



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-15; 90)$, $Q(2; 90)$ и $R(17; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

р.с.

$a, b, c \in \mathbb{N}$

Решение: $a \cdot b : (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11})$

$$b \cdot c : (2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13})$$

$$a \cdot c : (2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{23})$$

Пусть $a = 2^{d_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\delta_1} \cdot p_1$, $b = 2^{d_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\delta_2} \cdot p_2$, $c = 2^{d_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\delta_3} \cdot p_3$.

Где d_1, d_2, d_3 - степени 2, при каком-то из них a, b, c .
и $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ - степени 3 и $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ - степени 5 соотв. p_1, p_2, p_3 - все остальные простые

множ. a, b, c . Поскольку нам требуется наименьшее произв. $a \cdot b \cdot c$,

то $p_1 = p_2 = p_3 = 1$. Тогда переписыв условия с учетом новой обозначки!

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_2 \geq 6 \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 13 \\ d_1 + d_2 \geq 11 \end{array} \right. \quad \text{— это система для произв. } a \cdot b.$$

соотв. у нас одна переменная должна быть для 3х чисел

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_2 \geq 6 \quad (1) \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 13 \quad (2) \\ \delta_1 + \delta_2 \geq 11 \quad (3) \\ d_2 + d_3 \geq 14 \quad (1^*) \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 21 \quad (2^*) \\ \delta_2 + \delta_3 \geq 13 \quad (3^*) \\ d_1 + d_3 \geq 16 \quad (1') \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 25 \quad (2') \\ \delta_1 + \delta_3 \geq 23 \quad (3') \end{array} \right.$$

Значит просуммируем (1), (1') и (1').

Получим, что $2d_1 + 2d_2 + 2d_3 \geq 36$ или

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq 18$$

Аналог: $2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 \geq 59$. Поскольку

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ - все целые степени

простых чисел при разложении натурального числа,

то $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \in \mathbb{Z}$. Т.е. $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 29,5$, тогда $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$U \text{ также } 2\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3 \geq 52$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \geq 26.$$

Тогда имеем:

$$\begin{cases} d_1 + d_2 + d_3 \geq 18 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30 \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \geq 26. \end{cases}$$

Но при этом заметим, что

$$U \text{ (3')} : d_1 + d_3 \geq 28.$$

Тогда, если мы найдем такие d, β, δ , что соблю. рав-во, то это и будет минимальным произведением а.б.с. Пошагово

$$a \cdot b \cdot c = 2^{d_1+d_2+d_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\delta_1+\delta_2+\delta_3}$$

Заметим, что при $d_1=4, d_2=2, d_3=12$ - соблю. усл. U (1), (1') и (1'')

и $U \leq 2$. По А.К.И.: β гад $\beta_1=5, \beta_2=5, \beta_3=20$.

и гад $d_1=14$ и $d_2=14$.

Значит β найш. возможн. знач. произв. а.б.с:

$$a \cdot b \cdot c \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



н.д.

Решение:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{AB}{AB} = \frac{7}{2}$$

Пусть пусть $BD = 1$ и $AD = 0,4$.

Заметим, что если $\angle B = 2$

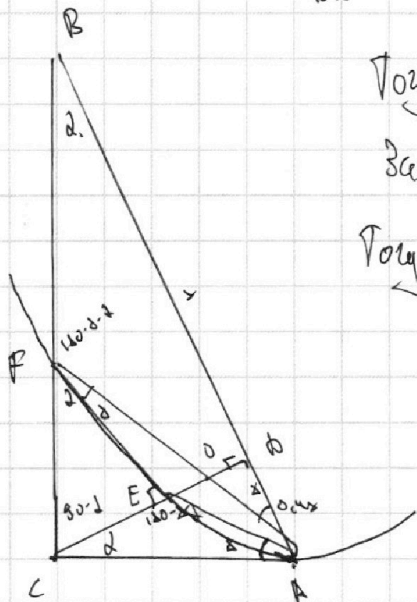
тогда $\angle BCD = 90 - d$ и $\angle OCA = d$

$\angle CAD = 90 - d$.

Заметим, что $\angle BAF = \angle AFE$,

как corresp. угл. при перес.

AB и FE и сек. FA



Также, поскольку AC - кас. и ок-ти по угл., то $\angle EAC = \angle EFA$

как \angle -на орг кас. и сек. $\angle CEF = \angle CAB$ - как corresp. $\angle CFE = \angle CBA$

как corresp. $S_{ACD} : S_{ABC} = AD : AB = \frac{2}{7}$.

$$S_{CBD} : S_{ABC} = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{7}$$

$$\triangle CFE \sim \triangle CBD \text{ (по 2-м угл.)}; \frac{CF}{CB} = \frac{CE}{CD} \quad CD = \frac{CB \cdot AC}{AB}$$

$$CD = \frac{CE \cdot CB}{CF}$$

$$\frac{CF \cdot CB}{CF} = \frac{CB \cdot AC}{AB} \Rightarrow \frac{CF}{CF} = \frac{AC}{AB}$$

$$AC^2 = AD \cdot AB = 0,4 \cdot 1,4 = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{25}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Тогда

$$\cos \angle = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow BC = \sqrt{BD \cdot BA} = \sqrt{\frac{7}{5} \cdot \frac{7}{3} x} = \sqrt{\frac{49}{15}} \cdot x$$

Тогда $CD = \frac{CB \cdot AC}{AB} = \frac{\sqrt{\frac{49}{15}} x \cdot \sqrt{\frac{14}{25}} \cdot x}{1,4x} = \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{7\sqrt{5}} \cdot x$

Заметим, что $\triangle AFB \sim \triangle CEA$ (по 2-м углам),

Тогда $\frac{CE}{FB} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{\frac{14}{5}} x}{1,4x} = \frac{\sqrt{14}}{7} \Rightarrow CE = \frac{\sqrt{14}}{7} \cdot FB$

Но из параллельности: $\frac{CF}{CE} = \frac{CB}{CD}$

$CF \cdot CD = CE \cdot CB$

$CF \cdot CD = CE (CF + FB)$

$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CF + FB} = \frac{\frac{\sqrt{14}}{7} \cdot FB}{\frac{\sqrt{14}}{7} \cdot FB + FB} = \frac{CB - FB}{CB}$

Поэтому $\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB} =$

$= \frac{7\sqrt{2}}{7\sqrt{5}} x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} x$

$= \frac{7\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{5\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{14}}{5}$

$CE = \frac{\sqrt{14}}{5} CF$

$= 1 - \frac{FB}{CB} = \frac{\sqrt{14} \cdot FB}{7 \cdot CB}$

$\frac{CE}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$

$CE = \frac{\sqrt{14}}{7} FB$

$CF = \frac{5}{\sqrt{14}} CE$

$FB = \frac{7}{\sqrt{14}} CE$

$CF + FB = CB = \frac{12}{\sqrt{14}} CE \Rightarrow CE = \frac{\sqrt{14}}{12} \cdot CB = \frac{\sqrt{14}}{12} \cdot \sqrt{\frac{7}{5}} \cdot x = \frac{7\sqrt{2}}{12\sqrt{5}} x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пошагово

$$\frac{S_{CFE}}{S_{ABD}} = \frac{CE}{CD} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{10\sqrt{5}} \times}{\frac{7\sqrt{2}}{7\sqrt{5}} \times} = \frac{5\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{5}{4}$$

Значит $S_{CFE} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{7} S_{ABC} = \frac{25}{28} S_{ABC}$

Значит $\frac{S_{ACD}}{S_{CFE}} = \frac{\frac{2}{7} S_{ABC}}{\frac{25}{28} S_{ABC}} = \frac{2 \cdot 28}{7 \cdot 25} = \frac{168}{175}$

Ответ: $\frac{S_{ACD}}{S_{CFE}} = \frac{168}{175}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

Решение! $30 \cdot \arccos(\sin x) = 3\pi - 2x$

$$60 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \right) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 60 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$-60 \arcsin(\sin x) = 4\pi - 2x$$

$$30 \arcsin(\sin x) = 2x - 4\pi$$

$$\arcsin(\sin x) = \frac{x}{30} - \frac{2\pi}{15}$$

$$\sin(\arcsin(\sin x)) = \sin\left(\frac{x}{30} - \frac{2\pi}{15}\right)$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{x}{30} - \frac{2\pi}{15}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{x}{30} - \frac{2\pi}{15} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \frac{x}{30} + \frac{2\pi}{15} + 2\pi n \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{4}{30}x = -\frac{2\pi}{15} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ \frac{31}{30}x = \frac{7\pi}{15} + 2\pi n \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}n; n \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{array} \right.$$

Рассмотрим (1)
 $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$
Если $x = -\frac{\pi}{2}$, то:

$$30 \cdot \arccos(-1) = 3\pi + \pi$$

$$30 \cdot \pi = 30\pi - \pi$$

Если $x = -\frac{\pi}{2}$, т.е. $x \geq 2\pi$ ← Если $x = 2\pi$ л.о.д.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{2x}{\omega} - \frac{4\pi}{\omega} \leq \frac{\pi}{2}$$

т.е. $\frac{2x}{\omega} \geq -\frac{\pi}{\omega}$

$$x \geq -\frac{\pi}{2}$$

и

$$\frac{2x}{\omega} \leq \frac{3\pi}{\omega}$$

$$x \leq 4,5\pi \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 4,5\pi\right] - \text{при}$$

этих значениях x могут быть корни.

Рассмотрим (1):

при $n < 0$ $x < -\frac{\pi}{2}$.

при $n = 0$ $x = -\frac{\pi}{2}$

10. $\arccos(-1) = 3\pi + \pi$

$$10\pi = 10\pi - \text{да}$$

при $n = 1$: $x = 2\pi$

$$10 \cdot \arccos(0) = 3\pi + 4\pi$$

$$5\pi = 3\pi - \text{да}$$

при $n = 2$: $x = 4,5\pi$

$$10 \cdot \arccos(1) = 3\pi - 9\pi$$

$$0 = 0 - \text{да}$$

при $n > 2$: $x > 4,5\pi$ - решений нет

Рассмотрим (2): при $n < -1$: $x < \frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$ - решений нет

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если $n = -1$: $x = -\frac{\pi}{2}$ - мы проверили этот случай ранее.

Если $n = 0$: $x = \frac{7\pi}{6}$: $\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \sin \frac{\pi}{3}$

$$\cos \frac{7\pi}{6} = \frac{27\pi - 2\pi}{3} \quad \text{или} \quad \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3}$$
$$\frac{20\pi}{3} = 20 \frac{\pi}{3} \text{ д.}$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \frac{27\pi - 2\pi}{3}$$
$$\frac{25\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$$

Если $n = 1$: $x = \frac{7\pi}{6} + \frac{10\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$

$$\cos \left(+\frac{\pi}{2} \right) = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$$

$$\frac{10\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} \text{ д.}$$

Если $n = 2$: $x = \frac{7\pi}{6} + \frac{10\pi}{3} = \frac{27\pi}{6} = 4,5\pi$.

$$\cos (\pi) = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$0 = 0. \text{ д.}$$

Если $n > 2$, то $x > 4,5\pi$ - решений нет

Значит $x = \left\{ -\frac{\pi}{2}; 2\pi; 4,5\pi; \frac{7\pi}{6}; \frac{17\pi}{6} \right\}$.

Ответ: $x = \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; 4,5\pi \right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Решение:

$$5x + 6ay - b = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + y^2 - 25) \cdot (x^2 + y^2 + 18y + 87) = 0 \quad (2)$$

Перепишем (2) как:

$$(x^2 + y^2 - 25) \cdot (x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0.$$

Тога

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4. \end{cases}$$

- две ок.ту.

$$W_1(O_1(0;0), r_1=5)$$

$$W_2(O_2(0;-9), r_2=2)$$

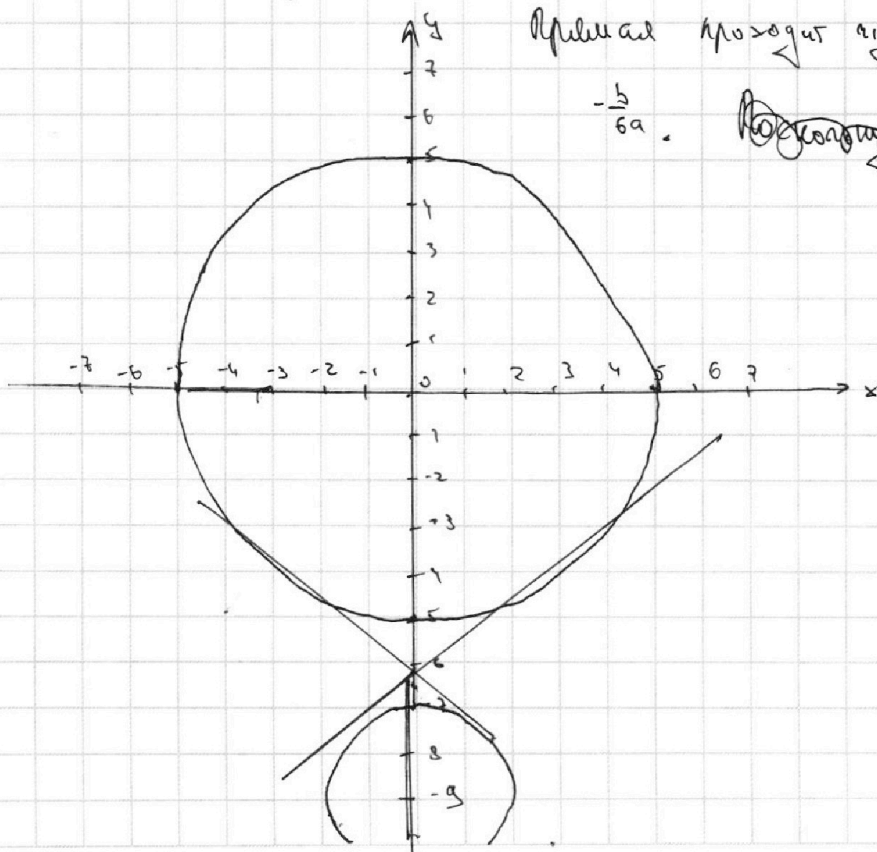
$$(1): 5x + 6ay - b = 0.$$

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a} \text{ - задает прямую.}$$

Методом решения будет, когда прямая будет л-ато обе ок.ту.

Прямая проходит эту точку

$$-\frac{b}{6a} \text{ .}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Поскольку \leftarrow упр. с нашей прямой: $y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$ можно

записать как $y = kx + b$, ~~когда $k = \frac{5}{6a}$ и $b = \frac{6}{6a}$~~

Получим искомого макс. знач. $k = \frac{5}{6a} \cdot \frac{1}{\sqrt{22}} = \frac{5}{6a\sqrt{22}}$

$$= \frac{\frac{5}{6a}}{\frac{1}{\sqrt{22}}} = \frac{5\sqrt{22}}{6a}$$

Получим с учетом выше сказанного $-\frac{5}{6a} \geq \frac{\sqrt{22}}{5}$ и

$$-\frac{5}{6a} \leq -\frac{\sqrt{22}}{5} \quad \text{из 1-го получаем, что} \quad \frac{-25 - \sqrt{22} \cdot 6a}{30a} \geq 0$$

$$\begin{aligned} -25 - \sqrt{22} \cdot 6a &\geq 0 \\ a &\leq \frac{25}{-\sqrt{22} \cdot 6} \end{aligned}$$

$$+ \frac{-25}{\sqrt{22} \cdot 6} \quad 0 \quad + \quad a$$

$$\text{из 2-го} \quad \frac{-25 + \sqrt{22} \cdot 6a}{30a} \geq 0$$

$$+ \quad 0 \quad \frac{25}{6\sqrt{22}} \quad a$$

Значит, объединив оба условия; $a \in (-\infty; \frac{-25\sqrt{22}}{132}) \cup$

$$\cup (\frac{25\sqrt{22}}{132}; +\infty)$$

Ответ: $a \in (-\infty; \frac{-25\sqrt{22}}{132}) \cup (\frac{25\sqrt{22}}{132}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н.с.

Решение: $\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 3 \frac{1}{101} - 5$ O.D.З. $\frac{x > 0}{x \neq 1}$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3 \log_{11} x} - 5$$

Пусть $\log_{11} x = t$

Тогда $t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5$. (1) ~~тогда~~ ~~тогда~~

$$t^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5t$$

$$t^5 + 5t - 5\frac{1}{3} = 0.$$

$$\log_{0,5}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,115y^2} (11^{-13}) - 5. \text{ O.D.З. } \frac{y > 0}{y \neq 1}$$

$$\log_{0,5}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{0,5y} 11} = -\frac{13}{3} \log_{0,5y} 11 - 5$$

$$\log_{0,5}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{0,5y} 11} = \frac{-13}{3 \cdot \log_{0,5y} 11} - 5$$

Пусть $\log_{0,5} (0,5y) = z$. Тогда $z^4 + \frac{1}{z} = -\frac{13}{3z} - 5$. (2)

$$z^5 + 1 + \frac{13}{3} = 5z$$

$$z^5 + 5z + 5\frac{1}{3} = 0.$$

Рассмотрим ф-цию $f(t) = t^5 + 5t + 5\frac{1}{3}$ $f'(t) = 5t^4 + 5 > 0$ значит

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 3$$

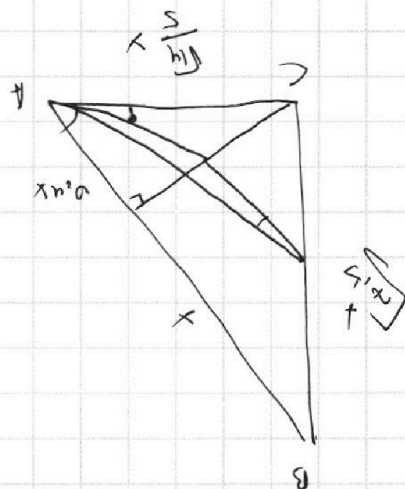
$$x^{\frac{4}{11}} = z$$

$$z = \sqrt[11]{\frac{z^4}{x^2}}$$

$$CA = \sqrt[11]{0.4 \cdot 4 \cdot 11} = z$$

$$CB = \sqrt{x \cdot 4 \cdot 11} = \sqrt{44x}$$

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CB}{CA} = \frac{CB}{CA}$$



$$f(1) = 5 + 2 + 5 = 0$$

$$f(5) = 1 + 5 + 1 = 0$$

$$f(1/5) = 1/5 + 1/5 + 3 = 0$$

$$f(5) + 5 + 1/5 + 5 = 0$$

$$f(1) + 1 = -1/13 - 3/13 - 5 = -1$$

$$\log_{11}^4 (\log_{11} 3) + \frac{1}{11} = \frac{3 \cdot \log_{11} 3}{13} - 5$$

$$\log_{11}^4 (\log_{11} 3) + \frac{1}{11} = \frac{3 \cdot \log_{11} 3}{13} - 5$$

$$\log_{11}^4 (\log_{11} 3) + \log_{11} 3 = 11 - 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

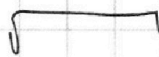
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{4-x^2} - 9$$



$$\frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)}$$

нс.

$$y - 6 = -\frac{2}{3} - 5$$

$$\log_4^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_4^4 x - \frac{6}{\log_x 4} = \frac{1}{3} \log_x \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_4^4 x - \frac{6}{\log_x 4} = -\frac{2}{3} - 5$$

$$\log_4^4 x - \frac{6}{\log_x 4} = -\frac{2}{3} - 5$$

$$\sqrt{4} - \frac{6}{4} = -\frac{2}{3} - 5$$

$$\frac{\sqrt{5} - 6}{4} = \frac{-2 - 15\sqrt{2}}{34}$$

$$3\sqrt{5} - 18\sqrt{2} = -2\sqrt{2} - 15\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{5} + 15\sqrt{2} - 16\sqrt{2} = 0$$

$$\sqrt{3\sqrt{5} + 15\sqrt{2} - 16} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab = (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^4)$
 $bc = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^{13})$
 $ca = (2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{22})$
 $a^2 b^2 c^2 = (2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52})$
 $a \cdot b \cdot c = (2^4 \cdot 3^{20} \cdot 5^{13})$
 $c = (2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^2)$
 $a = (2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^2)$
 $b = (2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^2)$

$a \cdot b = (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11})$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$
 $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$
 $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$

$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 6$
 $\beta_1 + \beta_2 \geq 13$
 $\gamma_1 + \gamma_2 \geq 11$
 $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14$
 $\beta_2 + \beta_3 \geq 21$
 $\gamma_2 + \gamma_3 \geq 13$
 $\alpha_1 + \alpha_3 \geq 16$
 $\beta_1 + \beta_3 \geq 25$
 $\gamma_1 + \gamma_3 \geq 28$

$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 \geq 36$
 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$
 $2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 \geq 59$
 $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30$
 $2\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 \geq 52$
 $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 26$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$
 $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30$
 $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 26$

$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 2$
 $\beta_1 = 4, \beta_2 = 5, \beta_3 = 11$
 $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 5, \gamma_3 = 17$

Если поделить, то получится ≥ 30

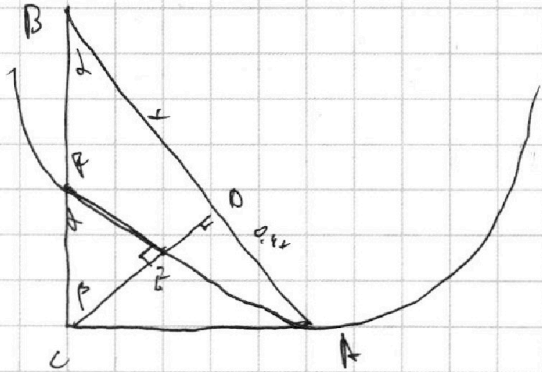
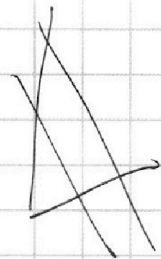
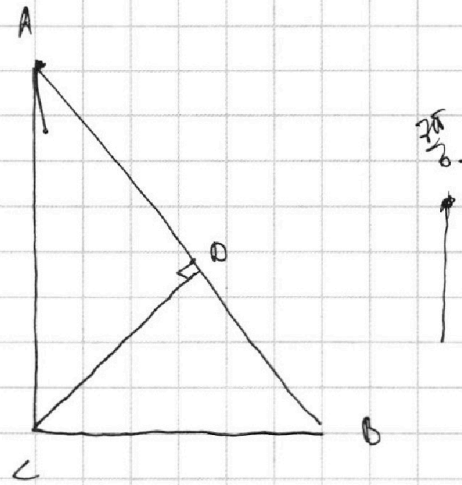
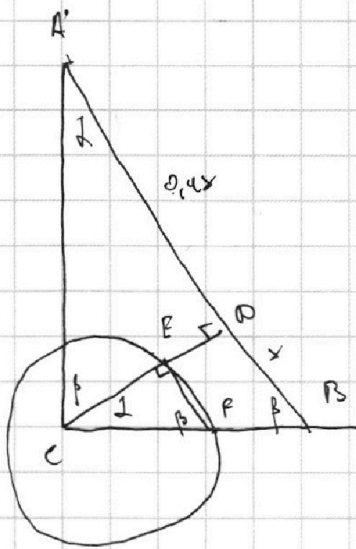
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

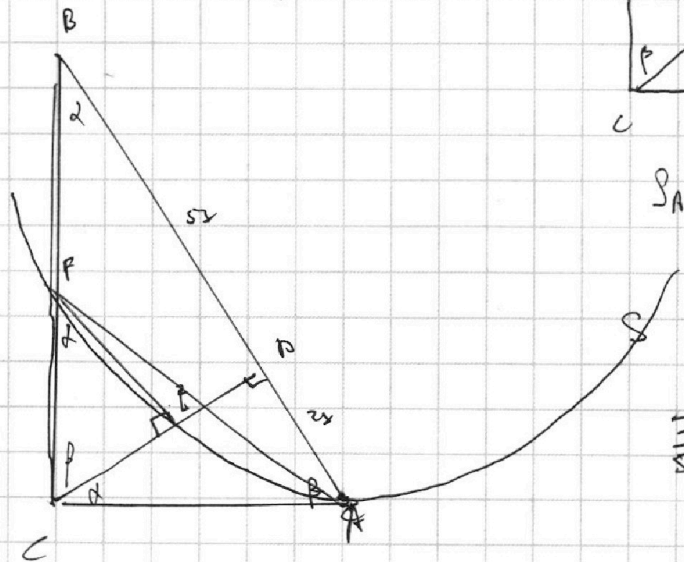
- 1 2 3 4 5 6 7



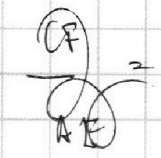
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ACD} : S_{ABC} = \frac{0,4}{3,4} = \frac{1}{11} = \frac{2}{22}$$



$$\frac{CF}{BF} = \frac{CE}{CD}$$



$$\frac{CF}{AE} = \frac{CB}{AB}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x \in [\pi; 2\pi]; 2\pi + 2\pi n,$$

$$\cos x = -\sqrt{1-a^2}$$

$$x \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n],$$

$$\cos x = \sqrt{1-a^2}$$

$$\sqrt{1-a^2} = \frac{9\pi}{10} - 2x$$

$$\sqrt{8 - \sin^2(x)} = \frac{5\pi}{10} - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$$

$$5\pi - \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$-\arccos(\sin x) = 4\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = 2x - 4\pi$$

$$\arcsin(\sin x) = \frac{2x}{10} - \frac{4\pi}{10}$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{2x}{10} - \frac{4\pi}{10}\right)$$

$$x = \frac{2x}{10} - \frac{4\pi}{10} + 2\pi n$$

$$x = \pi - \frac{2x}{10} + \frac{4\pi}{10} + 2\pi n$$

$$\frac{8x}{10} = -\frac{4\pi}{10} + 2\pi n$$

$$\frac{12x}{10} = \frac{14\pi}{10} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = \frac{7}{6}\pi + 2\pi n$$

$$\omega \cdot \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 9\pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$\omega \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{20\pi}{3} \quad \frac{20\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$$

$$\frac{20\pi}{3} = \frac{6\pi}{5}$$

$$\pi - \frac{5\pi}{6}$$

$$\omega \cdot \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 9\pi + \pi$$

$$\omega \pi = \omega \pi$$

$$\omega \cdot \arccos(\dots)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{2x}{10} - \frac{4\pi}{10} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \frac{2x}{10} + \frac{\pi}{10} \leq \frac{3\pi}{10}$$

$$-\frac{3\pi}{10} \leq \frac{2x}{10} \leq \frac{4\pi}{10}$$

$$-3\pi \leq 2x$$

$$-15\pi \leq x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

$$5x + 6ay - b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 25) \quad (x^2 + y^2 + 11x + 17y) = 0$$

$$x^2 +$$

$$(x + y - 5) (x$$

$$(x^2 + y^2 - 5) (x -$$

$$(x^2 + (y - 5)(y + 5)) (x^2 + (y + 5)^2 - 4) =$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{CB}{CD}$$

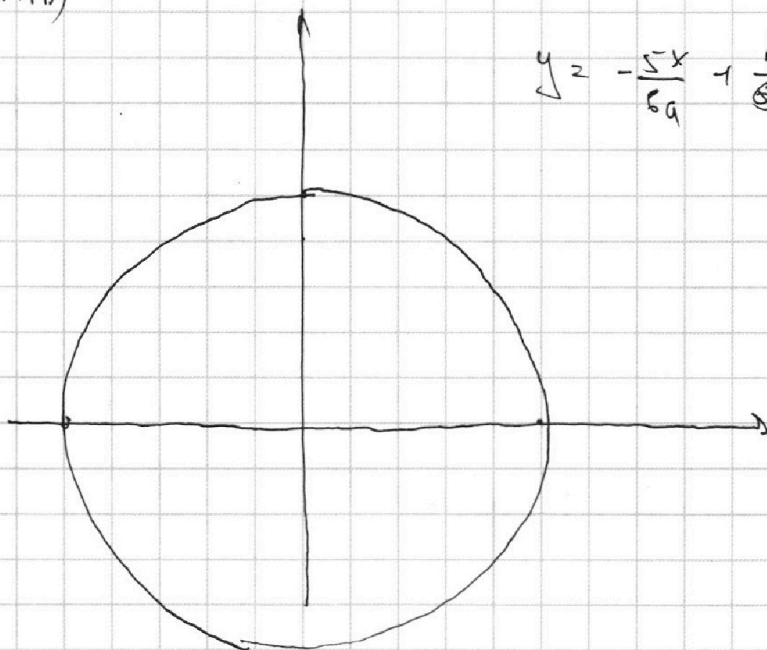
$$= (x^2 + (y - 5)(y + 5)) ((x - 2)(x + 2) + (y + 5)^2)$$

$$CF \cdot CD = CE \cdot CB$$

$$CF \cdot CD = CE \cdot (CF + CB) \quad x^2 + y^2 = 25 \quad x^2 + (y + 5)^2 = 4$$

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CB + CB}{CE}$$

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} d_1 &= 4 \\ d_2 &= 2 \\ d_3 &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \cancel{3} \cancel{7} 8 \\ \beta_2 &= \cancel{2} \cancel{5} 5 \\ \beta_3 &= \cancel{1} \cancel{4} \cancel{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \cancel{2} 8 \\ \delta_2 &= \cancel{3} 3 \\ \delta_3 &= \cancel{10} 10 \end{aligned}$$

14

14

$$\frac{ED}{AD} = \frac{FC}{CA}$$

$$CF = \frac{ED \cdot CA}{AD}$$

$$CF = \frac{CB \cdot CE}{CD}$$

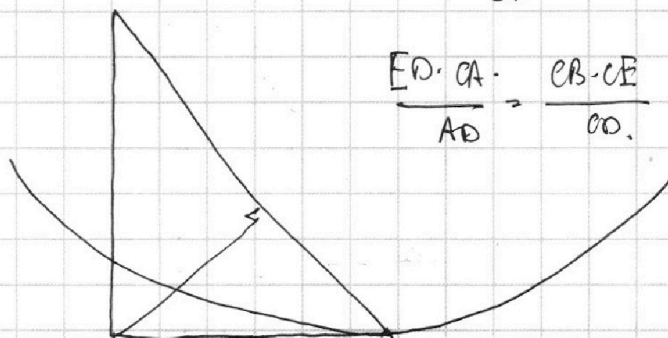
$$\frac{ED \cdot CA}{AD} = \frac{CB \cdot CE}{CD}$$

$$d_1 + d_2 = 5d_3$$

$$\delta_1 + \delta_3$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 14 \\ \delta_2 &= 6 \\ \delta_3 &= 14 \end{aligned}$$

№3.



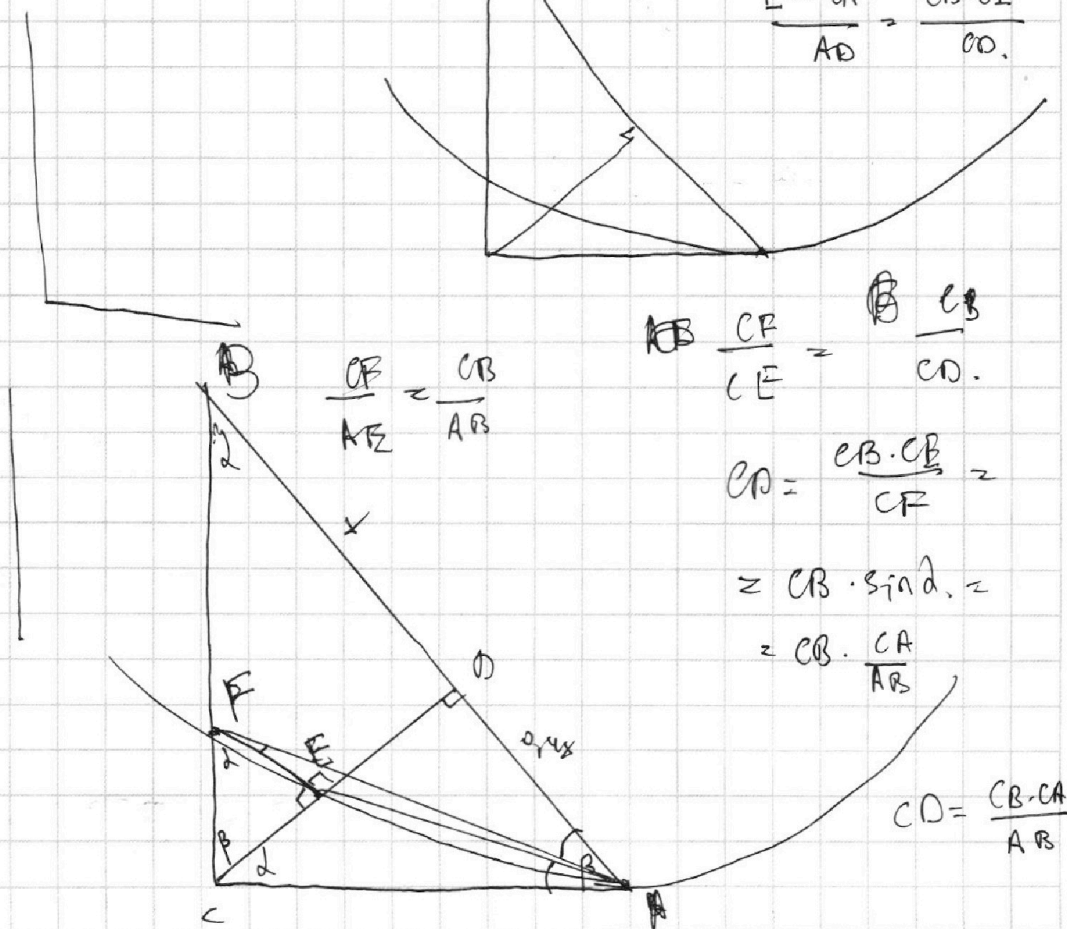
$$\frac{CF}{CE} = \frac{CB}{CD}$$

$$CF = \frac{CB \cdot CB}{CE}$$

$$= CB \cdot \sin \alpha$$

$$= CB \cdot \frac{CA}{AB}$$

$$CD = \frac{CB \cdot CA}{AB}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



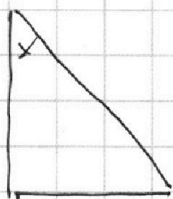
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3.

$$\text{З0} \cdot \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x.$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{2x}{10}.$$



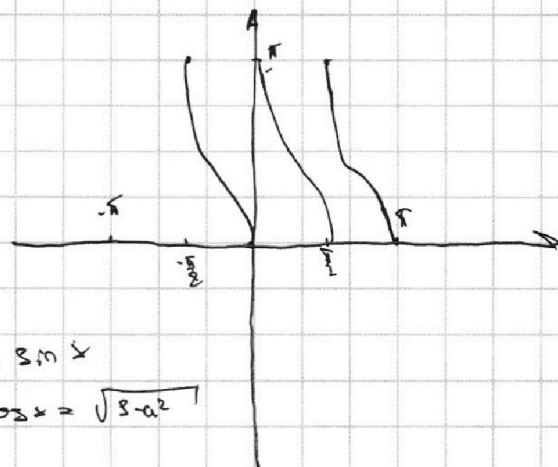
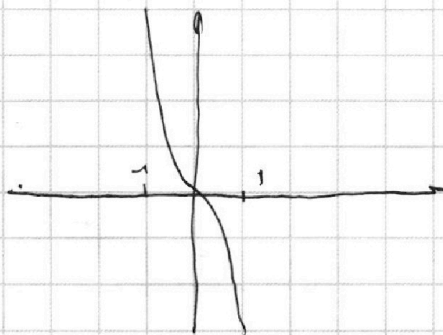
>

$$0; 2\pi.$$

$$0; \pi$$

$$\frac{2\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = \frac{2\pi}{6} - \frac{10\pi}{6} = -\frac{8\pi}{6} = -\frac{4\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{2} \quad \text{З0} \cdot (\arccos(-1)) = 10\pi.$$



$$\text{З0} \quad a = \sin x$$

$$\cos x = \sqrt{1 - a^2}$$

~~З0 \cdot (\arccos a)~~

$$\text{З0} \cdot \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x.$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{2x}{10}.$$

$$\sin x > 0; \quad x \in (0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n).$$

$$\arccos(\sin x) = \arccos(\sqrt{1 - a^2}) = \sqrt{1 - a^2}$$

$$\sqrt{1 - a^2} = \frac{9\pi}{10} - \frac{2x}{10} = \arccos a$$

З0

З0

З0

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = \frac{\sqrt{14}}{5} x$$
$$BC = \sqrt{1.4x \cdot x} = \sqrt{\frac{7}{5}} x$$
$$CD = \frac{\sqrt{\frac{7}{5}} x - \frac{\sqrt{14}}{5} x}{1.4x} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{5\sqrt{5}} \cdot 1.4 x = \frac{2\sqrt{2}}{7\sqrt{5}} x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Знаки $f(x)$ \uparrow -ая \downarrow при $x \in \mathbb{R}$.

Также $y(z) = z^5 + 5z - 5 \frac{1}{3}$

$y'(z) = z^4 + 5 > 0$ при $z \in \mathbb{R}$. Знаки она также

\uparrow -ая при $z \in \mathbb{R}$. Тогда y \downarrow ур. имеет

$$z^5 + 5z - 5 \frac{1}{3} = 0 \quad \vee \quad z^5 + 5z + 5 \frac{1}{3} = 0 \quad - \text{не более}$$

1-го корня. Заметим, что если t_0 - корень, то тогда

где 2 корнями будет $-t_0$. Поскольку тогда $t_0^5 + 5t_0 = 5 \frac{1}{3}$

$$\text{Тогда } \frac{\log_{11} x}{\log_{11} 0,5y} = -1.$$

$$\log_{11} x = -\log_{11} 0,5y.$$

$$\log_{11} x = \log_{11} \left(\frac{2}{y} \right).$$

Тогда по свойствам функции $t(t) = \log_{11} t$ \uparrow -ая и опр. на $t \in (0; +\infty)$.

Значит $x = \frac{2}{y}$ - ед. реш.

Значит $x \cdot y = \frac{2}{y} \cdot y = 2$.

Ответ: 2.



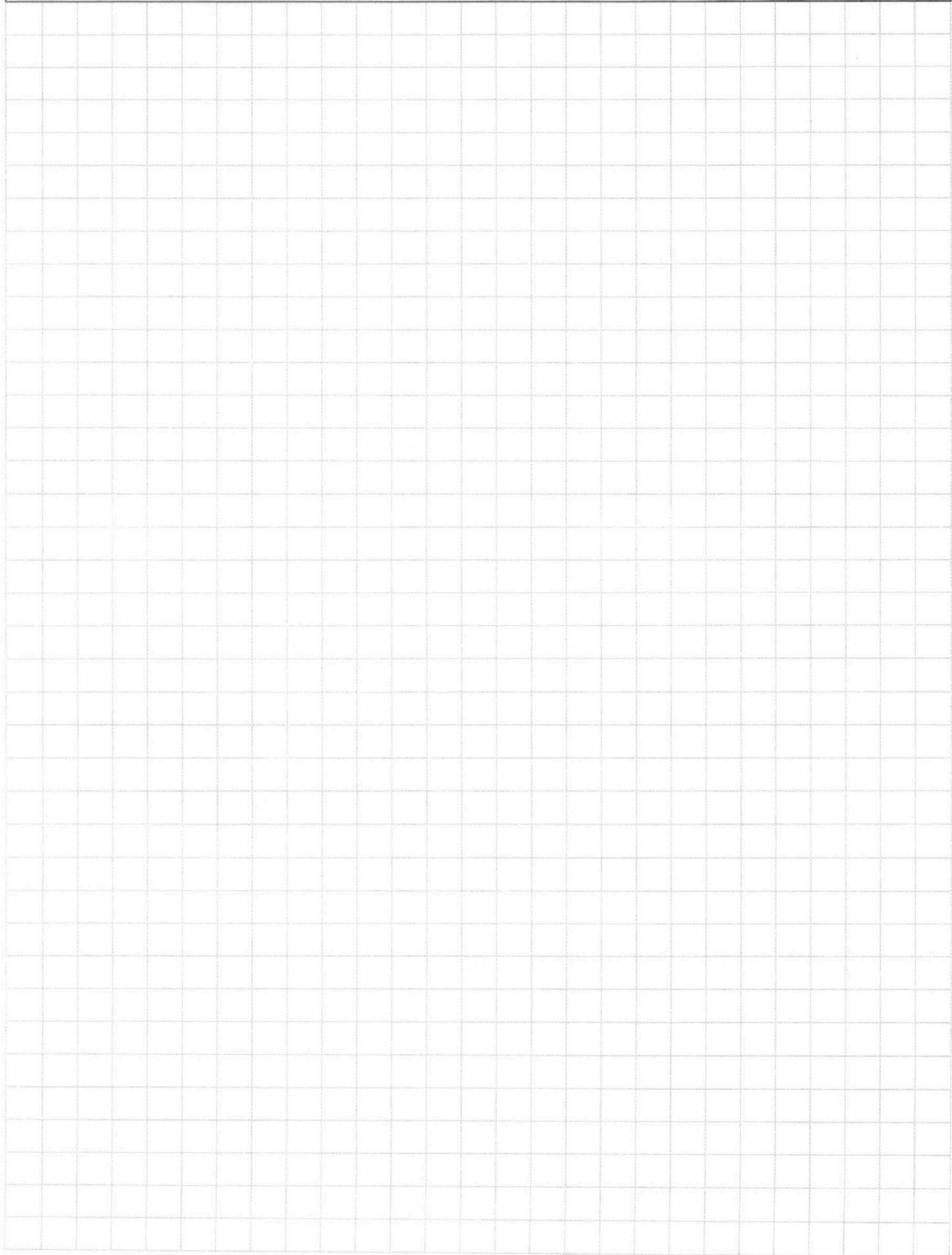
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

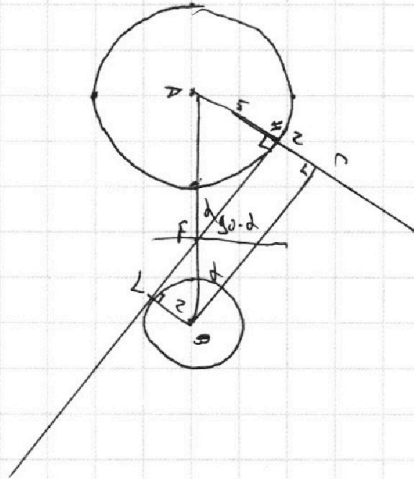
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Сколько будет иметь 4 решения, когда прямая будет
касаться 2-х ок-тей, ~~и т.д.~~

$$AB = 9. \quad AC = AH + HC = \\ = 5 + 2 = 7.$$



Заметим, что для нужной α мы всегда сможем найти
подходящий b , поскольку если прямая будет касательной
сразу к обеим ок-телям, то решений будет ≤ 3 , в любом
случае мы всегда можем "двинуть прямую" по α так, чтобы
было 4 решения. Каждый значению, для которого прямая является
одновременно касательной к обеим ок-телям. Проведем HL -касат.
к обеим ок-телям. Тогда продолжим AH за $(\cdot)H$ и проведем
 $BC \perp AH$. Поскольку $LB \parallel AH$, т.к. они $\perp HL$, то $HC = LB = 2$.

Тогда расстояние между ок-телями = $AB = 9$, $AC = 5 + 2 = 7$. Тогда

$$\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{81-49}} = \frac{5}{\sqrt{32}}. \quad \text{Поскольку } \angle AFM = \angle ABC = \alpha, \text{ то}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

