МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab = k\,2^{7}3^{11}5^{14}$ $\quad bc = l\,2^{13}3^{15}5^{18}$ $\quad ac = m\,2^{14}3^{17}5^{43}$; $k, l, m \in N$

$(abc)^2 = \cancel{klm}\ ab\cdot ac\cdot bc = klm\cdot 2^{34}3^{43}5^{75}$

$(abc)^2 \vdots 3^{43} \Rightarrow (abc)^2 \vdots 3^{44}$ (чёт. степени всех делителей), $(abc)^2 \vdots 5^{75} \Rightarrow (abc)^2 \vdots 5^{76}$

$\Rightarrow klm \vdots 15$ $\qquad klm = 15t,\ t\in N$

$\sqrt{t} \in N$

$(abc)^2 = \left(\frac{klm}{15}\right)\cdot 2^{34}3^{44}5^{76}$ $\qquad abc = \sqrt{t}\ 2^{17}3^{22}5^{38}$.

$abc \vdots ac \Rightarrow abc \vdots 5^{43} \Rightarrow \sqrt{t} \vdots 2^{5}$ $\quad t \vdots 2^{10};\ klm \vdots (3\cdot5\cdot2^{10})$

$\sqrt{t} = f\,2^{5},\ f\in N$

$abc = f\,2^{17}3^{22}5^{43}$ $\qquad abc \vdots (2^{17}3^{22}5^{43})$

Докажем, что возможно, $f=1$ (и тогда $(abc)_{min} = 2^{17}3^{22}5^{43}$

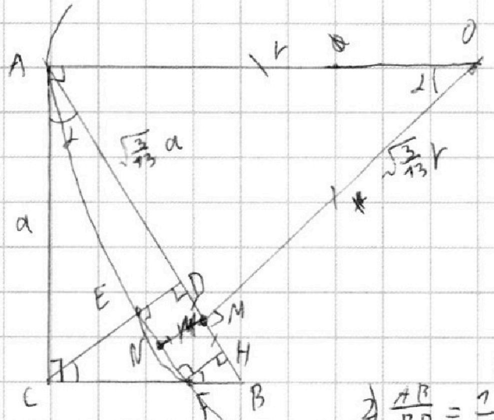
Если $klm = 3\cdot5\cdot2^{10}$ это не вступает в конфликт ни с одним из условий. Тогда $t = \frac{klm}{15} = 2^{10}$; $\sqrt{t} = 2^{5}$; $f = \frac{\sqrt{t}}{2^5} = 1$ — это возможно. ЧТД

Ответ: $(abc)_{min} = 2^{17}3^{22}5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\omega(O, OA) \cap CD = E,\ \cap CB = F$

$AB \parallel EF \qquad \frac{AB}{BD} = 1{,}3$

$k = \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$ — ?

1) $FH \perp AB;\ EF \parallel AB \Rightarrow ED = FH$

$OE = OF \Rightarrow O \in$ сер. пер. к EF (и DH)

M - сер. DH; $OM \perp AB$; N - сер. EF; $ON \perp EF$

$OA \perp AC,\ OM \perp AB \Rightarrow \angle AOM = \angle CAB = \alpha$

2) $\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10} \qquad \frac{AD + BD}{BD} = \frac{13}{10} \qquad 1 + \frac{AD}{BD} = 1 + \frac{3}{10} \qquad \frac{AD}{BD} = \frac{3}{10}$

$\frac{AD}{AB} = \frac{3}{13};\ \frac{BD}{AB} = \frac{10}{13} \qquad \cos\alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \qquad AC^2 = \frac{3}{13}AB^2 \qquad BC^2 = AB^2 - AC^2 = \frac{10}{13}AB^2$

$OF = OA = OE = r \qquad \cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \sqrt{\frac{3}{13}} \qquad OM = r\cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{13}}r;\ \sin\alpha = \sqrt{\frac{10}{13}}$

$AM = r\sin\alpha = \sqrt{\frac{10}{13}}r \qquad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{10}{3}} \qquad AC = a \qquad BC = \sqrt{\frac{10}{3}}a$

$AB = \sqrt{\frac{13}{3}}a \qquad AD = \sqrt{\frac{3}{13}}a \qquad HM = DM = AM - AD = \sqrt{\frac{10}{13}}r - \sqrt{\frac{3}{13}}a$

$DB = \frac{10}{13}AB = \frac{10}{\sqrt{39}}a \qquad BH = DB - 2DM = \frac{10}{\sqrt{39}}a + 2\sqrt{\frac{3}{13}}a - 2\sqrt{\frac{10}{13}}r = \frac{10+6}{\sqrt{39}}a - \sqrt{\frac{40}{13}}r$

$NM = FH = HB\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \left(\frac{16}{\sqrt{39}}a - 2\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}}r\right) = 1{,}6\sqrt{\frac{10}{13}}a - 2\sqrt{\frac{3}{13}}r$

$ON = OM + NM = \sqrt{\frac{3}{13}}r + 1{,}6\sqrt{\frac{10}{13}}a - 2\sqrt{\frac{3}{13}}r = 1{,}6\sqrt{\frac{10}{13}}a - \sqrt{\frac{3}{13}}r;\ EN = DM = \sqrt{\frac{10}{13}}r - \sqrt{\frac{3}{13}}a$

$OE = r$; Th Пифагора: $ON^2 + NE^2 = OE^2$

$\left(1{,}6\sqrt{\frac{10}{13}}a - \sqrt{\frac{3}{13}}r\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{10}{13}}r - \sqrt{\frac{3}{13}}a\right)^2 = r^2$

$\left(\frac{16}{\sqrt{130}}a - \sqrt{\frac{3}{13}}r\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{13}}a - \sqrt{\frac{10}{13}}r\right)^2 = r^2 \qquad \frac{16^2}{30}a^2 + \frac{3}{13}a^2 + \cancel{\frac{3+10}{13}r^2} +$

$\cancel{2\frac{16}{\sqrt{30}}\sqrt{\frac{3}{13}}ar - 2\sqrt{\frac{3}{13}} \cdot \sqrt{\frac{10}{13}}ar = r^2} \qquad \cancel{\frac{256 \cdot 13 + 3 \cdot 30}{390}a^2} = \cancel{\left(32\sqrt{\frac{3}{390}} + \right.}$

$\cancel{\sqrt{\frac{13}{3}} - \sqrt{\frac{3}{13}} = \frac{13-3}{\sqrt{39}} = \frac{10}{\sqrt{39}} = DB} \quad + 2\frac{\sqrt{30}}{13}\Big)ar = \left(\frac{32}{13}\sqrt{\frac{39}{30}} + \frac{2}{13}\sqrt{30}\right)ar = \frac{2}{13}\left(16\sqrt{\frac{39}{30}} + \sqrt{30}\right)ar$

$\cancel{\frac{256 \cdot 13 + 90}{30 \cdot 390}a = \left(32\sqrt{\frac{39}{30}} + 60\right)r} \qquad \cancel{\frac{r}{a} = \frac{3+48}{30\left(32\sqrt{\frac{39}{30}} + 60\right)}}$

$CD = AD\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{3}{13}} \cdot \sqrt{\frac{10}{3}}a = \sqrt{\frac{10}{13}}a$

$\triangle ACD \sim \triangle CEF;\ k = \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{CD}{EF}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{10}{13}}a}{2\sqrt{\frac{10}{13}}r - 2\sqrt{\frac{3}{13}}a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}\frac{r}{a} - 2\sqrt{3}}\right)^2$

$\frac{16^2}{130}a^2 + \frac{30}{130}a^2 + \cancel{\frac{3+10}{13}r^2} - \left(2\frac{16\sqrt{3}}{13\sqrt{10}} + 2\frac{10\sqrt{3}}{13\sqrt{10}}\right)ar = \cancel{r^2}$

$\frac{256+30}{130}a = \frac{2 \cdot 26\sqrt{3}}{13\sqrt{10}}r = 4\sqrt{\frac{3}{10}}r = \frac{286}{130}a \qquad \sqrt{\frac{3}{10}}r = \frac{143}{65}a$

$\frac{r}{a} = \frac{143\sqrt{10}}{65\sqrt{3}} = \frac{1430\sqrt{3}}{195\sqrt{10}} \qquad k = \left(\frac{\sqrt{10}}{2 \cdot \frac{1430}{195}\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{10}{12}\left(\frac{1}{\frac{1430}{195} - 1}\right)^2 = \frac{10}{12}\left(\frac{195}{1235}\right)^2$

$= \frac{10}{12}\left(\frac{15}{95}\right)^2 = \frac{10}{12} \cdot \left(\frac{3}{19}\right)^2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3^2}{19^2} = \frac{15}{2 \cdot 19^2} = \frac{15}{722}$

Ответ: $\frac{15}{722}$

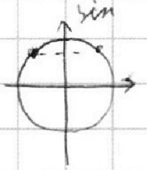
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$



$\arccos(t) \in [0; \pi]$ $\quad 5\arccos(t) \in [0; 5\pi]$

$\frac{3\pi}{2} + x \in [0; 5\pi]$; $\quad x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$

$5\arccos(\sin x) = 5\frac{\pi}{2} - 5\arcsin\overset{(\sin x)}{\cancel{x}} = \frac{3\pi}{2} + x$, $\quad -5\arcsin(\sin x) = x - \pi$

I) $x \in \bigcup\limits_{n\in Z} \left[2\pi n - \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad \arcsin(\sin x) = x + 2\pi k \ (k \in Z)$ $\quad -x - 10\pi k = x - \pi$

$2x = \pi(1 - 10k)$ $\quad x = \frac{\pi}{2}(1 - 10k)$ $\quad \begin{cases} x \geqslant -\frac{3\pi}{2} \\ x \leqslant \frac{7\pi}{2} \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} 1 - 10k \geqslant -3 \\ 1 - 10k \leqslant 7 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} 10k \leqslant 4 \\ 10k \geqslant -6 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} k \leqslant 0,2 \\ k \geqslant -0,6 \end{matrix}$ $\quad k = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ Проверка: $\cancel{5\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}$ $\quad 5\arccos(\sin\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$ $\quad 0 = 2\pi$ - неверно

II) $x \in \bigcup\limits_{n\in Z} \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \pi\right)$ $\quad \arcsin(\sin x) = \pi - x + 2\pi k, \ k \in Z$

$-5\pi + 5x - 10\pi k = x - \pi$ $\quad 4x = (4 + 10k)\pi$ $\quad x = \frac{\pi}{2}(2 + 5k)$ $\begin{cases} x \geqslant -\frac{3\pi}{2} \\ x \leqslant \frac{7\pi}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 2 + 5k \geqslant -3 \\ 2 + 5k \leqslant 7 \end{cases}$

$\begin{cases} 5k \geqslant -5 \\ 5k \leqslant 5 \end{cases}$ $\quad k \in \{-1; 0; 1\}$ $\quad \left[\begin{matrix} x = -\frac{3\pi}{2} \\ x = \pi \\ x = \frac{7\pi}{2} \end{matrix}\right.$ $\quad$ Проверка: $x = -\frac{3\pi}{2}$: $5\arccos(\sin -\frac{3\pi}{2}) =$

$= \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}$ $\quad 0 = 3\pi$ - неверно; $\quad x = \pi$: $5\arccos(\sin\pi) = \frac{3\pi}{2} + \pi$ $\quad 5 \cdot \frac{\pi}{2} = 5\frac{\pi}{2}$ - верно

$x = \frac{7\pi}{2}$: $5\arccos(\sin\frac{7\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} + \frac{7\pi}{2}$ $\quad 5\pi = 5\pi$ - верно

Ответ: $x = \pi$, $x = \frac{7\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

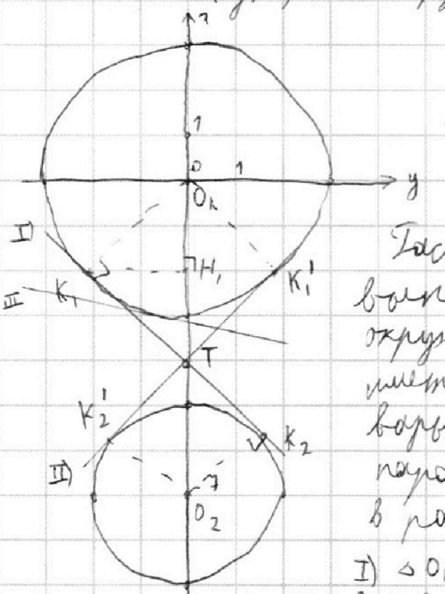
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0\end{cases}$ Найти a: $\exists b$; 4 решения

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно не содержит a и b

$\left[\begin{array}{l} x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2-9=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2+14x+49+y^2=2^2 \\ x^2+y^2=3^2\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}(x+7)^2+y^2=2^2\\ x^2+y^2=3^2\end{array}\right.$ — задаёт в осях $(y;x)$ на коорд. пл-ти окружности $W_1((0;-7),2)$ и $W_2((0;0),3)$



Первое уравнение задаёт прямую $x=-3ay+7b$

У уравнения 4 решения $\Leftrightarrow$ прямая пересекает обе окружности

Рассмотрим те a, при которых условие не выполняется, т.е. прямая касается обоих окружностей либо касается лишь одной (и не может иметь общих точек с другой), при этом, т.к. b варьируется, условие не должно выполняться при параллельном переносе, а значит, окружности в разных полуплоскостях отн. $x=-3ay+7b$

I) $\triangle O_1K_1T \sim \triangle O_2K_2T$ $\frac{O_1T}{O_2T}=\frac{O_1K_1}{O_2K_2}=\frac{3}{2}$; $O_1O_2=7$ $O_1T=\frac{3}{5}O_1O_2=\frac{21}{5}$

$O_2T=\frac{2}{5}O_1O_2=\frac{14}{5}$ $\cos\angle K_1O_1T=\frac{O_1K_1}{O_1T}=\frac{O_1H_1}{O_1K_1}$ $O_1H_1=\frac{O_1K_1^2}{O_1T}=\frac{9}{\frac{21}{5}}=\frac{15}{7}$

$H_1T=\frac{21}{5}-\frac{15}{7}=\frac{3(49-25)}{35}=\frac{72}{35}$ $K_1H_1=\sqrt{O_1K_1^2-O_1H_1^2}=\sqrt{3^2-\frac{15^2}{49}}=3\sqrt{\frac{49-25}{49}}=\frac{3}{7}\sqrt{24}=\frac{6}{7}\sqrt{6}$

$\operatorname{tg}\angle H_1K_1T=\frac{H_1T}{K_1H}=\frac{72}{35}\cdot\frac{7\sqrt6}{6}=\frac{12\sqrt6}{5}$ Угловой коэф. — тангенс угла наклона: $-3a=-\frac{12\sqrt6}{5}$ $a=\frac{4\sqrt6}{5}$

II) Аналогично $-3a=\frac{12\sqrt6}{5}$ $a=-\frac{4\sqrt6}{5}$

III) $a\in\left(-\frac{4\sqrt6}{5};\frac{4\sqrt6}{5}\right)$ — усл. ситуации касания лишь одной окр-ти

Когда нет 4 решений, $a\in\left[-\frac{4\sqrt6}{5};\frac{4\sqrt6}{5}\right]$, когда есть

Ответ: $a\in\left(-\infty;-\frac{4\sqrt6}{5}\right)\cup\left(\frac{4\sqrt6}{5};+\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases} \qquad xy - ?$$

ОДЗ: $x, y > 0;\ y \neq 1,\ x \neq \frac{1}{6}$; пусть $k = \log_7 6x$, $t = \log_7 y$; $k, t \neq 0$

$$\begin{cases} k^4 - \frac{2}{k} = \frac{3}{2k} - 4 \\ t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} k^4 = \frac{7}{2k} - 4 \\ t^4 = -\frac{7}{2t} - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} k^5 + 4k = 3{,}5 \\ t^5 + 4t = -3{,}5 \end{cases}$$

$k^5 + t^5 + 4(k+t) = 0 \qquad (t+k)(k^4 - k^3t + k^2t^2 - kt^3 + t^4 + 4) = 0$

$(t+k)\left(k(k^3 - t^3) - t(k^3 - t^3) + 4\right) = 0 \qquad (t+k)\left((k-t)^2(k^2 + kt + t^2) + 4\right) = 0$; $(k-t)^2 \geqslant 0$,

$k^2 + kt + t^2 \geqslant 0$ $\left(t \neq 0;\ \left(\frac{k}{t}\right)^2 + \left(\frac{k}{t}\right) + 1 = 0;\ D = 1 - 4 < 0;\ \underline{\cup} > 0\right)$, $\Rightarrow (k-t)^2(k^2 + kt + t^2) + 4 > 0$

$t + k = 0 \qquad t = -k$

Замена следствием: $t = -k \qquad \log_7 6x = -\log_7 y \qquad 6x = \frac{1}{y}$

$xy = \frac{1}{6}$ — ед. возможное значение.

Проверка:

$2k^5 + 8k - 7 = 0$; ~~$k = \frac{7}{2}$: $2 \cdot \frac{7^5}{2^5} + \frac{8 \cdot 32 \cdot 7}{2^5} - \frac{7 \cdot 32}{2^5} = 0$, $2 \cdot 7^4 + 128 \cdot 7 - 16 = 0$ — не уд.~~

$f(k) = 2k^5 + 8k$; $f(k) \nearrow$, $f(0) = 0$; $f(1) = 10$ $\Rightarrow \forall k \in (0; 10)$: $f(k) = 7$, $k \neq 0$, $k \neq 1$
$7 \in (0; 10)$

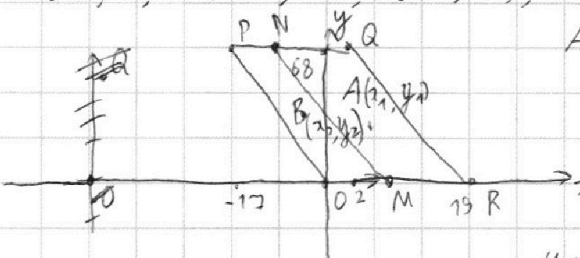
$(2k^5 + 8k = 7)$

— k сущ. если сущ k, то $t = -k$: $2t^5 + 8t = -(2k^5 + t) = -7$, $t \neq 0$, $t \neq -1$

— t сущ. $\Rightarrow$ x и y сущ. ($k, t \neq 0 \Rightarrow$ ~~$x, y \neq 1, y =$~~ $y \neq 1$, $x \neq \frac{1}{6}$ — уд.)

Ответ: $xy = \frac{1}{6}$

$O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$, $R(19;0)$



A и B выше OR, но ниже PQ

$0 \leq y_1, y_2 \leq 68$

PO: $y = -4x$; QR: $y = -4(x-19) = 76-4x$

A и B выше PO, но ниже QR

$-4x_1 \leq y_1 \leq 76-4x_1$; $-4x_2 \leq y_2 \leq 76-4x_2$

$y_1 + 4x_1 \in [0;76]$ $\quad y_2 + 4x_2 \in [0;76]$

$4x_2 + y_2 - (4x_1 + y_1) = 40$

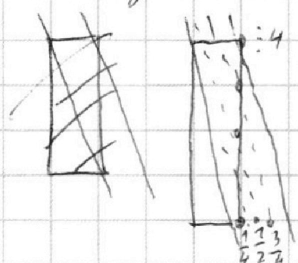
$\cancel{-}(y_1 + 4x_1) \in \cancel{[-76;0]}\,[0;76]$ $\quad 4x_2 + y_2 \in [40;116]$ $\quad y_2 + 4x_2 \in [40;76]$

$(4x_1 + y_1) = (4x_2 + y_2) - 40$ $\quad (4x_1 + y_1) \in [0;36]$

$y_1 = -4x_2 + b$, $b \in [0;36]$ $\quad y_2 = -4x_2 + d$, $d \in [40;76]$

– уравнения прямых, параллельных PO

$(4x_2 + y_2) - (4x_1 + y_1) = 40$ $\quad d - b = 40$. ~~Имеем~~



Две прямые, полные целых точек ~~по~~ лежат по x через один. $x_1 = \frac{b-y}{4}$; ~~$y \vdots 4, b \vdots 4$~~ $y \underset{4}{\equiv} b$

I) при $y \underset{4}{\equiv} 0$: $x_1 = \frac{b}{4}$ $\quad x_1 \in [0;9]$ – 9 прямых – 9 пар прямых

$y \underset{4}{\equiv} 0$ $\quad x_2 = \frac{d}{4}$ $\quad x_2 \in [10;19]$ – 9 прямых

на каждой прямой $\frac{68}{4} + 1$ точек (уч. на границе)

если $y \not\vdots 4$, то $x \notin \mathbb{Z}$

– итого 18. На каждой из прямых 18 точек внутри PQRO. Имеем $9 \cdot 18^2$ точек при $y \underset{4}{\equiv} 0$

II) при $y \underset{4}{\equiv} 1, 2, 3$, у как нет точек на границах, получаем их параллельным переносом. $y \underset{4}{\equiv} 1$ $\quad x \equiv \frac{b-1}{4}$ $\quad x_1 \in [0;8]$ – 8 прямых – 8 пар прямых

$x \equiv \frac{d-1}{4}$ $\quad x_2 \in [10;18]$ – 8 прямых

ан. для $y \underset{4}{\equiv} 2, 3$. Имеем $3 \cdot 8 \cdot 17^2$

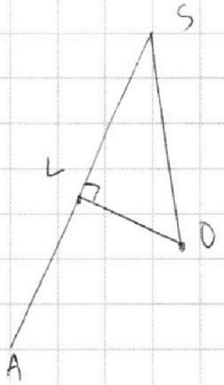
| ~~$9 \cdot 18^2 = (8+1)(18-1)$~~

Ответ: $9 \cdot 18^2 + 3 \cdot 8 \cdot 17^2$ $\quad (= 9852$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

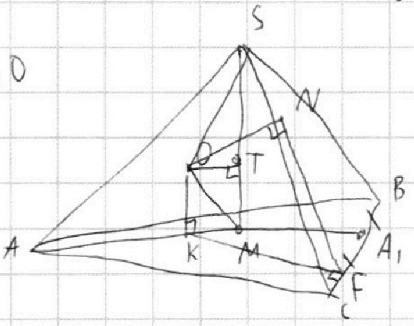


$SO=5;\ OL=4 \Rightarrow SL=\sqrt{SO^2-OL^2}=3;\ AL=7$

$AK=AL=7$ $\quad AM=10$ $\quad AA_1=15$ $\quad KM=3$

$KA_1=15-7=8$

$OM=\sqrt{KM^2+OK^2}=5=OS$ $\quad OM=OS$



$\triangle SOM$ – равнобед.; OT – мед, выс, бис.

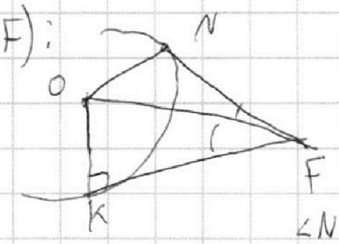
$OA_1=\sqrt{OK^2+KA_1^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{1+4}=4\sqrt{5}$

$OA=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$

KF – перп. к BC

$\frac{KF}{AH}=\frac{KA_1}{AA_1}=\frac{8}{10}$ $\quad KF=\frac{8}{10}\cdot 12=\frac{96}{10}=9{,}6$

(KOF):



$FN=FK$ (касательные)

$OK=4;\ KF=9{,}6$

$\angle NFK=\widehat{(SBC),(ABC)}$

$\frac{\angle NFK}{2}=\operatorname{arctg}\frac{OK}{KF}=\frac{40}{96}=\frac{20}{48}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$

$\sin\frac{\angle NFK}{2}=\frac{5}{13}$ (я знаю, т. к. $5^2+12^2=13^2$)

~~sin~~ $\cos\angle NFK=1-2\sin^2=1\cancel{-2\frac{25}{156}=\frac{49}{}}\quad 1-2\cdot\frac{25}{169}=$

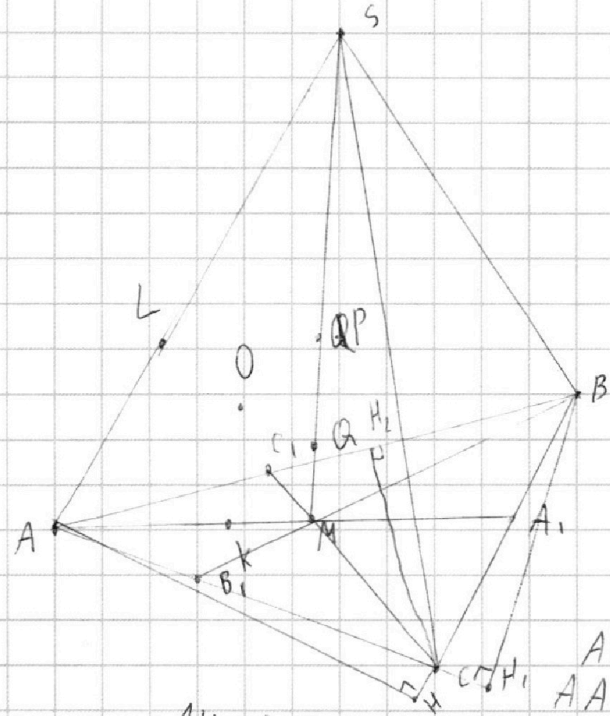
$=\frac{169-50}{169}=\frac{119}{169}$

Ответ: $\angle NFK=\arccos\left(\frac{119}{169}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

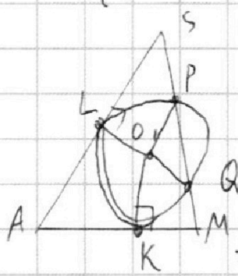
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



O – центр Ω $OL=OK=OQ=OP$

В (ASM): ~~$O_1=Pr_\perp(O)$ $O=O_1$~~ $O_1=Pr_\perp(O)$



$\angle O_1PQ = O_1QP \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle O_1PS = \angle O_1QM$
$O_1P = O_1Q;\ PS = QM \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle O_1PS = \triangle O_1QM$
$\Rightarrow OS = OM$

$\triangle O_1LS\ O_1KM$ – прямоуг. $O_1L = O_1K$,
$OS = OM \Rightarrow \triangle O_1LS = \triangle O_1KM$ $LS = KM$
AK AK – кас. $\Rightarrow AL = AK$
$AS = AL + LS = AK + KM = AM$
$AM = AS = BC = 10$
$AA_1 = \frac{3}{2} AM = 15$

AH – выс. $\triangle ABC$; ~~AH~~ $H \in BC$ ~~(нет на рис.)~~ $\frac{1}{2} AH \cdot BC = S_{ABC} = 60$

$AH = \frac{120}{BC} = 12$ $A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = 9$ $BA_1 = \frac{BC}{2} = 5$; $BH = 14$, $CH = 4$

$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{144+16} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{144+196} = \sqrt{340}$

BH_1 – выс к AC $BH_1 = \frac{2S}{AC} = \frac{120}{4\sqrt{10}} = \frac{30}{\sqrt{10}} = 3\sqrt{10}$ $CH_1 = \sqrt{BC^2 - BH_1^2} =$

$= \sqrt{100-90} = \sqrt{10}$ $B_1C = \frac{AC}{2} = 2\sqrt{10}$; $B_1H_1 = B_1C + CH_1 = 3\sqrt{10}$

$BB_1 = \sqrt{BH_1^2 + H_1B_1^2} = \sqrt{90+90} = \sqrt{180} = 3\sqrt{20}$ CH_2 – выс. к AB

$CH_2 = \frac{2S}{AB} = \frac{120}{\sqrt{340}} = \frac{120}{340}\sqrt{340} = \frac{6}{17}\sqrt{340}$ $BC_1 = AC_1 = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{340}}{2}$

~~$C_1H_2 = BC_1 - BH_2$~~ $BH_2 = \sqrt{BC^2 - CH_2^2} = \sqrt{100 - \frac{6^2}{17^2}\cdot 340} = \sqrt{100 - \frac{36}{17}\cdot 20} = \sqrt{\frac{1700-720}{17}} =$

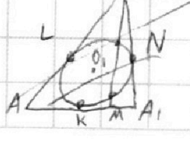
$= \sqrt{\frac{980}{17}} = \frac{1}{17}\cdot\sqrt{49}\cdot\sqrt{340} = \frac{7}{17}\sqrt{340}$ $C_1H_2 = BC_1 - BH_2 = \left(\frac{17}{34} - \frac{14}{34}\right)\sqrt{340} = \frac{3\sqrt{340}}{34}$

$CC_1 = \sqrt{CH_2^2 + H_2C_1^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{17}\right)^2 + \left(\frac{3}{34}\right)^2}\sqrt{340} = \frac{\sqrt{144+9}}{17}\cdot\sqrt{340} = \frac{\sqrt{153}}{17}\cdot\sqrt{340} = \frac{3\sqrt{17}\cdot\sqrt{17}\sqrt{20}}{17} =$

$= 3\sqrt{20}$ 1) Ответ: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 3\sqrt{20} \cdot 3\sqrt{20} =$

$= 15 \cdot 9 \cdot 20 = 300 \cdot 9 = 2700$

2) ~~(ASM)~~:



~~$SN = 3$ $SL = SN = 3$~~ ~~$O = O_1$~~ $SN = 3$, $NO = 4 \Rightarrow SO = 5$

$OL = OK = OQ = OP = ON = 4$ – радиус

прод. на др. листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

256×13: 768, 256, 3328

~~3328~~ 3418

$1430 - 195 = 1235$

$1235 : 13 = 95$; 117, 65

$135 : 13 = 15$; 13, 65

19×19: 171, 19, 361

14×14: 56, 14, 196

$980 : 17$; 68, 300, 4

18×18: 144, 18, 324

$324 \times 9 = 2916$

17×17: 119, 17, 289

$289 \times 8 = 2312$

$2312 \times 3 = 6936$

$6936 + 2916 = 9852$