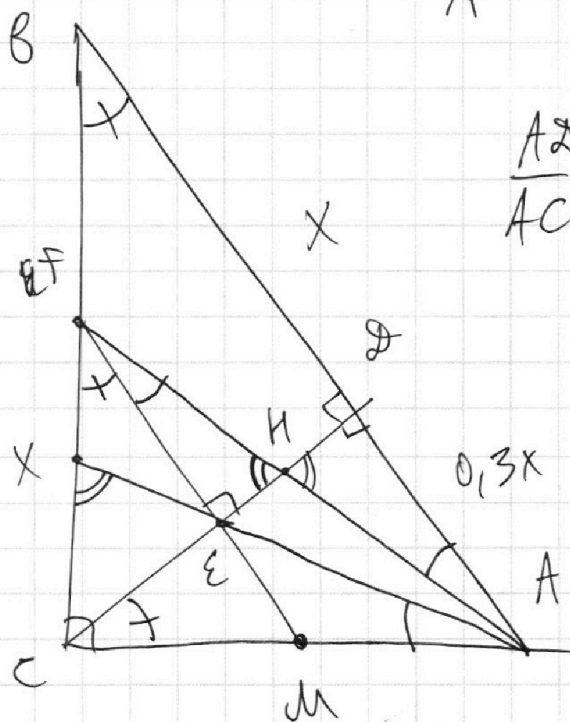
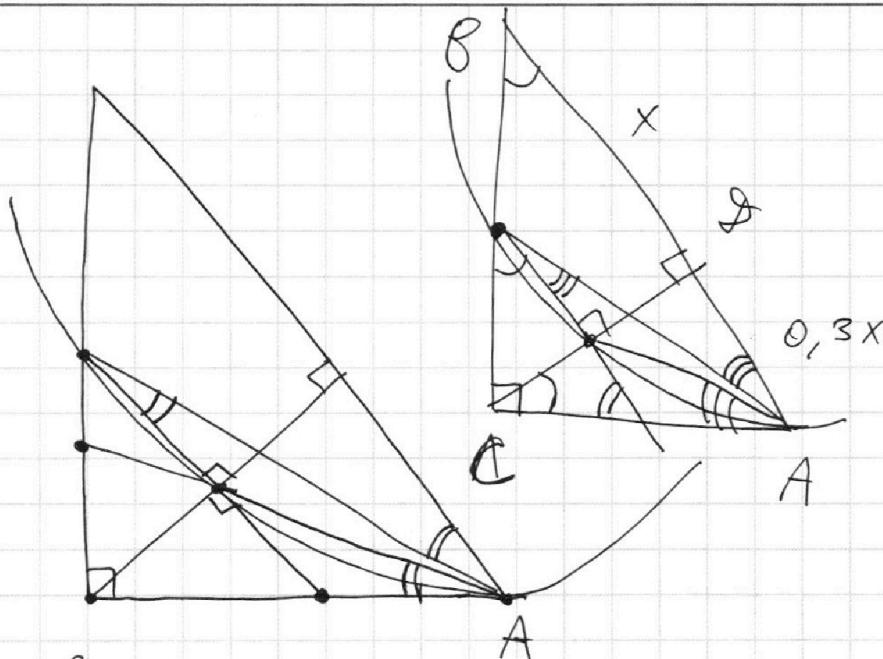
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AH}{AC} = \frac{DH}{CX} = \frac{AE}{AB}$$

$$\frac{DH}{HE} = \frac{AE}{CE}$$

$$MC^2 = MF \cdot ME =$$

$$= \cancel{0,3} k^2 x^2$$

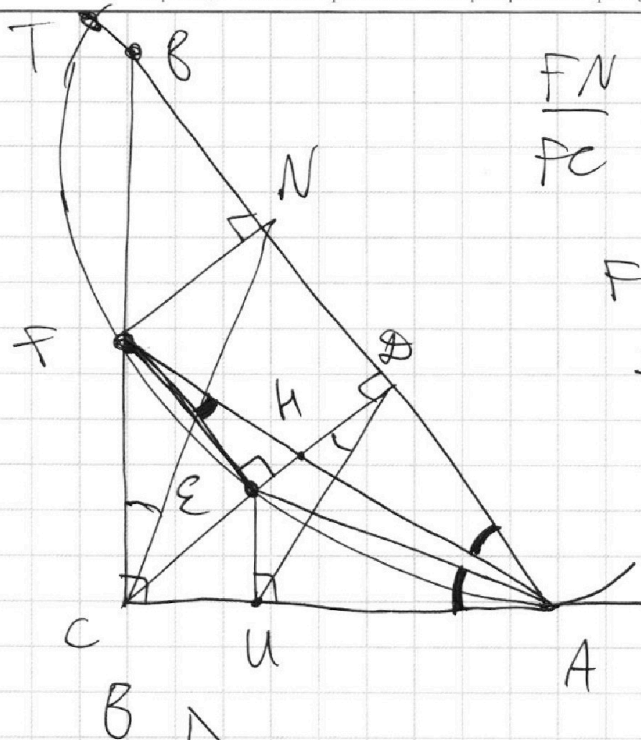
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

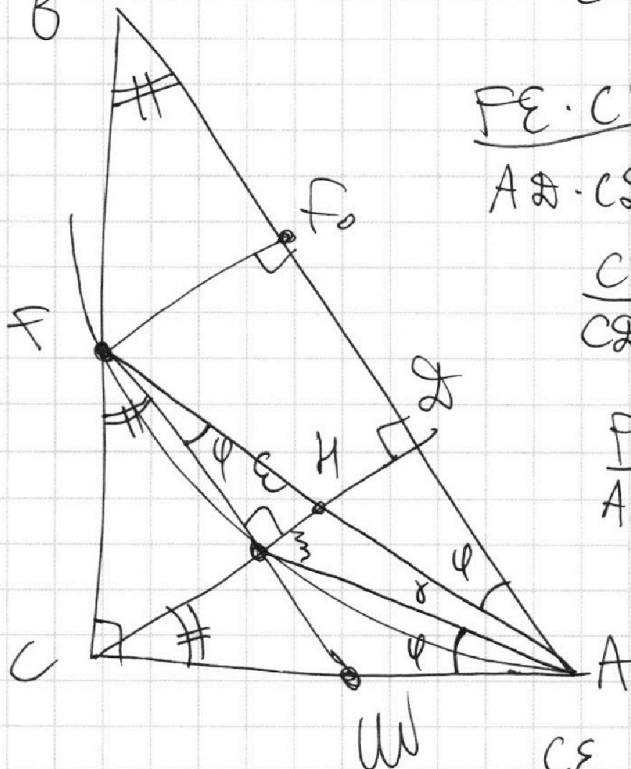
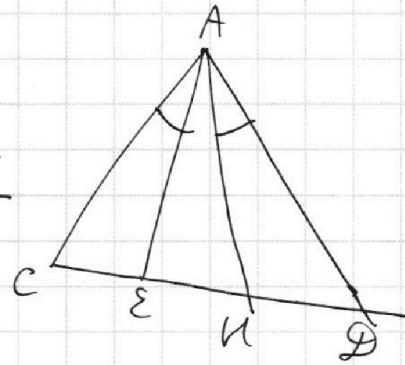
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{FN}{FC} = \frac{\epsilon \eta}{\epsilon \vartheta}$$

$$FC \cdot \epsilon \eta = FN \cdot \epsilon \vartheta$$

$$FC \cdot \epsilon \eta = \epsilon \vartheta^2$$



$$\frac{FE \cdot CE}{AD \cdot CD}$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{FE}{BD}$$

$$\frac{FE}{AD} = \frac{\epsilon \eta}{\eta \vartheta}$$

$$\frac{CE \cdot CH}{\epsilon \vartheta \cdot \eta \vartheta} = \left( \frac{AC}{AD} \right)^2$$

$$\frac{CE}{CD} \cdot \frac{\vartheta \eta}{\eta \vartheta} = \left( \frac{AC}{AD} \right)^2$$

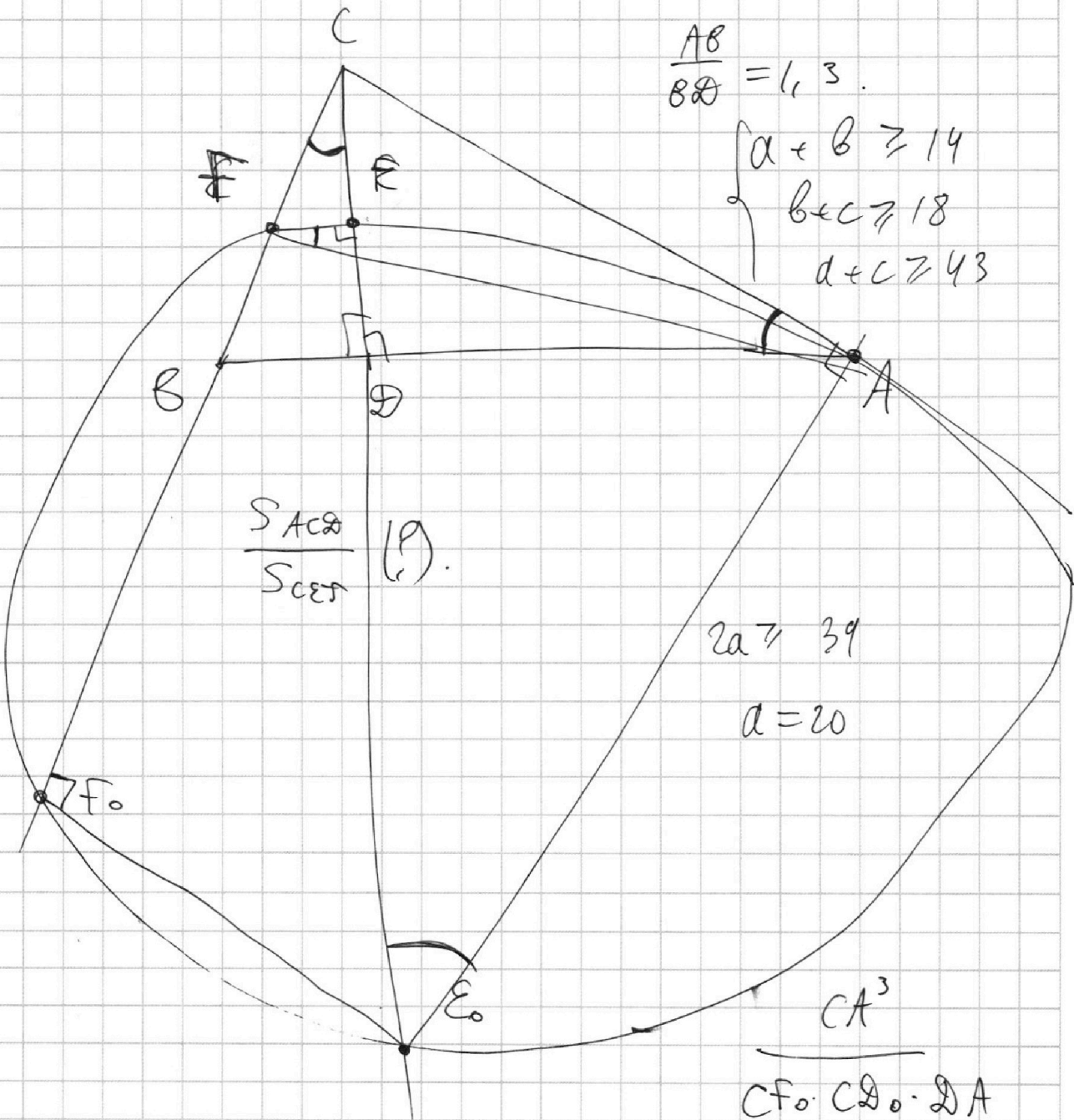
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CF \cdot CF_0 = CE \cdot CE_0 = CA^2.$$

$$\frac{S_{CFE}}{S_{ACE}} = \frac{CE \cdot FC}{CA \cdot DA} = \frac{CA^4}{CF_0 \cdot CE_0 \cdot CA \cdot DA}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

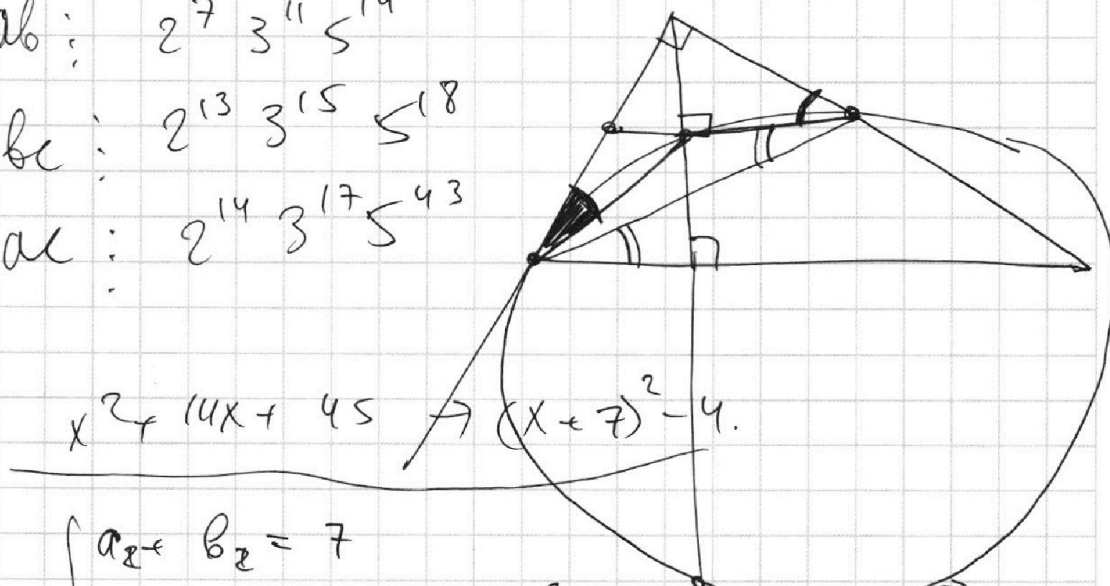
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ab: 2^7 3^{11} 5^{14} \\ bc: 2^{13} 3^{15} 5^{18} \\ ac: 2^{14} 3^{17} 5^{43} \end{cases}$$



$$x^2 + 14x + 45 \rightarrow (x+7)^2 - 4.$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 7 \\ a_2 + c_2 = 14 \\ b_2 + c_2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_2 = 21 - 13 = 8 \\ a_2 = 4 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 10 \end{cases} \checkmark$$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 11 \\ b_3 + c_3 \geq 15 \\ a_3 + c_3 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_3 = 13, a_3 \geq 7 \\ a = 7 \\ b = 5 \\ c = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c) \geq (\dots)$$

$$\begin{cases} 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 43 \\ 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 34 \Rightarrow e \geq 7 \\ 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 75 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~ln a~~  
~~ln b~~

$$\log_7^5 y + 4 \log_7 y = -\frac{7}{2}$$

$$\log_7^5 6x + 4 \log_7 6x = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \log_7 y = -\log_7 6x \Rightarrow y = (6x)^{-1}$$

$$\frac{\ln y}{\ln 7} = -\frac{\ln 6x}{\ln 7}$$

$$\ln y = -\ln 6x$$

~~$$\Rightarrow y = -6x$$~~

$$\Rightarrow y \neq e^{\ln y} = e^{-\ln 6x}$$

~~$$e^{\ln y + \ln 6x} = 1$$~~

~~$$\ln y + \ln 6x \neq 0$$~~

~~$$\ln(6xy) \neq 0$$~~

$$\ln y + \ln 6x = 0$$

$$\ln(6xy) = 0, \quad 6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{-\ln 6x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x.$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi + 2x}{10}\right).$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi + 2x}{10}\right)$$

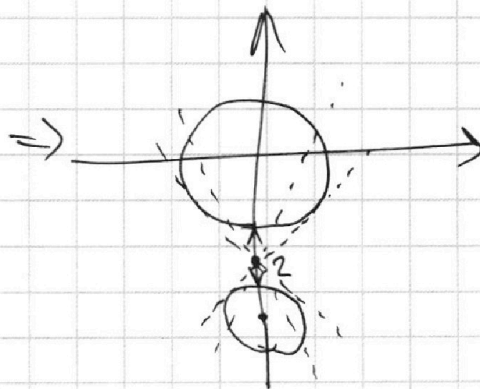
$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi + 2x}{10} + 2\pi k$$

$$\cancel{5\pi} - 10x = 3\pi + 2x + 20\pi k$$

$$\cancel{12x} = 2\pi + 20\pi k$$

$$x = \frac{\pi + 10\pi k}{6}$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

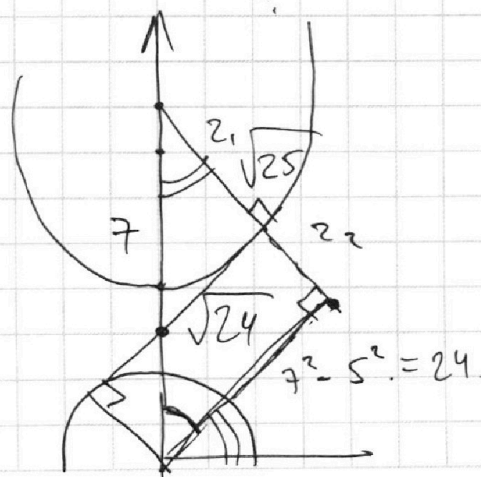


$$y = -\frac{x}{3a} + \left(\frac{7b}{3a}\right)$$

$$y = -\left(\frac{1}{3a}\right)x + c$$

$$y = kx + c$$

$$\cos \varphi = \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \Delta$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x}(7) = \log_{36x^2} 343 - 4.$$

$$\left(\frac{\ln(6x)}{\ln 7}\right)^4 - 2 \left(\frac{\ln 7}{\ln 6x}\right) = \frac{\ln 343}{\ln(36x^2)} - 4$$

$$\left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right)^4 - 2 \frac{\ln 7}{\ln 6x} = \frac{3 \ln 7}{2 \ln 6x} - 4$$

$$\left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right)^5 - \frac{7}{2} + 4 \frac{\ln 6x}{\ln 7} = 0. = x(?)$$

$$2x^5 - 7 + 4x = 0.$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4$$

$$\left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right)^4 + 6 \left(\frac{\ln 7}{\ln y}\right) = \frac{5 \ln 7}{2 \ln y} - 4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right)^5 + 4 \left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right) = \frac{7}{2}$$

$$\left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right)^5 + 4 \left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right) = -\frac{7}{2}$$

$$(\ln 6x)^5 + 4 (\ln 6x) (\ln 7)^4 + (\ln y)^5 + 4 (\ln y) (\ln 7)^4$$



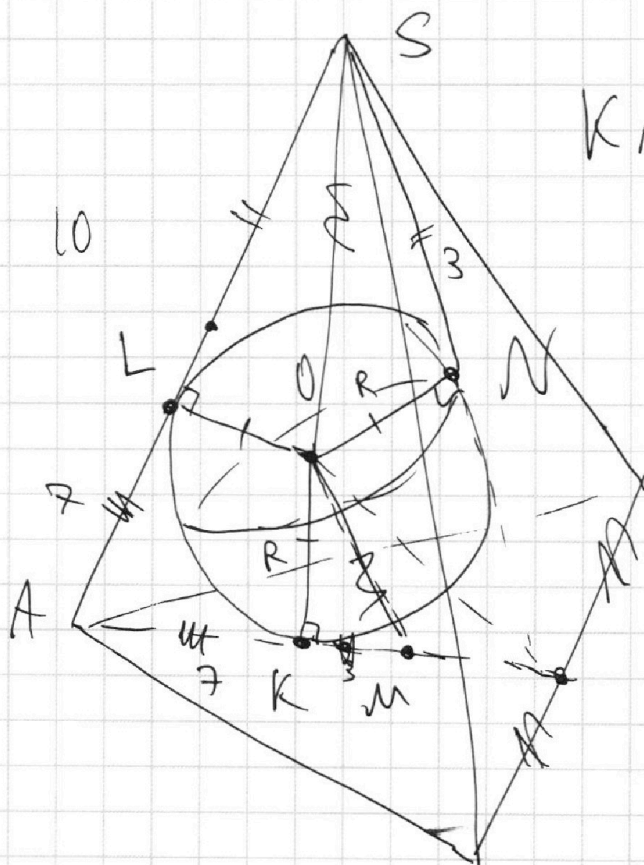
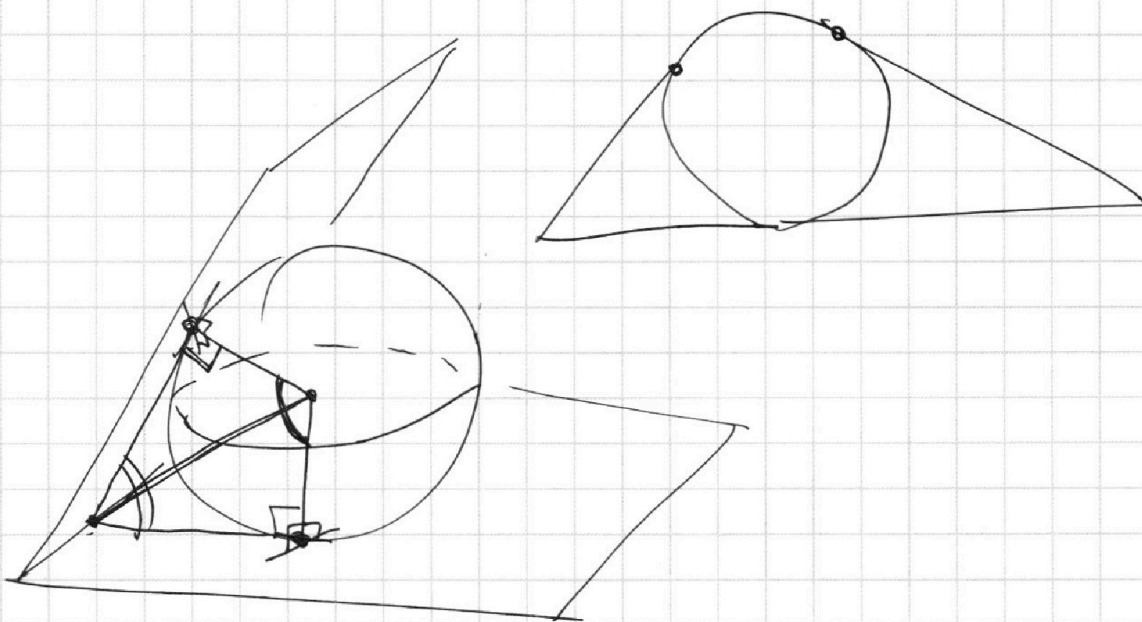
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$KN(???)$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

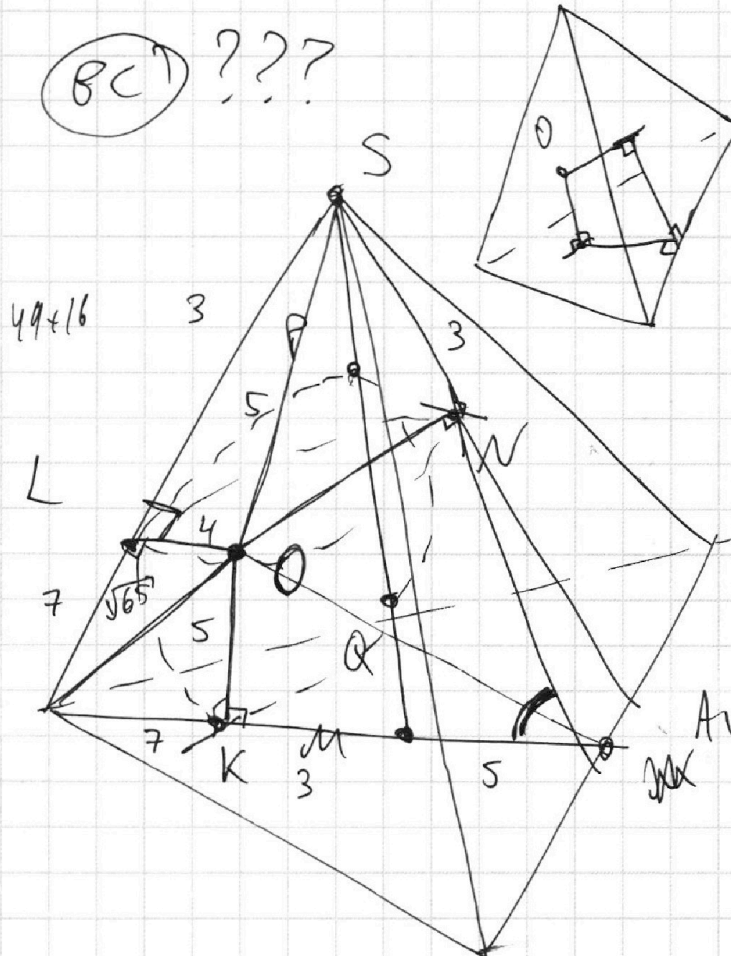
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



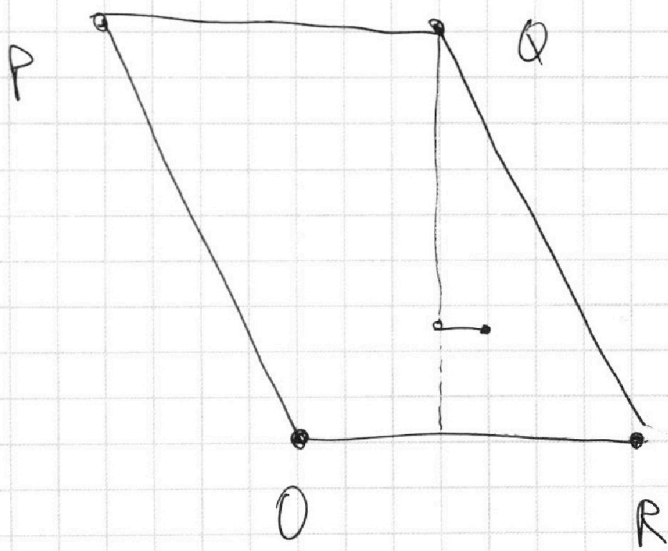
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\text{BCI} \text{ ???}$



$A, N(?)$



$\#(\Delta x, \Delta y)$   
 $\downarrow$   
 0, 40  
 1, 36  
 2, 32  
 $\vdots$   
 10, 0.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7

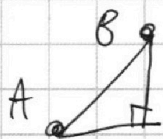
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



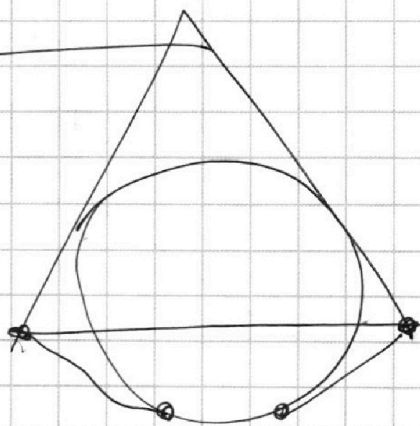
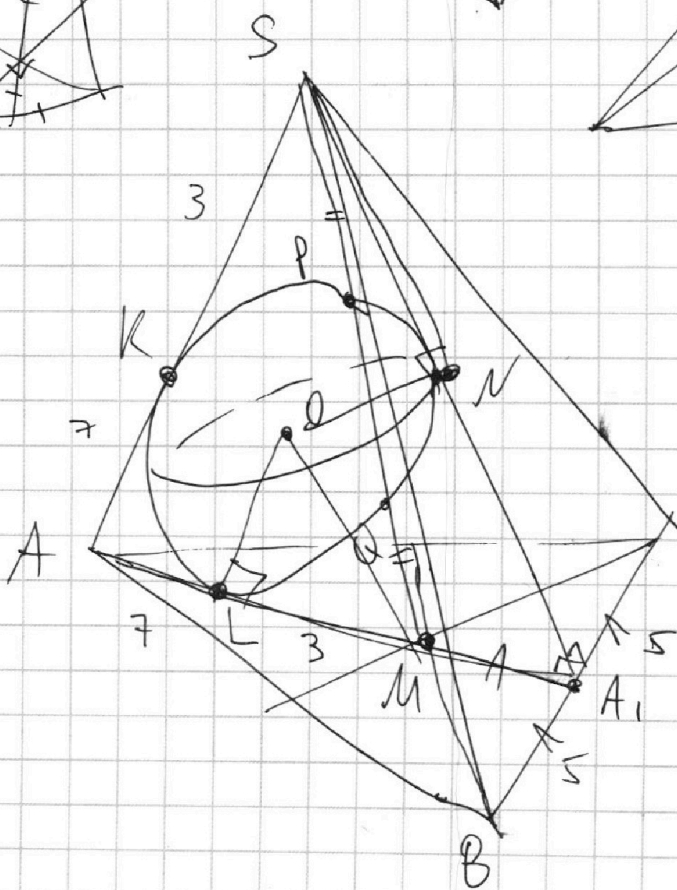
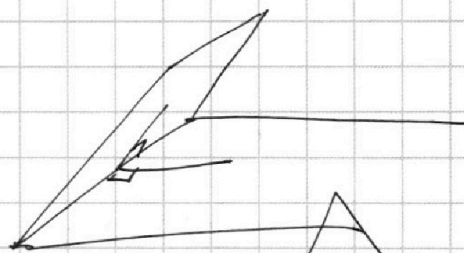
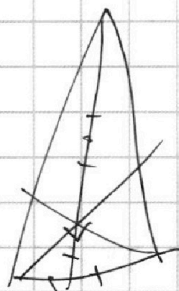
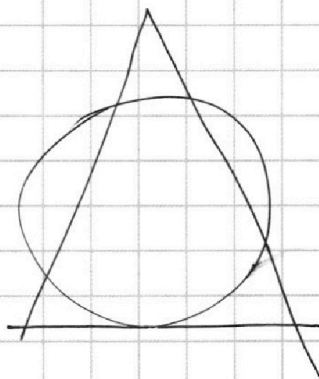
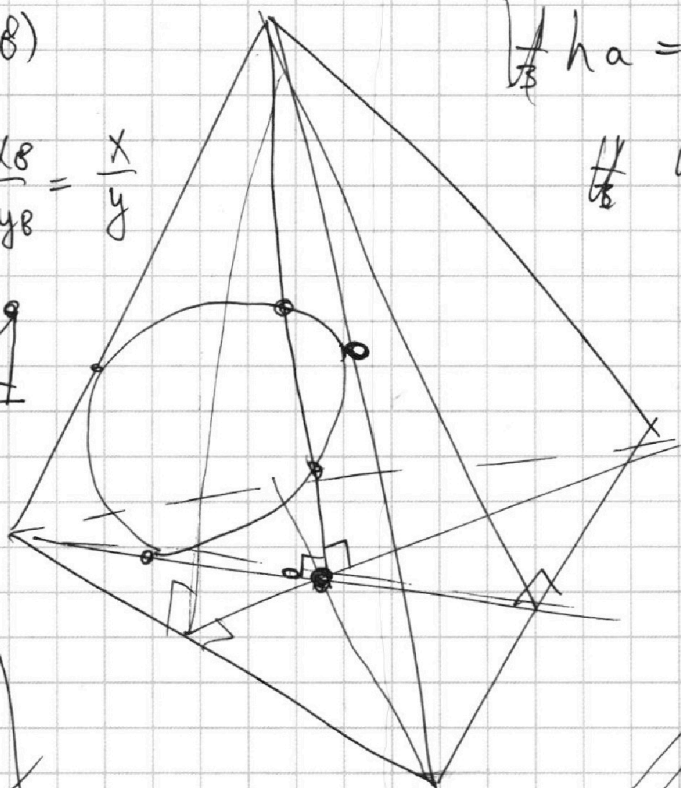
$l(A, B)$

$$\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B} = \frac{x}{y}$$



~~$h_a = \frac{2S}{bc} = \dots = 12.$~~

~~$h_c = ?$~~



$OS = OM = 3.$

$OS = CA_1 = A_1B.$

$OM = MA_1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

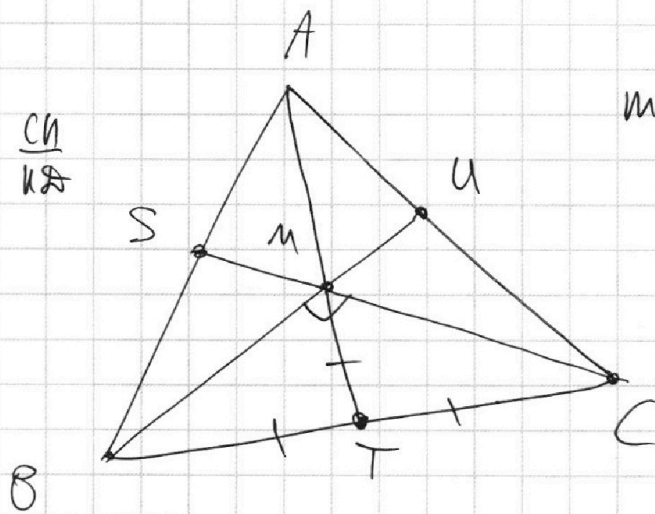
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~CE~~  
~~KB~~

~~CE~~    ~~CH~~  
~~BE~~    ~~KB~~



$$BC = AM$$

$$ma + da + d = mb + ca + c$$

$$m = n = 5$$

~~$$25a + m^2 a = mb^2 + nc^2$$~~

$$BC = 10$$

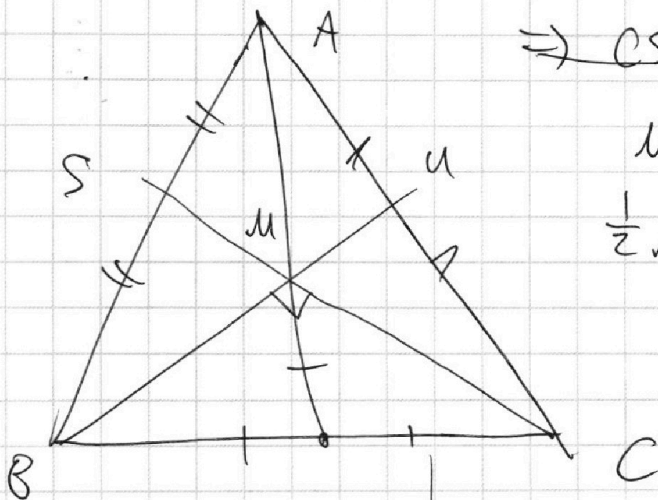
$$S = 60$$

$$AM = 10$$

~~$$\Rightarrow AT = 15$$~~

~~$$MC = MB = 5\sqrt{2}$$~~

$$\Rightarrow BM \perp CM$$



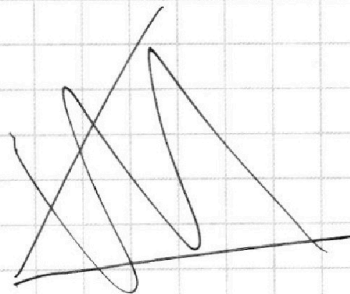
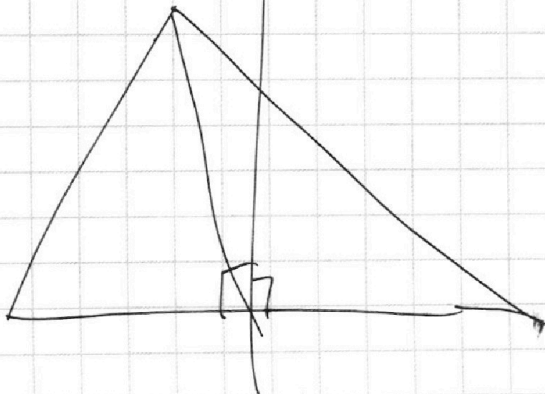
~~$$\Rightarrow CS = BU =$$~~

$$MB \cdot MC = \frac{4}{9} CS \cdot BU$$

$$\frac{1}{2} MB \cdot MC = S_{\Delta BMC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}$$

$$MB \cdot MC = 40$$

$$CS \cdot BU = 90 \Rightarrow CZ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

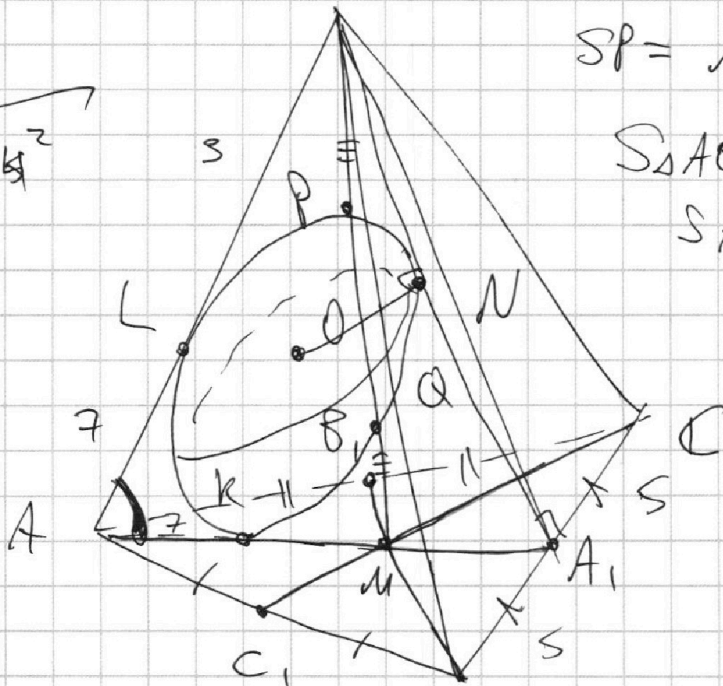
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



SABC.

ЭМ.

$$\sqrt{7^2 + 7^2}$$



$$SP = MQ$$

$$S_{\Delta ABC} = 60$$

$$SA = BC = 10$$

$$AA_1; BB_1; CC_1 (?)$$

$$AL = AK = 7$$

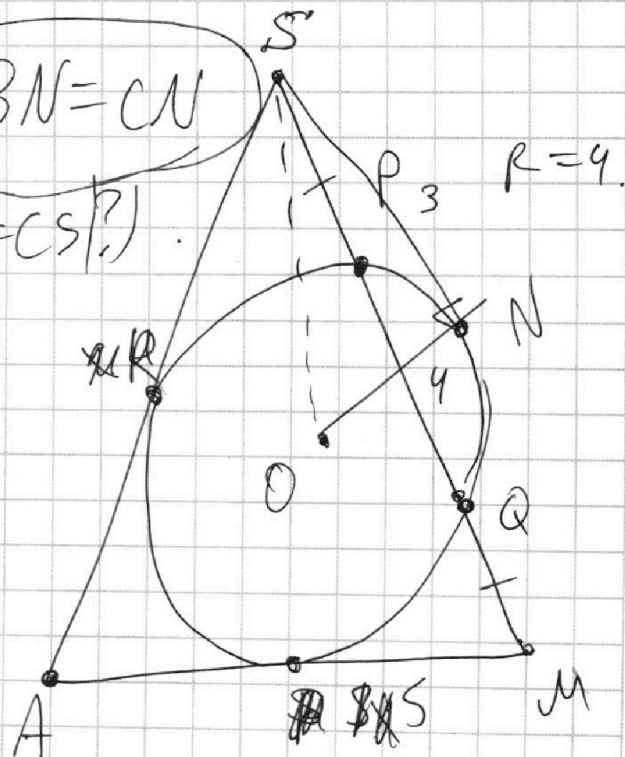
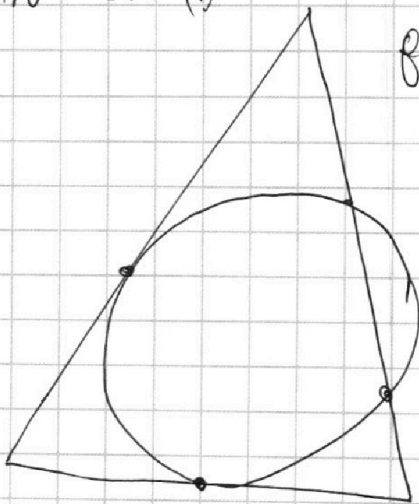
$$\varphi (?)$$

$$SN = 3$$

$$BN = CN (?)$$

$$BN = CN$$

$$BS = CS (?)$$



$$SP \cdot SQ = MQ \cdot MP$$

$$\Rightarrow MS = AS \Rightarrow AM = 10 = AS$$



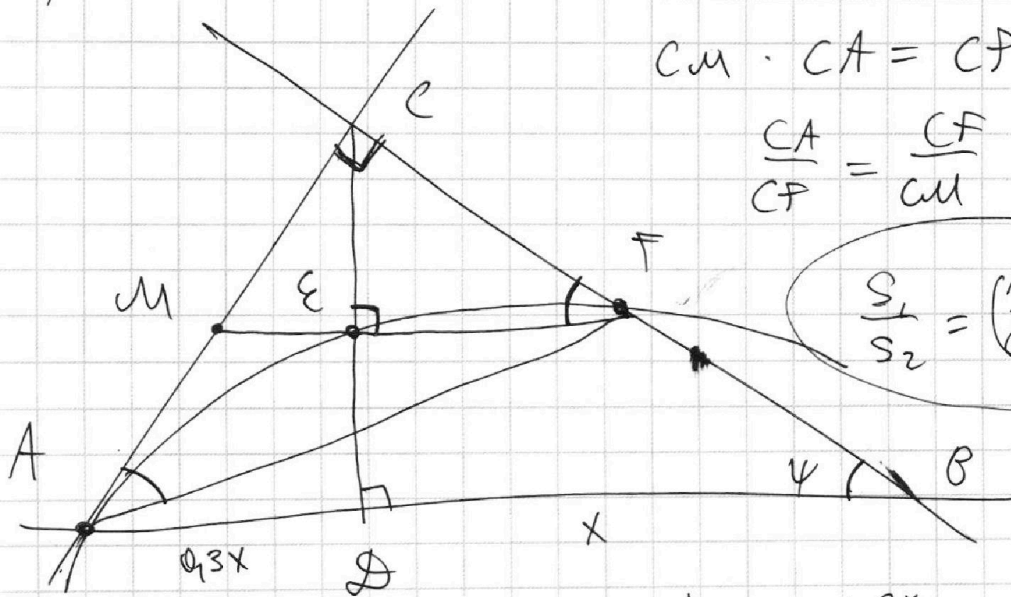
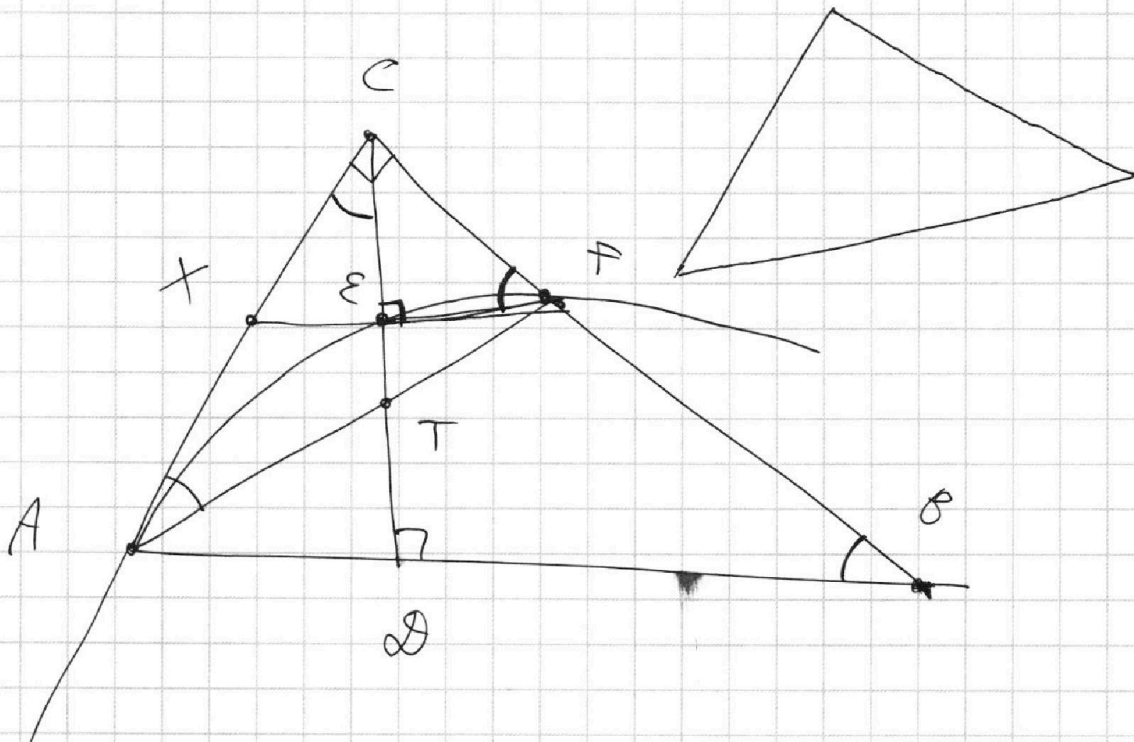
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CM \cdot CA = CF^2$$

$$\frac{CA}{CF} = \frac{CF}{CM} = \operatorname{tg} \psi$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{AC}{CF}\right)^2 = \frac{10}{3}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{h}{x} = \frac{0,3x}{h}$$

$$h = \sqrt{0,3} x$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{3}{10}} \Rightarrow$$

