



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
- а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
- б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

пусть $a = x_1 = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$
 $b = x_2 = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$
 $c = x_3 = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$

x_1, x_2, x_3 - взаимно простые
собственные $2, 3, 5$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + b_1 \geq 7 \\ b_1 + c_1 \geq 13 \\ a_1 + c_1 \geq 14 \\ a_1 + b_1 + c_1 \rightarrow \min \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = 4 \\ b_1 = 3 \\ c_1 = 4 \end{array} \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 = 17$$

~~используем~~

$$\left. \begin{array}{l} a_3 + c_3 \geq 43 \\ a_3 + b_3 \geq 14 \\ b_3 + c_3 \geq 18 \\ a_3 + b_3 + c_3 \rightarrow \min \end{array} \right\} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 = 43, \text{ например } a_3 = 22; c_3 = 21; b_3 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} a_2 + b_2 \geq 11 \\ b_2 + c_2 \geq 15 \\ a_2 + c_2 \geq 17 \\ a_2 + b_2 + c_2 \rightarrow \min \end{array} \right\} \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 = 22, \text{ и даже одно из неравенств не будет выполнено; например } a_2 = 0; b_2 = 5; c_2 = 11 - \text{ все выполнено.}$$

получим $x_1 = x_2 = x_3 = 1 \Rightarrow abc_{\min} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

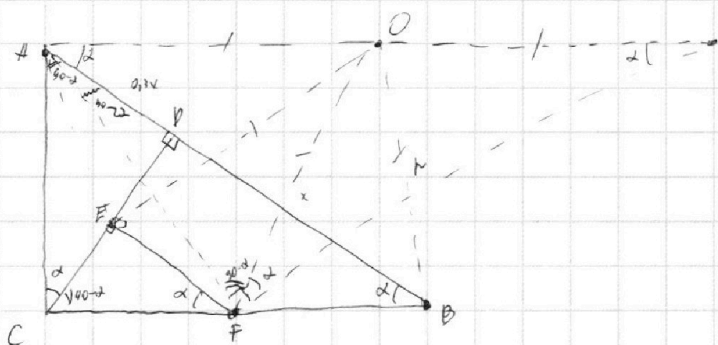
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$FE \perp CD$ т.к. $EF \parallel BD$

$OA \perp AC$ т.к. AC - касательная.

$$OF = OE = OA = r$$

из углов на рисунке: $\angle AOF = 2\alpha$; $\angle B = \alpha \Rightarrow$

B лежит на окружности. $\Rightarrow BFEA$ - трапеция \Rightarrow

$BF = AE$, т.к. вписана в окружность. $\Rightarrow EF = 1 - 0,3x = 0,7x$

Ответ: $\frac{2}{3}$ $\frac{49}{3}$.

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{EF}{CD}\right)^2 = \frac{0,49x^2}{0,3x^2} = \frac{49}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x, \text{ т.к. } \arccos \in [0, \pi] \Rightarrow x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

разобьем на ~~4~~ **случаи**:

$$1) x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow \pi = 6x \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$2) x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow \arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 5\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow 4x = 4\pi \Rightarrow x = \pi$$

$$3) x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \pi$$

$$4) x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow 6x = 4\pi \Rightarrow x = \frac{4}{6}\pi$$

$$5) x \in \left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{4}{6}\pi \text{ (не удовл. условию)}$$

$$6) x \in \left[\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right] \Rightarrow \arccos(\sin x) = x - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$5\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow 4x = 4\pi \Rightarrow x = \frac{7}{2}\pi \text{ (не удовл. условию)}$$

$$7) x \in \left[3\pi; \frac{7\pi}{2}\right] \Rightarrow \arccos(\sin x) = x - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{2}\pi$$

$$8) x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right] \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow$$

$$5\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}$$

$$9) x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2} \text{ (не удовл. условию)}$$

$$10) x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right] \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow 4x = -\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}; \pi; \frac{4}{6}\pi; \frac{7}{2}\pi; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

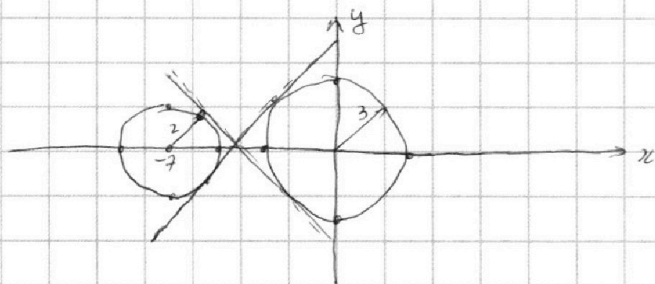


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x + 3ay - 7 = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{7-x}{3a} = \frac{7}{3a} - \frac{1}{3a}x \\ ((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

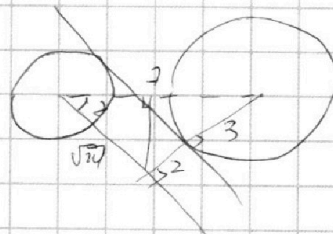
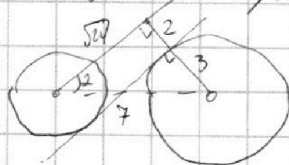


Второе равенство задает две окружности радиусами 2 и 3, с центрами в $(-7; 0)$ и $(0; 0)$

1) при $a = 0$ первое равенство вертикальная прямая \Rightarrow решений не более двух.

2) проведем две окружности касательные, когда котр. нашей прямой лежит в области между котр. наклона наших касательных \Rightarrow две не сможем найти такое θ - тогда было и решение.

3) $k_1 = \frac{5}{\sqrt{24}} = \text{tg} \alpha$



$k_2 = -\frac{5}{\sqrt{24}} = -\text{tg} \alpha$

$\Rightarrow \frac{1}{3a} \in \left[\frac{5}{\sqrt{24}}; +\infty \right) \text{ или } 0 \in \left(-\infty; -\frac{5}{\sqrt{24}} \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3a} \geq \frac{5}{\sqrt{24}} \\ \frac{1}{3a} - \frac{5}{\sqrt{24}} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{5}{\sqrt{24}} + \frac{1}{3a} \leq 0 \\ \frac{1}{3a} - \frac{5}{\sqrt{24}} \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3a} \leq -\frac{5}{\sqrt{24}} \\ \frac{1}{3a} \geq \frac{5}{\sqrt{24}} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{3a} \geq \frac{5}{\sqrt{24}} \\ \frac{1}{3a} - \frac{5}{\sqrt{24}} \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \emptyset$, если $a \in \left[-\frac{\sqrt{24}}{15}; \frac{\sqrt{24}}{15} \right] \Rightarrow \text{Ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{24}}{15} \right) \cup \left(\frac{\sqrt{24}}{15}; +\infty \right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{\sqrt{6x}} 2^{3\sqrt{3}-4} \Rightarrow \log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_{\sqrt{6x}} 2} = \frac{3}{2\log_7 6x} - 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_7^4(6x) - \frac{4}{2\log_7 6x} + 4 = 0$$

Аналогично: $\log_7^4 y + \frac{7}{2\log_7 y} + 4 = 0$

Заметим $\log_7(6x) = a$; $\log_7(y) = b \Rightarrow$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{7}{2a} + 4 = 0 \\ b^4 + \frac{7}{2b} + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow b^4 + \frac{7}{2b} - a^4 + \frac{7}{2a} = 0 \Rightarrow (b-a)(b+a)(b^2+a^2) = \frac{-7}{2ab}(a+b) \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = -b$ - решение.

$b^4 + \frac{7}{2b} + 4 = 0 \Rightarrow b^7 + \frac{7}{2} + 4b = 0 \Rightarrow (b^7 + 4b + \frac{7}{2})' = 7b^6 + 4 \Rightarrow$ функция имеет один корень, и этот корень $b = -a \Rightarrow$

$a + b = 0$ независимо от $a \Rightarrow$

$$\log_7(6x) + \log_7(y) = 0 \Rightarrow \log_7 6xy = 0 \Rightarrow 6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.



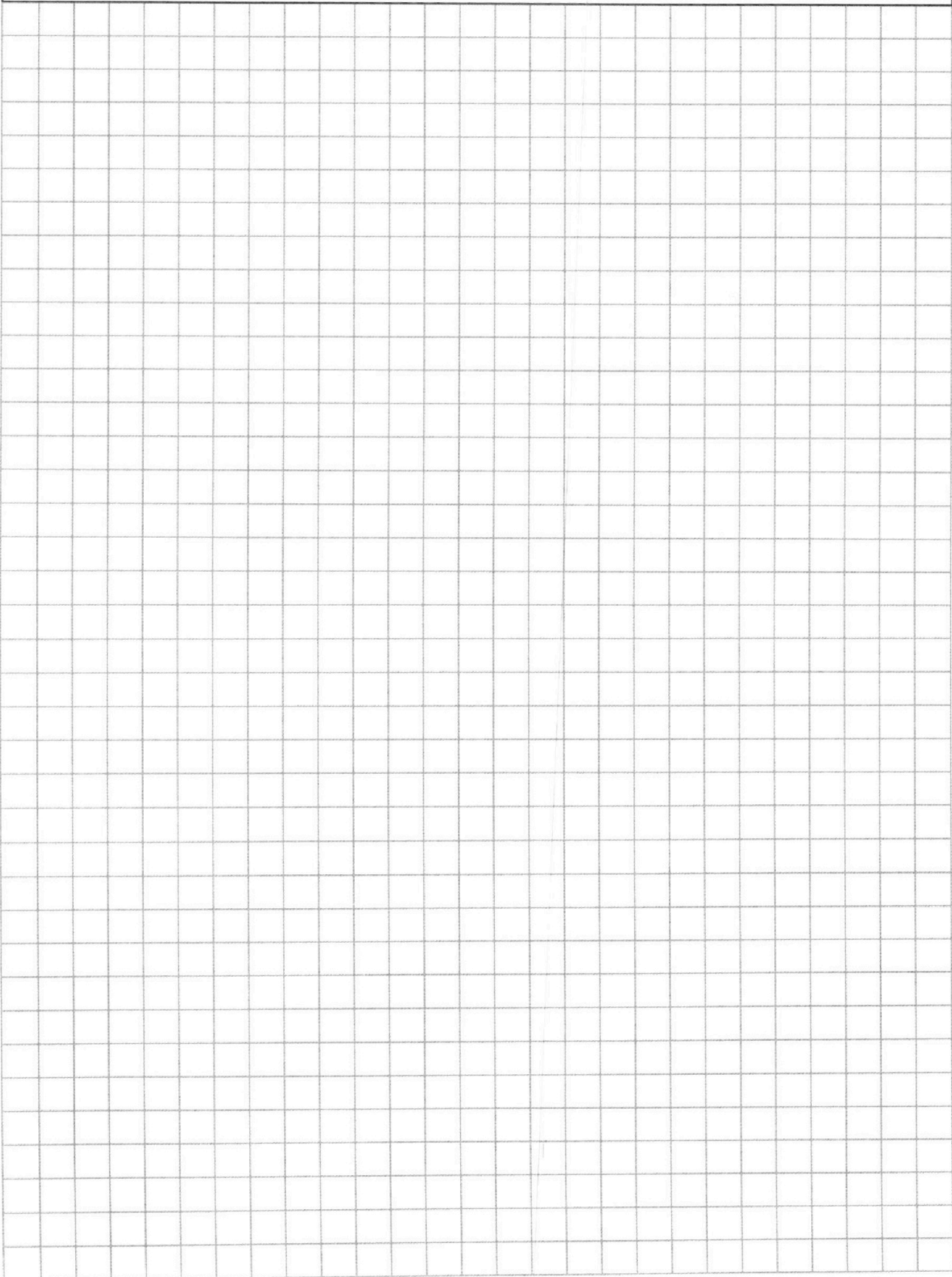
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



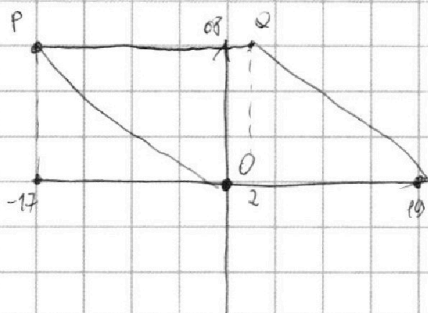
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} a + c &= 14 \\ a + b &= 7 \\ b + c &= 13 \\ a + b + c &= 24 \end{aligned}$$

(17)

$$\begin{aligned} b &= 3 \\ c &= 10 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

$$y(y_2 - y_1) + (y_2 - y_1) = 0$$

$$y_2 - y_1 \in [-0.8; 0.8]$$

$$1 - 1 + 1 \in [-3.6; 3.6]$$

$$a = b$$

$$a \cdot c = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3} \cdot p$$

$$a_1 + c_1 \geq 14$$

$$b_1 + c_1 \geq 13$$

$$a_2 + c_2 \geq 12$$

$$b_2 + c_2 \geq 15$$

$$a_3 + c_3 \geq 43$$

$$b_3 + c_3 \geq 18$$

$$a_1 + b_1 \geq 7$$

$$a_2 + b_2 \geq 11$$

$$a_3 + b_3 \geq 14$$

$$\frac{75-43}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

$$\frac{42-17}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$$

~~11 15 12~~

$$\begin{aligned} a &= 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \\ b &= 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3} \\ c &= 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3} \end{aligned}$$

~~11 15 12~~

(17)

$$\frac{75-43}{2} = 16$$

$$\frac{75-28}{2} = \frac{47}{2} = 23.5$$

(17)

$$\frac{42}{2} = 21$$

$$a = 2^4 \cdot 3^{12} \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^{11}$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{17} \cdot 5^{24}$$

$$a_2 + b_2 \geq 11$$

$$b_2 + c_2 \geq 15$$

$$a_1 + c_1 \geq 14$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 17$$

(17)

$$\frac{75-38}{2} = 18.5$$

$$\frac{75}{2} = 37.5$$

$$\frac{75}{2} = 37.5$$

$$\frac{42}{2} = 21$$

a_3

$$\frac{32}{2} = 16$$

$$\begin{aligned} c_3 &\geq 16 \\ b_3 &\geq 11 \\ a_3 &\geq 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &\geq 10 \\ b_2 &\geq 11 \\ a_2 &\geq 11 \end{aligned}$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 43$$

$$a + b \geq 14$$

$$b + c \geq 18$$

$$a + c \geq 43$$

(11) (5) (12)

$$\frac{75-28}{2} = 23.5$$

$\frac{a}{2}$

$$\frac{43}{2} = 21.5$$

$$\frac{75}{2} = 37.5$$

$$\frac{43}{2} = 21.5$$

$$\frac{21}{2} = 10.5$$



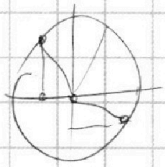
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

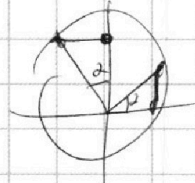
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{2\pi}{3}$$

$$10\pi = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{10\pi}{6}$$



$$\lambda = \frac{5\pi}{2} + \alpha$$

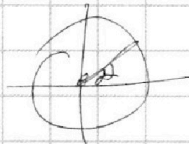
$$\lambda = \frac{5\pi}{2}$$

$$1\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi + \alpha = x \Rightarrow \alpha = x - 2\pi$$

$$\lambda = \frac{5\pi}{2}$$

$$\text{S); } \eta(2\pi; \frac{5\pi}{2})$$



$$r = 2\pi + \alpha$$

$$\frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\frac{\pi}{2} - (x - 2\pi)$$

$$3\pi$$

$$\frac{\pi}{2} - (2\pi - \lambda)$$

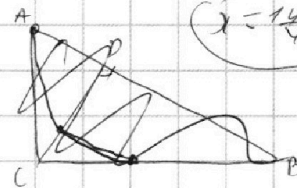
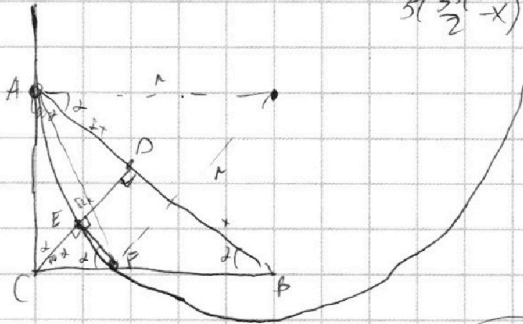
$$\frac{2\pi}{2} + \alpha$$

$$\frac{5\pi}{2} - x$$

$$\text{S); } -\frac{2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \alpha$$

$$5(\frac{5\pi}{2} - x) = \frac{\pi}{2} + \alpha \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6}$$

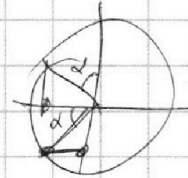
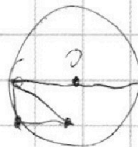
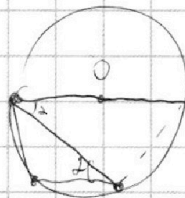
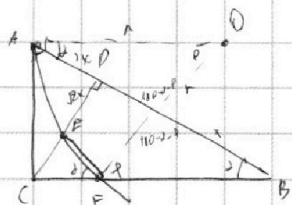
$$4\pi = \frac{2\pi}{2}$$



$$x = \frac{14\pi}{6}$$

$$\frac{3\pi}{2}$$

$$4\pi = \frac{2\pi}{2}$$

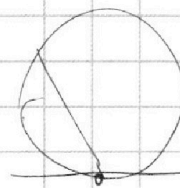
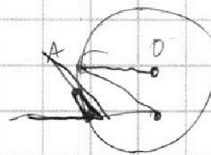
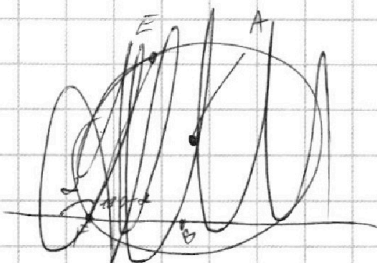


$$3\pi + \alpha = 2$$

$$r = 4 + \alpha$$

$$\frac{\pi}{2} + \alpha - 3\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{2}$$

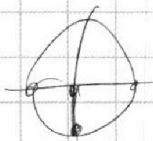
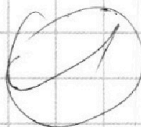


$$3\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$a = 2^4$$

$$b = 2^3$$

$$c = 2^0$$



$$\frac{7\pi}{2} = 3\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$-1$$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{2}$$

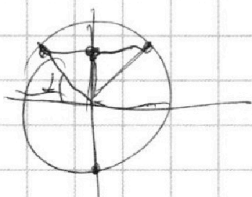
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



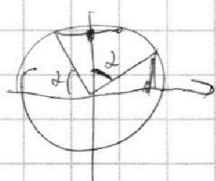
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-\pi - 2 \quad (\alpha > 0)$$

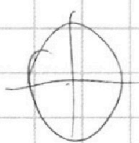
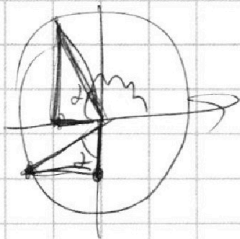
$$\alpha + \lambda = -\pi + 2\alpha$$

$$\alpha = -\pi + \lambda$$



$$\frac{\pi}{2} - 2$$

$$\frac{\pi}{2} - (-\pi - \lambda) = \frac{\pi}{2} + \pi + \lambda$$



$$49 + 24 - 2 \cos \alpha \cdot 7\sqrt{24} = 25$$

$$63 - 14 = 14 \cos \alpha \sqrt{24}$$

$$\frac{38}{14\sqrt{24}} = \cos \alpha$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} - 2$$



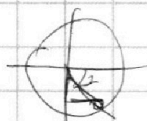
$$\frac{\pi}{2} + 2$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} - 2$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} \times 20$$

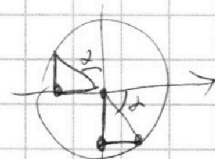
$$\pi - 2$$

$$\frac{14}{7\sqrt{24}}$$



$$\begin{array}{r} 3 \quad \alpha > 0 \\ 49 \\ \times 24 \\ \hline 196 \\ 49 \\ \hline 686 \end{array}$$

$$\frac{686}{325}$$



$$\alpha > 0$$

$$\sqrt{1 - \frac{192}{22 \cdot 24}} =$$

$$\frac{\pi}{2} + 2$$

$$\frac{14}{7\sqrt{24}}$$

$$\sqrt{77 \cdot 24 - 192}$$

$$\frac{8}{19} \cdot \frac{19}{19} = \frac{8}{19}$$

$$\sqrt{77 \cdot 24 - 192}$$

$$\frac{5\pi}{2} + 52 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2$$

$$2a_2 + 1b_2 + 1c_2 = 43$$

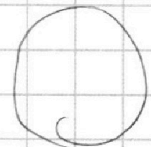
$$\frac{19}{301}$$

$$\frac{325}{25} \cdot \frac{25}{13}$$

$$4\lambda = -\pi$$

$$a_2 + b_2 + c_2 = \frac{43}{2}$$

$$c_2 = 19$$



$$\frac{\sqrt{315}}{24}$$

$$\frac{43}{2} - \frac{11 \cdot 2}{2} = \frac{21}{2}$$

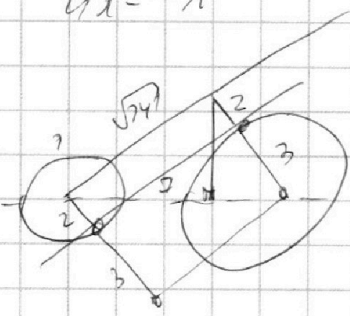
$$a_2 = 8$$

$$b_2 = 5$$

$$\frac{43}{2} - \frac{38}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\sqrt{75 - \frac{7\pi \cdot 24}{49}}$$

$$\sqrt{\frac{315}{24}}$$



$$\frac{43}{2} - \frac{17 \cdot 2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\sqrt{\frac{75 \cdot 45 - 75 \cdot 14}{24}}$$

$$49 - 25 = 24$$

$$\frac{5\sqrt{24}}{2}$$

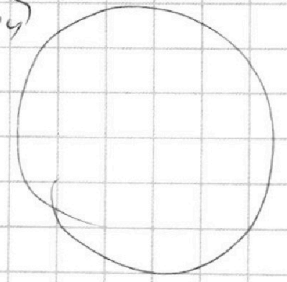
$$\frac{\pi}{\sqrt{24}}$$

$$5 \quad 49 - 25$$

$$\frac{77 \cdot 24}{49}$$

$$\frac{5 \cdot \sqrt{24}}{49 - 25}$$

$$\frac{25}{7}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

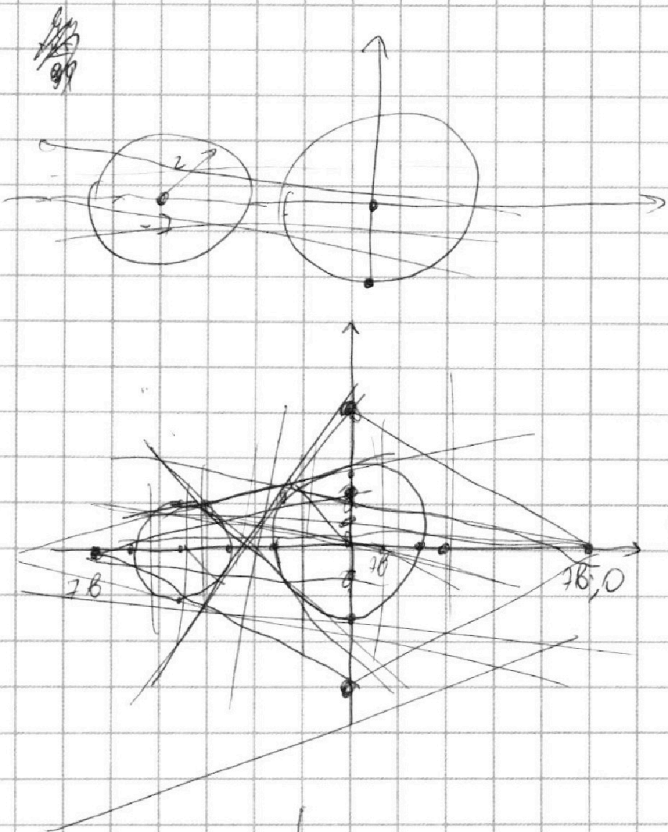
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+7)^2 + y^2 - 40 + 45 \quad ((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$



$$y = \frac{7.6 - 2}{3a}$$

$$y = \frac{7.6 - 2}{3a}$$

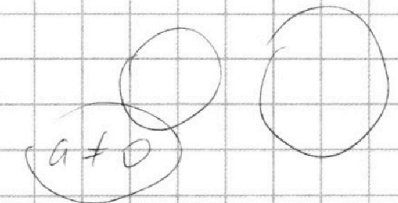
$$y = \frac{7.6}{3a} - (x \cdot \frac{1}{3a})$$

$$x = 7.6$$

$$x = 16$$

$$y = 0$$

$$a > 0$$



$$b > 0, a > 0$$

$$\frac{1}{3 \cdot \frac{\sqrt{14}}{75}} \quad 5 \quad 0, \frac{7.6}{3a}$$

$$\frac{5 \cdot 3a + \sqrt{14}}{3a \sqrt{14}} \quad \frac{1}{3a} \geq \frac{a}{3a} \quad \frac{5}{\sqrt{14}} + \frac{8}{3a} = 0$$

$$\frac{15a + \sqrt{14}}{3a \sqrt{14}} \quad \frac{5\sqrt{14} + 3a\sqrt{14}}{3a \sqrt{14}} = 0$$

$$\frac{5 \cdot \sqrt{14}}{a \sqrt{14}} + \frac{1}{3a}$$

$$\sqrt{14}(3 + 3a)$$

$$\frac{5 \cdot \sqrt{14}}{8} + \frac{1}{a} \quad \frac{5\sqrt{14}a + 8}{8a}$$

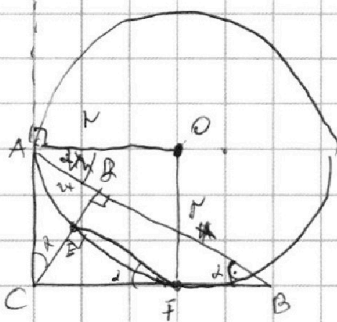
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

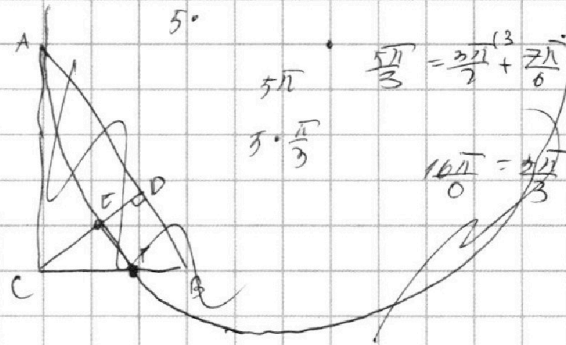
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

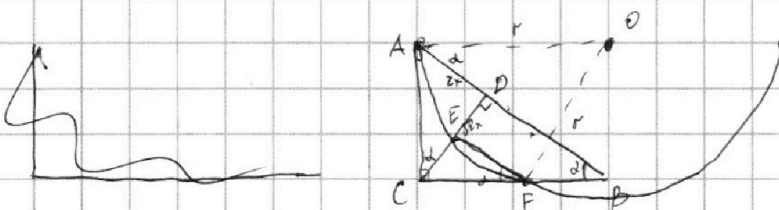


$$\frac{S(\triangle ODF)}{S(\triangle OEF)}$$

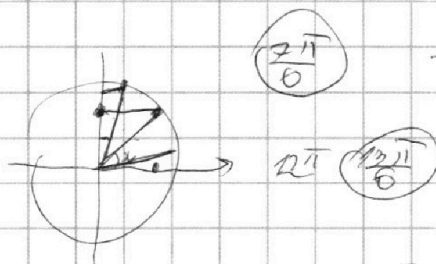


$$\frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{6}$$

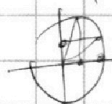
$$5 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{6}$$



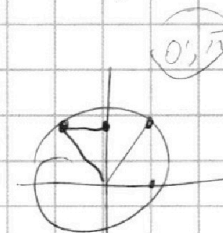
$$\frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \pi$$



$$\frac{2\pi}{6}$$



$$\frac{2x}{\cos \alpha} = \text{deg } \alpha = \frac{CO}{x}$$



$$\frac{0, \pi}{2}$$

$$2x^2 = CO^2$$

$$CO = \sqrt{2}x$$

$$x \in [0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$r = \frac{\pi}{2} - \alpha$$



$$\frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{6}$$

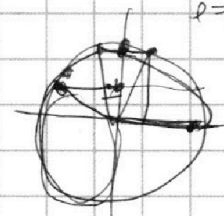
$$\frac{5\pi}{3}$$

$$5(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{3\pi}{2} + 2$$

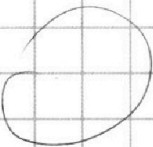
$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + 2$$

$$\pi = 2x$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$



$$\pi$$

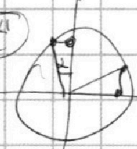


$$\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{3}$$

$$5x - \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2$$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2$$



$$x$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$(0 + 2\pi k + \frac{\pi}{2} + i\pi n)$$

$$4x = \frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - x + i\pi n$$

$$\pi = 2x + i\pi n$$

$$\frac{5\pi}{6}$$

$$5(\frac{\pi}{2} - x + i\pi n) = \frac{3\pi}{2} + 2 + i\pi n \quad (x = \frac{\pi}{6} + i\pi n)$$

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{3}$$

$$5\pi - 5x - 20\pi n = \frac{3\pi}{2} + 2 + i\pi n$$

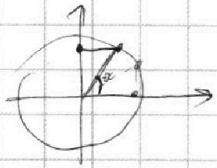
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\pi - (\lambda - \frac{3\pi}{2}) = \pi$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{12} \cdot 5^{43} \Rightarrow ac \geq 2^{14} \cdot 3^{12} \cdot 5^{43}$$

$$ab = k_1 \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$a = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc = k_2 \cdot 2^{13} \cdot 3^{17} \cdot 5^{18}$$

$$b = 1$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

$$c = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^{29}$$

$$761^3$$

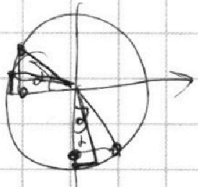
(abc)

$$\frac{3\pi}{2} + \lambda = \lambda$$

$$(abc)^2 = k_1 k_2 k_3 = 2^{24} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$$

$$\pi - \lambda = 1$$

$$(abc)^2 = k_1 k_2 k_3 = 3 \cdot 5 \Rightarrow abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$



мымо $k_1 = 1$

$$ab = k_1 \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$ab = 2^2 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{24}$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{24}$$

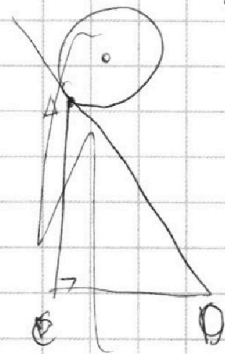
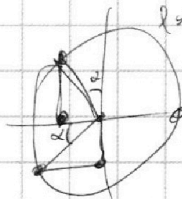
мымо $k_2 = 3 \Rightarrow k_3 = 5$

$$bc = 2^{13} \cdot 3^{10} \cdot 5^{18} \Rightarrow b = 2^3 \cdot 3^5$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{44}$$

$$7 = 7 + 2$$

$$\lambda = \frac{\pi + 2}{2}$$



$$\frac{3\pi}{2} + \lambda$$

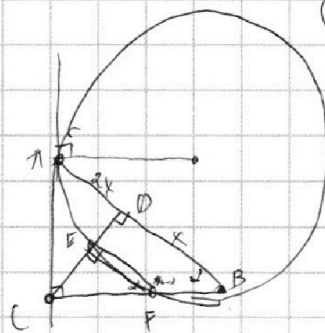
$$\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{3\pi}{2}$$



$$\lambda \in (-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$$

$$(0, \pi)$$

$$\frac{3\pi}{2} + \lambda \in (0)$$

$$\frac{3\pi}{2} + \lambda \in (0, \pi)$$

$$\frac{25\pi}{2} - 5\lambda = \frac{3\pi}{2} + \lambda$$

$$\frac{11\pi}{0}$$

$$\frac{3\pi}{2} + \lambda = \pi$$

$$\lambda \in (-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$$

$$6\lambda = 11\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2\log_7 6x} - 4 \quad a = \log_7(6x); \quad b = \log_7 y$$

$$\log_7^4 y + \frac{b}{\log_7 2y} = \frac{5}{2\log_7 y} - 4$$

$$\log_7^4 y - \log_7^4(6x) + \frac{b}{\log_7 2y} + \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{5}{2\log_7 y} - \frac{3}{2\log_7 6x}$$

$$(\log_7^2 y + \log_7^2(6x)) \cdot \log_7 \frac{4}{6x} = \log_7 6xy + \frac{b \log_7 6x + 2 \log_7 y}{\log_7 y \cdot \log_7 6x} = \frac{1 \log_7 6x - 3 \log_7 y}{2 \log_7 6x \log_7 y}$$

$$a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2a} - 4$$

$$b^4 + \frac{b}{b} = \frac{5}{2b} - 4$$

$$b^4 - a^4 = \frac{b}{b} + \frac{2}{a} = \frac{5}{2b} - \frac{3}{2a}$$

$$(b-a)(b+a)(b^2+a^2) + \frac{0a+2b}{ab} = \frac{5a-3b}{2ab}$$

$$(b-a)(b+a)(b^2+a^2) = \frac{5a-3b}{2ab} - \frac{2(0a+2b)}{ab} = \frac{5a-3b-4a-4b}{2ab} = \frac{-2b-7a}{2ab}$$

$$(b-a)(b^2+a^2) = \frac{7}{2ab}$$

$$1) b = -a$$

$$2) a(b-a)(b^2+a^2) = \frac{7}{2}$$

$$\log_7 \quad a+b = \log_7(6x) + \log_7 y = \log_7 6xy$$

$$\log_7(6x) \cdot \log_7 y \cdot \log_7 \frac{4}{6x}$$

$$b^3 + a^3 - ab^2 - a^3$$

$$(b^3 - a^3) + ab(a-b) = \frac{7}{2ab}$$

$$ab(b-a)(b^2+a^2)$$

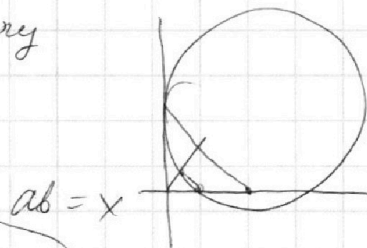
$$(ab^2 - a^3)(b^2+a^2)$$

$$ab^4 + a^2b^2 - a^2b^3 - a^4b = \frac{7}{2}$$

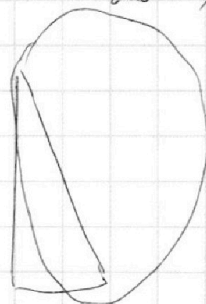
$$b^4 + 2a^2b^2 - 2ab^3 - 4a^3b = 0$$

$$b^3 + 2a^2b - 2ab^2 - 4a^3 = 0$$

$$\frac{a+b}{2} = xy$$



$$\frac{1}{6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_7 6x = \log_7 36x^2 \quad 343 - 4$$

$$\begin{matrix} 6x > 0 \\ 6x \neq 1 \end{matrix}$$

$$\log_7^4 6x - 2 \frac{1}{\log_7 6x} = \frac{1}{2} \log_7 6x \quad 343 - 4$$

$$5 \log_7 23^5 \quad 343 = 2 \cdot 7 \cdot 7 \quad 23$$

$$\log_7^4 6x - 2 \frac{1}{\log_7 6x} = \log_7 6x \frac{1}{\frac{2}{3} \log_7 6x} - 4$$

$$\begin{matrix} y > 0 \\ y \neq 1 \end{matrix}$$

$$\log_7 6x = t$$

$$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{1}{\frac{2}{3}t} - 4$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7 y = \log_7 2(7^5) - 4$$

$$t^5 - 2 = \frac{3}{2} - 4t$$

$$\log_7^4 y + 6 \frac{1}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \log_7 y - 4$$

$$t^5 + 4t - \frac{5}{2} = 0$$

$$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \log_7 y - 4$$

$$t^5 + 4t + \frac{1}{2} = 0$$

$$\log_7^4 y = t$$

$$t^5 + 4t - \frac{5}{2} = 0$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 4$$

$$t^5 + 4t + \frac{3}{2} = 0$$

$$t^5 + 6t \quad t^5 + 6 = \frac{5}{2} - 4t \quad \frac{11 \cdot 5}{2}$$

$$\cancel{t^5 + t^5} + 4(t + t + t) + 1 = 0$$

$$t + 1 = \log$$

$$t^5 + 4t^5 + 4(t + t + t) + 1 = 0$$

$$t + t + 1 = \log_7 6xy$$

$$7t^5 + 28t - \frac{3}{2} = 0$$

$$(t + 1)^7 \quad \left(\frac{t + 1}{6} \right) = xy$$

$$5t^5 + 20t + \frac{3}{2} = 0$$

$$7t^5 + 5t^5 + 28t + 20t = 0$$

$$t^3 - 2t = t$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 4(a+b) - 1 = 0$$

$$(t+1)(t^4 - t^3 + 1)$$

$$\boxed{a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)}$$

$$a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 + b^5$$

$$a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 +$$

$$b^5 - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 + b^5$$

$$\log_7 6x \cdot \log_7 y = \log_7 6xy$$

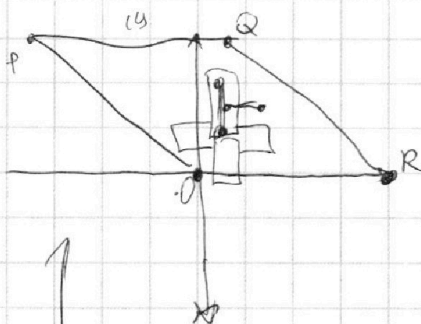
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

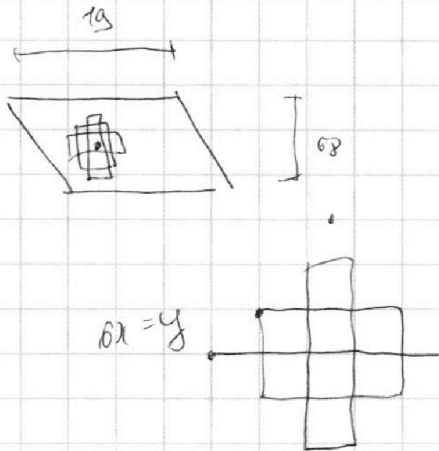
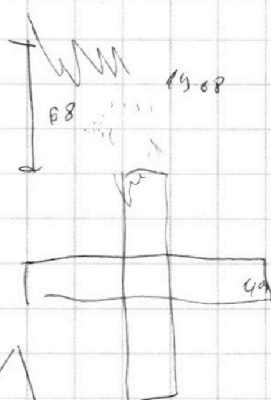
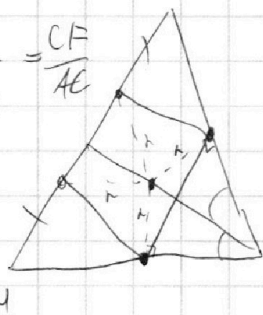
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{PE}{OD} = \frac{CE}{AD} = \frac{CF}{AE}$$



$$\log_7^4(6x) = \log_7^4(y)$$

$$y \neq 4x + 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2 \log_7 6x} - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{7}{2 \log_7 6x} + 4 = 0$$

$$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2 \log_7 y} - 4$$

$$\log_7^4(y) + \frac{7}{2 \log_7 y} + 4 = 0$$

~~3x=6~~

~~log_7 6x~~

$$a^4 + \frac{7}{a} + 4 = 0$$

$$a = y$$

$$a^5 + 7 + 4a = 0$$

$$\log_7^4(y) - \log_7^4(6x) + \frac{7}{2 \log_7 y} + \frac{7}{2 \log_7 6x} = 0$$

$$a^4 - 6^4 + \frac{7}{2a} + \frac{7}{2b} = 0$$

$$a = -b$$

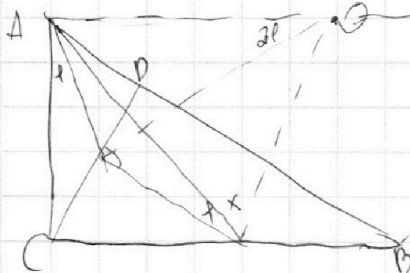
$$(a-b)(a \neq 0)(a^2 + b^2) = \frac{-7b - 7a}{aab}$$

$$a = \pm \sqrt{7}$$

$$a^5 + 7 + 4a = 0$$

$$(a-b)(a^2 + b^2) = \frac{-7}{2ab}$$

$$a^4 + 4a = 0$$



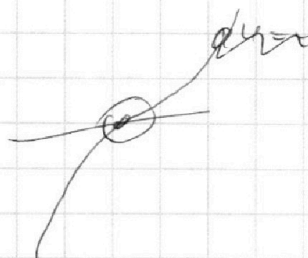
$$1) a \geq b > 0$$

$$2) b \geq a > 0 \quad a = 0$$

$$5a^4 + 4 = 0$$

$$a^4 - \frac{7}{2}a + 4 = 0$$

$$a^5 - 7a + 4a = 0$$



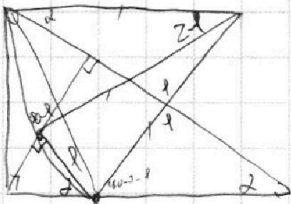
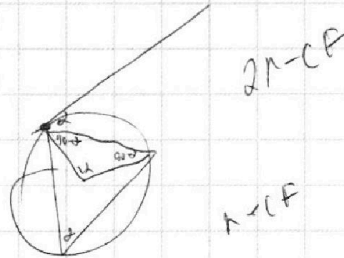
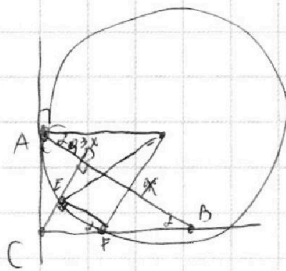
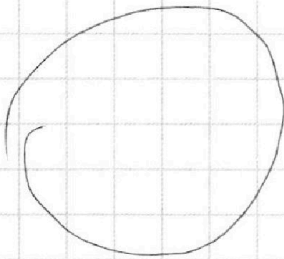
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

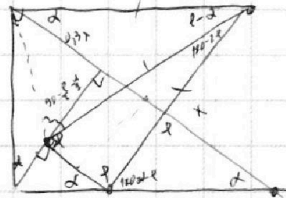


$$\frac{AD+BD}{BD} = \frac{13}{20}$$

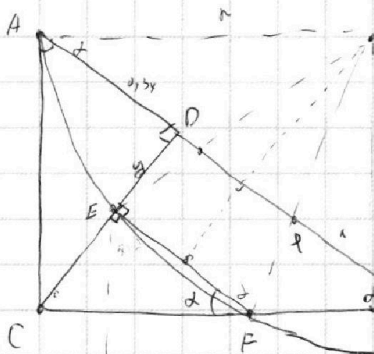
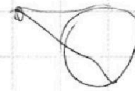
$$\frac{ED}{BD} = \frac{3}{20}$$

$$\frac{180 - (180 - \alpha)}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$$

110-12



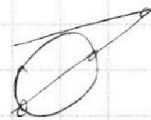
180 - \alpha - \alpha + (180 - 2\alpha)
180



$$x = x \cdot \tan \alpha$$

$$\left(\frac{\sqrt{0,3}x - y}{\sqrt{0,3}x} \right)^2 \cdot \frac{x \cdot \tan \alpha}{2} = x \cdot \tan \alpha$$

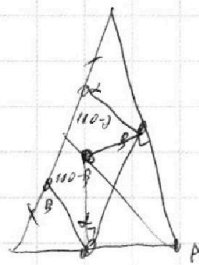
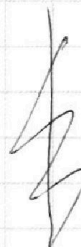
$$0,3x = \sqrt{0,3}x$$



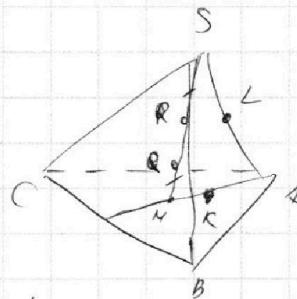
$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - CF^2 + CF \cdot FB$$

$$ns + \alpha \rightarrow n \cos$$

$$CD - (ns \sin \alpha - ns \sin \alpha) = CF$$



$$AD^2 + CD^2 = CF \cdot (CF + FB)$$



$$\frac{(CD - (ns \sin \alpha - ns \sin \alpha))^2}{CD} = \frac{\tan \alpha}{2} = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{0,3} \cdot 0,3} \cdot (1 - \alpha)$$

$$\frac{0,3x \cdot \sqrt{0,3}x}{2}$$

$$AD^2 + CD^2 = CF(2R - CF)$$