



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 1

~~abc = 2^{x\_1+x\_2+x\_3} \cdot 3^{y\_1+y\_2}~~

$$a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}$$

$$abc = 2^{x_1+x_2+x_3} \cdot 3^{y_1+y_2}$$

$$b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$$

$$c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$$

Тогда из условия попарно:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 7 & (1) \\ x_2 + x_3 &\geq 13 & (2) \\ x_1 + x_3 &\geq 14 & (3) \\ y_1 + y_2 &= 14 & (4) \\ y_2 + y_3 &\geq 15 & (5) \\ y_1 + y_3 &= 17 & (6) \\ z_1 + z_2 &\geq 14 & (7) \\ z_2 + z_3 &\geq 18 & (8) \\ z_1 + z_3 &\geq 13 & (9) \end{aligned} \right\}$$

$$x_1 + x_3 \geq 14 \quad (3)$$

$$y_1 + y_2 = 14 \quad (4)$$

$$y_2 + y_3 \geq 15 \quad (5)$$

$$y_1 + y_3 = 17 \quad (6)$$

$$z_1 + z_2 \geq 14 \quad (7)$$

$$z_2 + z_3 \geq 18 \quad (8)$$

$$z_1 + z_3 \geq 13 \quad (9)$$

П.к. содержимое в обе стороны 2, 3 и 5

не зависит друг от друга наименьшее значение

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \min_x & (1) & x_1 + x_2 + x_3 \geq 14 + x_2 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= \min_y \\ z_1 + z_2 + z_3 &= \min_z \end{aligned} \right.$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = \min_y$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = \min_z$$

$$(2) \Rightarrow x_3 \geq 13 - x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3) \Rightarrow x_1 + 13 - x_2 \geq 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \geq x_2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1) \Rightarrow x_2 + 1 + x_2 \geq 7$$

$$x_2 \geq 3$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1. Тогда  $x_1 + x_2 + x_3 \geq 13$  - достижимо  
(проверяем) при  $x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 0$

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 17 + y_2$$

$$\begin{aligned} \text{Из (4) } \Rightarrow y_1 &\geq 11 - y_2 \Rightarrow \text{(6) } 11 - y_2 + y_3 \geq 17 \\ \Rightarrow y_3 &\geq y_2 + 6 \Rightarrow \text{(5) } \Rightarrow 2y_2 + 6 \geq 15 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_2 \geq 5 \end{aligned}$$

Тогда  $y_1 + y_2 + y_3 \geq 17 + 5 = 22$  - достижимо

$$\text{при } y_1 = 6, y_2 = 5 \text{ и } y_3 = 11$$

$$z_1 + z_2 + z_3 \geq 43 + z_2$$

$$\text{(7) } \Rightarrow z_1 \geq 14 - z_2$$

$$\text{(8) } \Rightarrow 14 - z_2 + z_3 \geq 43 \Rightarrow z_3 \geq 29 + z_2$$

$$\text{(8) } \Rightarrow z_2 + 29 + z_3 \geq 18 \Rightarrow z_3 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 \geq 43 - \text{достигается при}$$

$$z_1 = 14$$

$$z_3 = 29, z_2 = 0$$

Тогда  $abc \geq 2^{13} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$  - достигается

$$\text{при } a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{14}, b = 2^3 \cdot 3^5 \text{ и } c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$$

$$\text{Ответ: } 2^{13} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

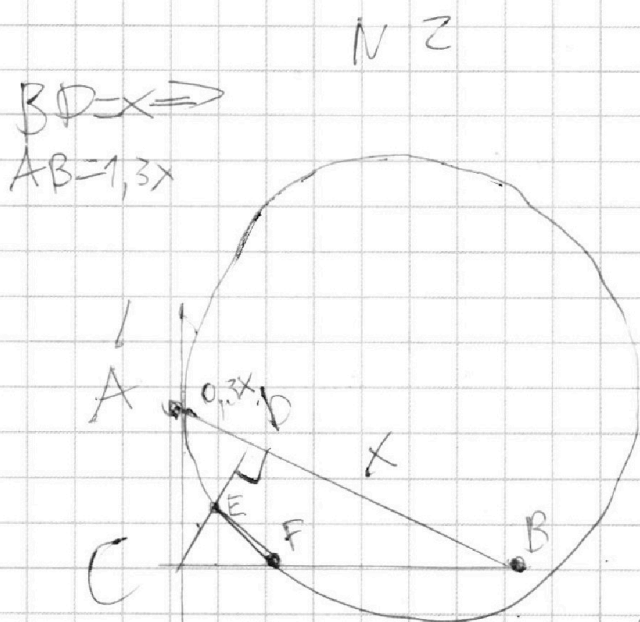
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CD = \sqrt{0,3x \cdot x} = \sqrt{0,3x}$$

— как высота

$$AC = \sqrt{0,89x^2 + 0,3x} = \sqrt{0,39x}$$

$$BC = \sqrt{0,3x^2 + x^2} = \sqrt{1,3x}$$

Пусть  $\angle CAE = \alpha$ ,  $\angle EAB = \beta - \alpha \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle AED = 90 + \alpha - \beta \Rightarrow \angle DEO =$

$$= \angle OEA - \angle AED =$$

$$\angle OAE - \angle AED =$$

$$= 90 - \alpha - 90 - \alpha + \beta = \beta - 2\alpha$$

$$\angle DEF = 90 = \angle EPB, \text{ м.к}$$

$$EF \parallel BD \Rightarrow$$

$$\angle OEF = 90 - \beta + 2\alpha \Rightarrow$$

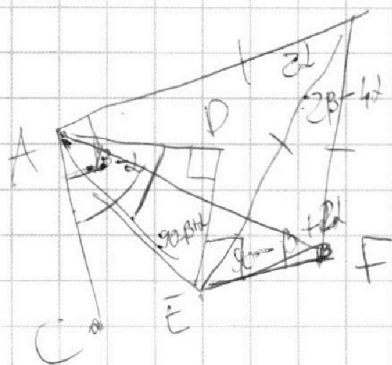
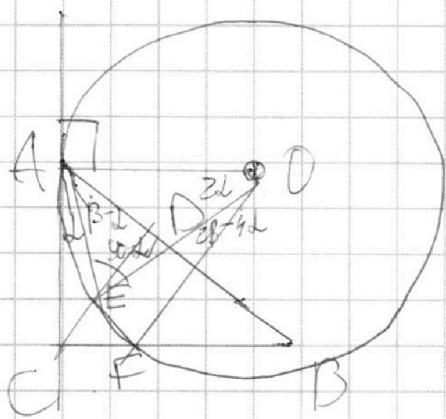
$$\Rightarrow \angle AOF = 180 - 2\angle OEF =$$

$$= 2\beta - 4\alpha \Rightarrow \angle AOF =$$

$$= 2\beta - 4\alpha + \angle OAE =$$

$$= 2\beta - 4\alpha + 180 - 2\angle AED =$$

$$= 2\beta - 4\alpha + 180 - 2(90 - \alpha)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

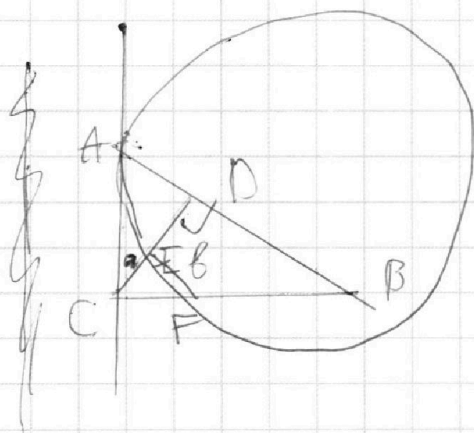


$N 2$  (продолжение)

$$= 2\beta - 2\alpha \Rightarrow \angle ADF = 2\beta - 2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle EAF = \frac{1}{2} \angle ADF = \beta - \alpha \Rightarrow$$

~~AF~~ исходными AF.  $\angle CAF = \angle EAD = \beta - \alpha$



$$\triangle EAD \sim \triangle CAF \Rightarrow$$

$$\frac{CF}{AC} = \frac{ED}{AD} \quad (1)$$

$$CE = a, FE = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CF = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CDB: \frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{0,39}x} = \frac{b}{0,3x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{0,3}b$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{0,39}x} = \frac{\sqrt{0,3}x - a}{0,3x}$$

$$\sqrt{1,3}b = \sqrt{0,3}(x - b) \sqrt{0,39}$$

$$(\sqrt{1,3} + \sqrt{0,3} \cdot \sqrt{0,39})b = \sqrt{0,3} \sqrt{0,39}x$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{0,39}x \cdot 0,3x}{\frac{1}{2}ab} = \frac{\sqrt{0,39}x \cdot 0,3x}{\sqrt{0,3}b^2}$$

$$= \frac{0,3 \cdot (\sqrt{1,3} + \sqrt{0,3} \cdot \sqrt{0,39})^2}{\sqrt{0,3} \cdot 0,39} = \frac{1,3^2}{0,3} = \frac{1,69}{3}$$

Ответ:  $\frac{16,9}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$N3: 5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$\arccos y \in [0, \pi] \Rightarrow 0 \leq \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \leq \pi$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \Rightarrow x - \frac{\pi}{2} \in [-2\pi, 3\pi]$$

$$I \text{ сл: } x - \frac{\pi}{2} \in [0, \pi] \Rightarrow \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = x - \frac{\pi}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow x = \pi - 4\varphi$$

$$II \text{ сл: } x - \frac{\pi}{2} \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = x - \frac{3\pi}{2}$$

$$x - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow x = \frac{9}{4}\pi - 4\varphi$$

$$III \text{ сл: } x - \frac{\pi}{2} \in [2\pi, 3\pi] \Rightarrow \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = x - \frac{5\pi}{2}$$

$$x - \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}x = \frac{28}{10}\pi \Rightarrow x = \frac{7}{2}\pi - 4\varphi$$

$$IV \text{ сл: } x - \frac{\pi}{2} \in [-2\pi, -\pi] \Rightarrow \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = x + \frac{3\pi}{2}$$

$$x + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}x = -1,2\pi \Rightarrow x = -\frac{3}{2}\pi - 4\varphi$$

$$V \text{ сл: } x - \frac{\pi}{2} \in [-\pi, 0] \Rightarrow \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{7}{2}\pi \right\} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

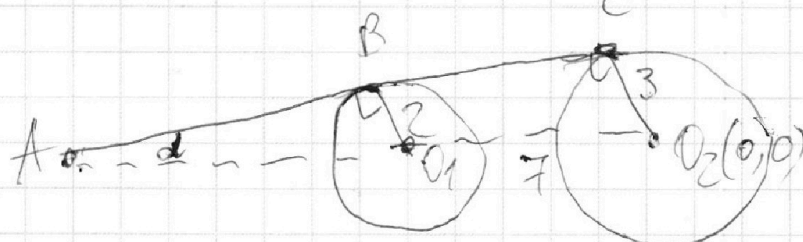


N 4 (продолжение)

Пусть  $i$ -то какое-то значение условной  
коэффициент  $k_i \Rightarrow$  При  $k > 0$ :  $k \in (k_3, k_1) \cup (k_1, +\infty)$

при  $k < 0$ :  $k \in (k_2, k_4) \cup (-\infty, k_2)$

Из симметрии  $\Rightarrow k_1 = k_2$ ;  $k_3 = -k_4$  Из геометрии



$$\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

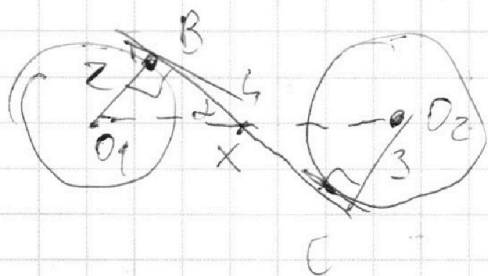
$$AO_1 = \frac{2}{3} AO_2 + \frac{2}{3} \cdot 7 \Rightarrow$$

$$AO_1 = 14$$

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{14^2 - 4}} = k_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{48}}$$

Из геометрии:  $\frac{O_1 X}{X O_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow$



$$O_1 X = \frac{2}{3} (7 - O_1 X)$$

$$O_1 X = \frac{14}{5} = 2,8$$

$$k_4 = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{\sqrt{2,8^2 - 4}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{0,96}} = -k_3$$

См. ответ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4: ПП.к.  $k = -\frac{1}{3a} \Rightarrow a \in (-\infty, -\frac{1}{3k}) \Rightarrow$   
(проверка)

$$\Rightarrow a \in (-\infty, -\frac{1}{3k}) \cup$$

$$\cup (-\frac{1}{3}k_1, -\frac{1}{3}k_3) \cup (-\frac{1}{3}k_4, -\frac{1}{3}k_2) \cup (-\frac{1}{3}k_2, +\infty)$$

Ответ:

$$a \in (-\infty, -\frac{\sqrt{18}}{3}) \cup (-\frac{\sqrt{18}}{3}, -\frac{\sqrt{0,96}}{3}) \cup$$

$$\cup (\frac{\sqrt{0,96}}{3}, \frac{\sqrt{18}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{18}}{3}, +\infty)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 4:  $\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 & (1) \\ ((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0 & (2) \end{cases}$

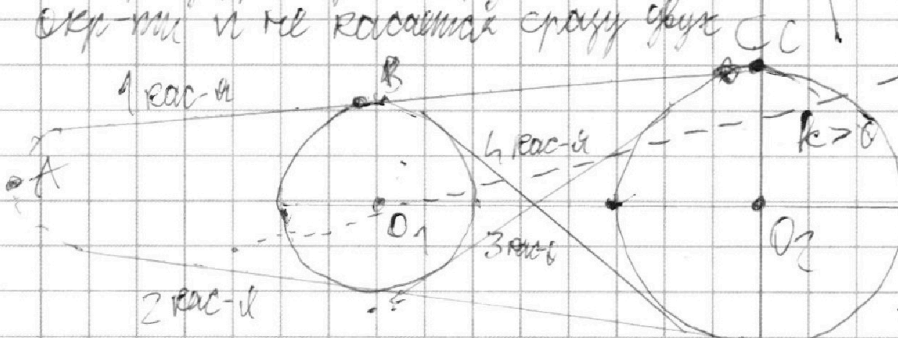
~~(1) - прямая с угл. к коор-ам  $= -\frac{1}{3a}$~~

(1)  $\Rightarrow \frac{1}{3a}x - \frac{7b}{3a} = y$  - прямая с  $k = -\frac{1}{3a}$ ,  
 а т.к.  $b \neq 0$ , то это ~~прямая~~ <sup>прямая</sup> ~~проходящая через~~ <sup>пересекающая</sup> ось  $Oy$

(2) -  $(x+7)^2 + y^2 = 4$  - окр-ть с центром в  $(-7, 0)$   
 и  $R = 2$

$x^2 + y^2 = 9$  - окр-ть с центром в  $(0, 0)$  и  $R = 3$

Построим эти окр-ти.  
 Запомним, что такое  $b \in \mathbb{R}$ ,  
 если прямая ~~касается~~ <sup>касается</sup> окруж-ти  
 ординату  $y$  ~~равна~~ <sup>равна</sup>  $\pm r$   
 окр-ти и не касается сразу двух



~~Пусто  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{R}$   $\Rightarrow$   $b \in \mathbb{R}$~~   
~~мы задаем  $b$~~   
 ~~$I \cap \mathbb{C} \neq \emptyset \Rightarrow$~~   
 ~~$-\frac{1}{3a} \geq 0$~~   
 ~~$\Rightarrow a < 0$~~   
 ~~$\Rightarrow k < -\frac{1}{3a} < 0$~~   
 ~~$\Rightarrow k < -\frac{1}{3a}$~~   
 ~~$\Rightarrow k < -\frac{1}{3a}$~~   
 ~~$\Rightarrow k < -\frac{1}{3a}$~~   
 ~~$\Rightarrow k < -\frac{1}{3a}$~~

Тогда прямая может ~~быть~~ <sup>быть</sup> ~~касательной~~ <sup>касательной</sup>  $k > 0$   
 или ~~касательной~~ <sup>касательной</sup>  $k < 0$

~~$\frac{1}{3a} \leq 0 \Rightarrow$~~   
 ~~$-\frac{1}{3a} \leq 0 \Rightarrow a < 0$~~   
 ~~$\Rightarrow a < 0$~~   
 ~~$\Rightarrow a < 0$~~   
 ~~$\Rightarrow a < 0$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 (продолжение)

Заметим, что  $g(-a) = f(a) \Rightarrow$

~~$b_1 \Rightarrow b_1 \neq a_2 = 0 \Rightarrow \log_7 b_1 + \log_7 y_1 = 0$~~   
 ~~$b_1 + b_2 = 0$~~   
 ~~$b_1 y_1 = 1 \Rightarrow x_2 y_1 = \frac{1}{6}$~~

~~$\log_7 b_1 + \log_7 y_2 = 0$~~

~~$b_1 y_2 = 1 \Rightarrow x_1 y_2 = \frac{1}{6}$~~

Заметим, что  $f'(a) = 4a^3 + \frac{3.5}{a^2} = 0$  при

$$a_0 = -\sqrt[5]{\frac{3.5}{4}} < 0$$

Заметим, что при  $a > 0$   $f(a)$  монотонно  
и возрастает от  $-\infty$  до  $+\infty \Rightarrow$  имеет 1

корень. При  $a = 0$   $f(a)$  ~~не~~ ~~используем~~

~~при  $a$  от  $(-\infty, a_0)$  и возрастает~~

при  $a \in (a_0, 0) \Rightarrow$  если  $f(a_0)$ , то

при  $a < 0$   $f(a) > 4 > 0 \Rightarrow$  корней  
не имеет.

Сл-но  $f(a)$  имеет один корень, а м.к.

$f(a) = g(-a)$ , но  $g(b)$  тоже, причем  $xy = 0$

Тогда  $\log_7 6x + \log_7 y = \log_7 6xy = 0 \Rightarrow 6xy = 1$   
 $xy = \frac{1}{6}$

Ответ:  $xy = \frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5:

$$\log_7^4 6x - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x} 2^{343} - 4$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_y 2(7)^4 - 4$$

$xy = ?$

$$\log_7 6x = a \Rightarrow \begin{cases} a^4 - \frac{2}{a} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{a} - 4 \end{cases}$$

$$\log_7 y = b \Rightarrow \begin{cases} b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2b} - 4 \end{cases}$$

$$\log_{6x} 7 = \frac{1}{a}$$

$$\log_y 7 = \frac{1}{b}$$

$$a^4 - \frac{3,5}{a} + 4 = 0 = f(a) = 0$$

$$b^4 + \frac{3,5}{b} + 4 = 0 = g(b) = 0$$

$$f(a) - g(b) = a^4 - \frac{3,5}{a} + 4 - b^4 - \frac{3,5}{b} + 4 = 0$$

$$= (a-b)(a+b)(a^2+b^2) - \frac{3,5(a+b)}{ab} = 0$$

$$f(a) = 4a^3 + \frac{3,5}{a^2} = 0 \Rightarrow \text{одна экстремум}$$

$$a = \sqrt[5]{\frac{3,5}{4}} \Rightarrow \text{п.к.}$$

$f(\frac{1}{2}) < 0$ , а  $a^4 > \frac{3,5}{4}$  при больших  $a$ ,  
то  $f(a)$  ровно 2 корня  $a_1, a_2$   
Аналогично у  $g(b)$  - 2 корня  $b_1, b_2$

ОДЗ:

~~...~~

$y \neq 1$

$x > 0$

$x \neq 1$

$y > 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6: Заметим, что  $\Gamma \text{MT}$  — почка  $B(x_2, y_2)$  от  $A(x_1, y_1)$ , так как, так что  $4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$  — ромб

с сторонами 10 и 40. На его границе, перпендикулярным  $OA$  содержится  $\frac{40}{\left(\frac{4}{1}\right)} = 40$

$= 40$  различных почек  $B \in \mathbb{Z}^2$  с целочисленными координатами

Заметим, что 2 стороны ромба  $\parallel$  2 сторонам  $\parallel$ -угол

т.к.  $\frac{4}{1} \leftarrow \frac{68}{17}$  — обозначим их за I и II

Заметим, что длина стороны  $\square$  — длина  $|10x - 19$

II  $x: 10 < 19 < 20$ . Тогда ~~сразу~~ ~~много~~, ~~много~~

III сторона полностью выйдет за пределы параллелограмма, а концы ~~в~~ ~~на~~ ~~стороне~~

будет ~~рассчитывать~~ как одна ~~сторона~~ ~~не~~ ~~полностью~~ ~~будет~~ ~~внутри~~ ~~параллелограмма~~

$A(x_1, y_1) \in \mathbb{Z}^2$  тогда  $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq 68 \\ \dots \end{array} \right.$  т.к. ~~внутри~~ ~~параллелограмма~~

$B(x_2, y_2) : \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_2 \leq 68 \\ \dots \end{array} \right.$

$0 \leq x_2 \leq 68$

$-\frac{4}{4}x_2 \leq y_2 \leq -\frac{1}{4}(x_2 + 40)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 6



~~$$y_2 = \frac{1}{4}(x_2 - x_1 - 10)$$~~

~~$$y_2 = -\frac{1}{4}(x_2 - x_1 - 10)$$~~

~~$$y_2 = \frac{1}{4}(x_2 - x_1 + 10)$$~~

~~$$y_2 = \frac{1}{4}(x_2 - x_1 - 10)$$~~

Углы → я  
смонти  
решить



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*Черновик*

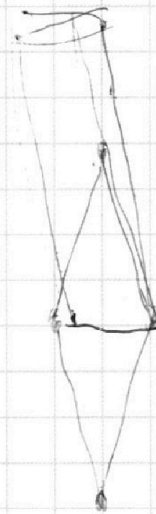
$$y_1 > -\frac{1}{4}x_1$$

$$y_1 < -\frac{1}{4}x_1 + 19$$

$$0 < x_1 < 68$$

$$y_2 = -\frac{1}{4}x_2 - 4.0$$

$$y_2 = -\frac{1}{4}x_2 + 4.0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

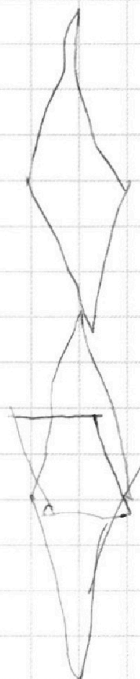
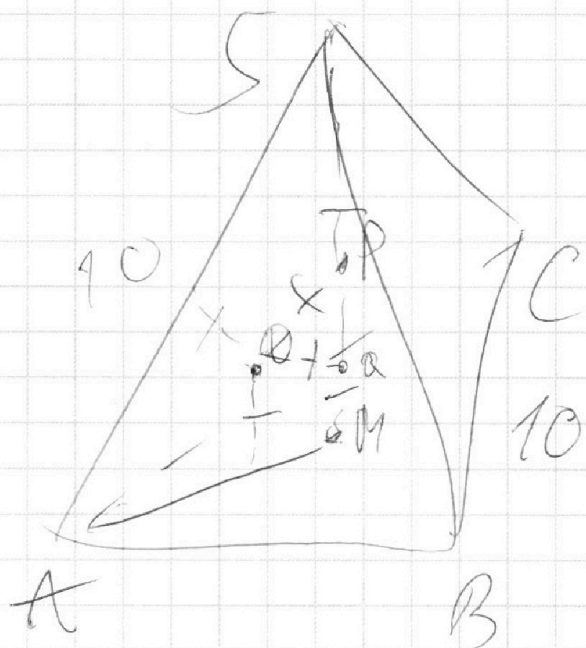
- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

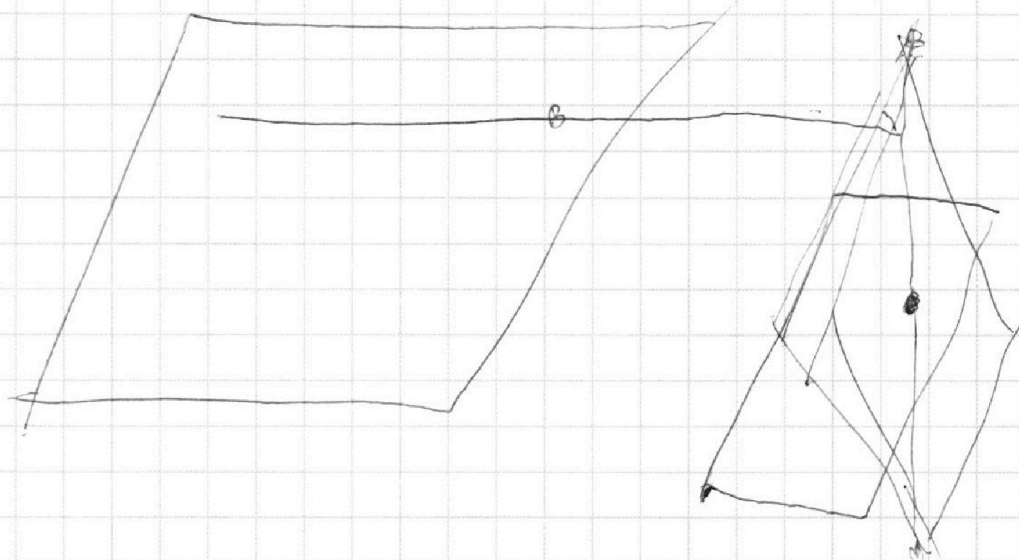
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*Черновик*



*№ 0*



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$90 - \alpha - (90 - \beta + \gamma) = \beta - \alpha$$

~~$$a_1^2 + 2b^2 = c^2$$~~

$$a^5 + 4a - 3,5 = 0$$

$$(a_1 + a_2)(a_1^2 + a_2^2) = \frac{+3,5}{a_1 a_2}$$

$$\frac{68}{17} = 4$$

$$b + a_1$$

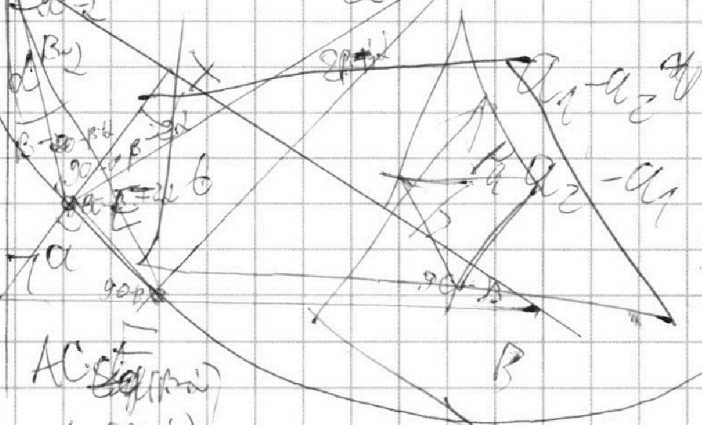
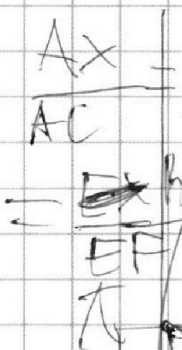
$$a_1 a_2 = 0$$

$$a_1 a_2$$

$$-a_1 - a_2$$

$$2a_2 + 4 + 2a_1$$

$$\left(\frac{1}{2} + 2\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + 3,5$$



$$19 - 10 = 11$$

$$(a_1 - a_2)$$

$$C \quad AC \cdot \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin \beta}$$

$$F(a) = a^5 - \frac{3,5}{a} + 4 = 0$$

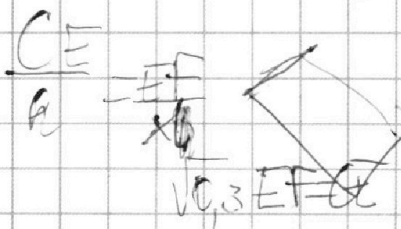
$$a_1^4 - a_2^4 + 3,5(a_1 a_2) = 0$$

$$90 - \alpha + x = 180 - \beta + \gamma$$

$$x = 90 - \beta + \gamma$$

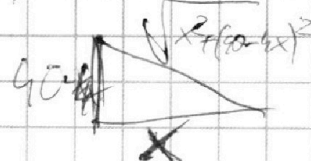
$$-a_1^4 - \frac{3,5}{a_1} + 4 = 0$$

~~$$a_1^2 + 2b^2 = c^2$$~~



$$a_2^4 - \frac{3,5}{a_2} + 4 = 0$$

$$x_2 - x_1 + 4 \frac{a_2}{2} - 4$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

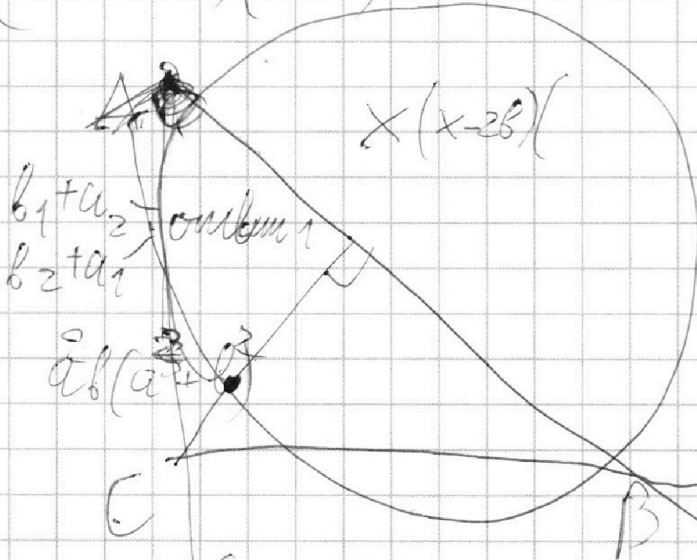
- 1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a^2b - ab^2)(a^2 + b^2) = a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 - 3,5$$

$$a+b = \log_7 6xy =$$



$$a^4b^4 - \frac{3,5}{a} - \frac{3,5}{b} = 0$$

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2) =$$

$$\frac{1}{2} 0,3x \cdot 0,3$$

$$\frac{3,5(a+b)}{ab} = 0$$

$$(a+b) \left\{ \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \end{array} \right.$$

$$b - \frac{5}{2} = 3,5$$

$$\log_7 26x = a$$

$$a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3,5}{20a_1} - 4$$

$$4a^3 + \frac{3,5}{a^2} = 0$$

$$a^4 - \frac{3,5}{a} + 4 = 0$$

$$a^5 - 3,5 = 0 \quad a^5 + 4a - 3,5 = 0$$

$$\frac{5}{2} 0,3x = 2 \quad b^4 + \frac{5}{2b} = \frac{5}{2b} - 4$$

1,96 -

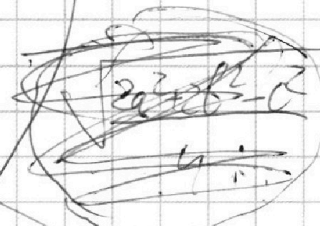
$$\left\{ \begin{array}{l} b^4 - \frac{3,5}{a} + 4 = 0 \\ b^4 + \frac{3,5}{b} + 4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\log_7 6x$$

$$(a+b)(a-b)$$

$$ab(a-b)(a^2+b^2) =$$

$$= a^3 - a^2$$



В черновом

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

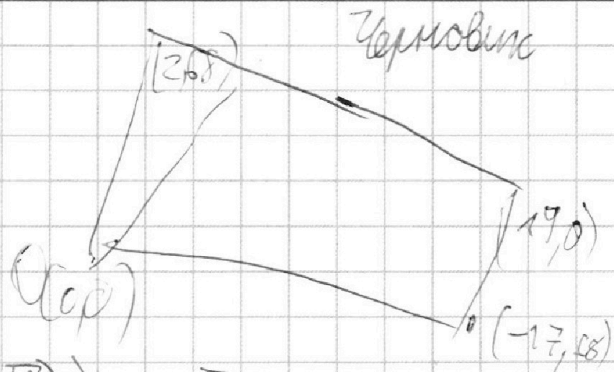
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

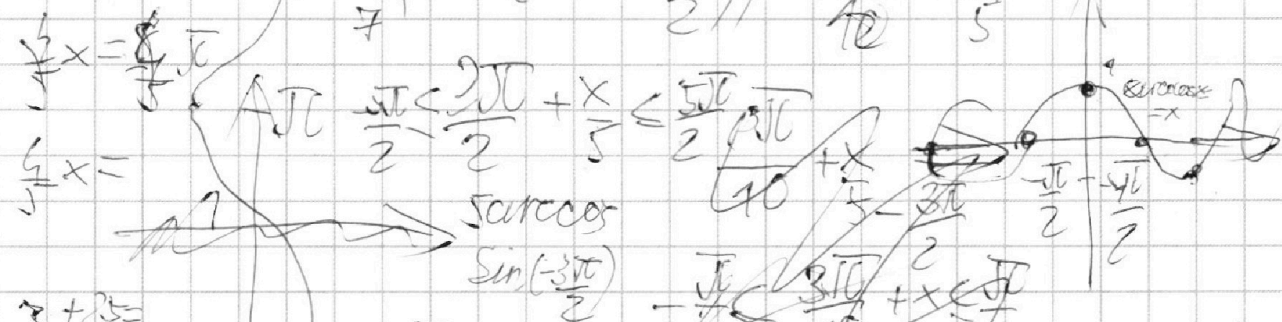
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N1: \begin{matrix} ab: & 2 & 7 & 3^{11} & 5^{14} \\ bc: & 2 & 13 & 3^{15} & 5^{18} \\ ac: & 2 & 14 & 3^{17} & 5^{43} \end{matrix}$$



$$N3: \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = \frac{3\sqrt{10}}{10} + \frac{x}{5}$$



$3 + 23 =$

$\frac{5}{5}x =$

$$I_{ab}: x - \frac{\pi}{2} \leq 0$$

$$x = \frac{14}{5} = \frac{7}{2}$$

$$3 - 15 =$$

$$-\frac{18\sqrt{10}}{10} \leq x - \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

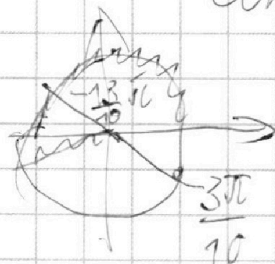
$$\arccos(\cos 2\pi) = 0$$

$$\frac{4x}{5} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$0 \leq \frac{3\sqrt{10}}{10} + \frac{x}{5} \leq \sqrt{10}$

$$x \geq -\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$\frac{6}{5}$$



$$6\sqrt{10} \geq x \geq -6\sqrt{10}$$

$$x = 2\pi$$

$$\arccos(\cos \frac{3\pi}{2})$$

$$= \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{7\sqrt{10} - \sqrt{10}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$\frac{x}{5} \leq \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$x \leq \frac{7\sqrt{10}}{2}$$

$$\frac{4x}{5} + \sqrt{10} \geq \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$x = \frac{3\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \arccos(\cos 2\pi) = \pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 + x_2$$

~~11/2~~

$$x_3 \geq 13 - x_2$$

$$x_1 + 13 - x_2 \geq 14$$

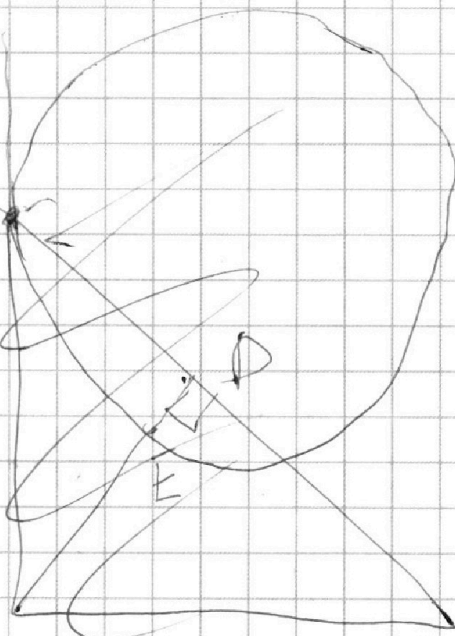
$$x_1 \geq 1 + x_2$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow$$

$$x_1 = 4$$

$$x_3 = 10.$$



№1:

Черновик

$$a = 5x$$

$$b = 5y$$

$$c = 5z$$

$$x + y \geq 14$$

$$x + z \geq 18$$

$$x + z \geq 43$$

$$x + y + z = \min$$

$$43 - z + y \geq 14$$

$$y \geq 14 - 43 + z$$

$$z + 14 - 43 \geq 18$$

$$g \quad ((x^2 + y^2) + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

~~11/2~~

$$z \geq \frac{47}{2} =$$

$$y_2 = 5$$

$$y_1 = 6$$

$$y_3 = 11$$

$$z = 14 - 5 = 9$$

$$x \geq 14 - y$$

$$14 - y + z \geq 43$$

$$z = 24 \Rightarrow$$

$$z = 24 \Rightarrow$$

$$x = 43 - 24 =$$

$$\frac{1}{5}x = -\frac{1}{5}\sqrt{5} \quad 43 -$$

$$x = -\sqrt{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

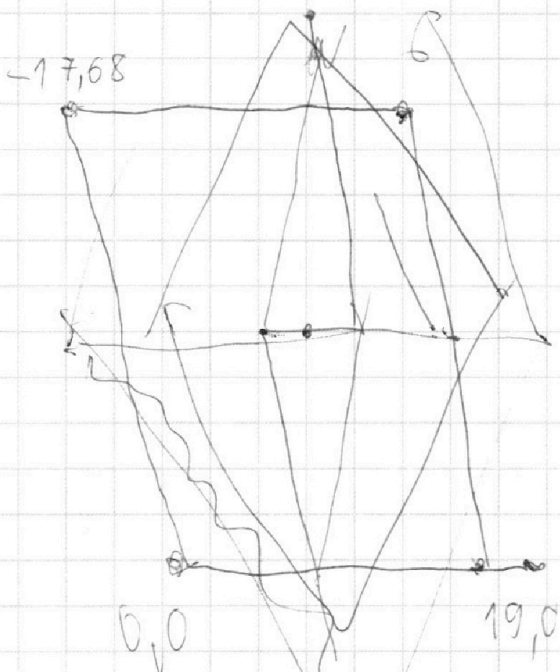
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик.



$$a^4 - \frac{3,5}{a} + 4 = 0$$

$$(a+b)^4 - \frac{3,5}{a+b} + 4 = 0$$

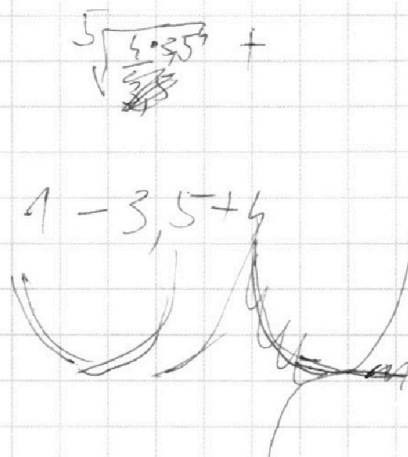
$$4a^3 + \frac{3,5}{a^2} = 0$$

$$a = \sqrt[5]{\frac{3,5}{4}}$$

$$\sqrt{1,3} = 0,3$$

$$\frac{(\sqrt{1,3} - 1,3)^2}{0,39} = \frac{1,3^2}{0,3}$$

$$\in \left( \frac{1}{2}, \frac{4}{3} \right)$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

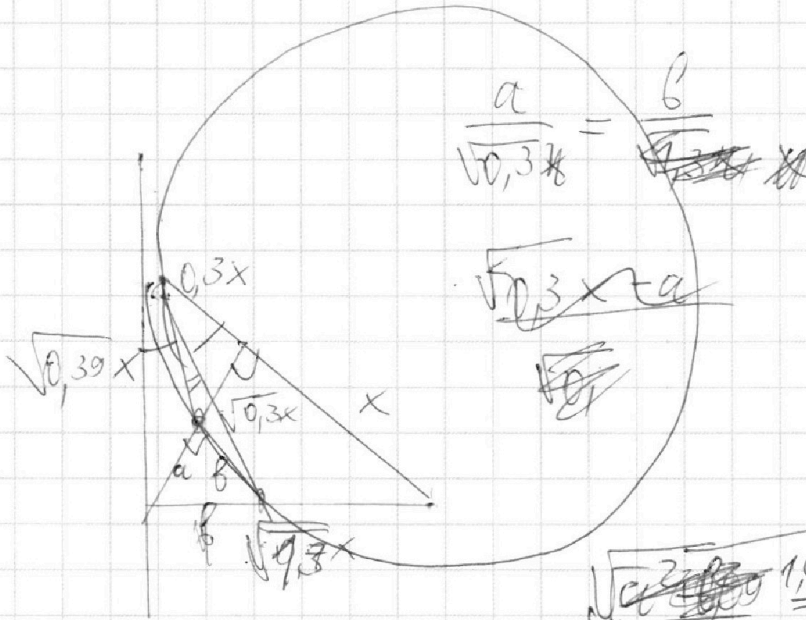
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*Черновик*



$$\frac{a}{\sqrt{0,3x}} = \frac{b}{\sqrt{0,3x}}$$

$$\sqrt{0,3x} = a$$

$$\frac{\sqrt{1,09a^2}}{\sqrt{0,39x^2}} = \frac{\sqrt{0,3x-a}}{0,3x}$$

$$\frac{1,09a^2 \cdot 0,09}{0,39} =$$

$$\frac{0,3x \cdot \sqrt{0,3x}}{\sqrt{0,39x^2}}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   2   3   4   5   6   7
- 



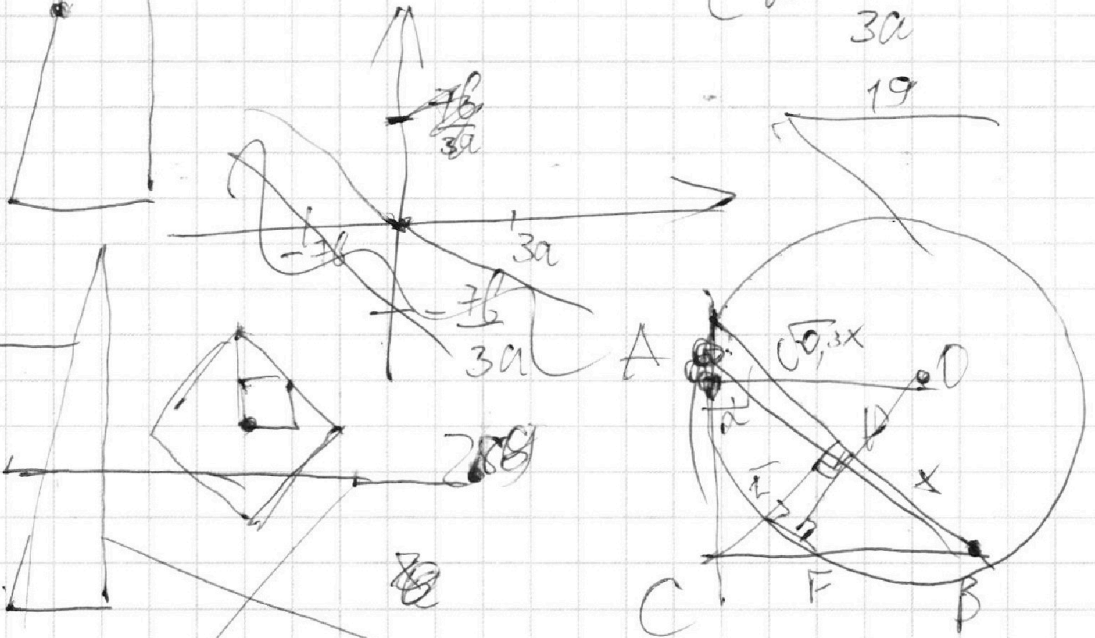
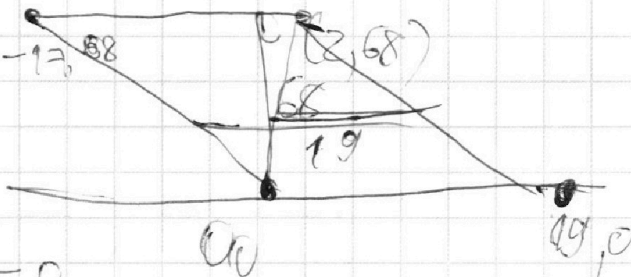
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*Черновик*

$$\frac{x}{-19} + \frac{y}{\frac{-76}{3a}} + 1 = 0$$

$$-1x + 76 = y \quad \text{— прямая}$$

$$k = -\frac{1}{3a}$$

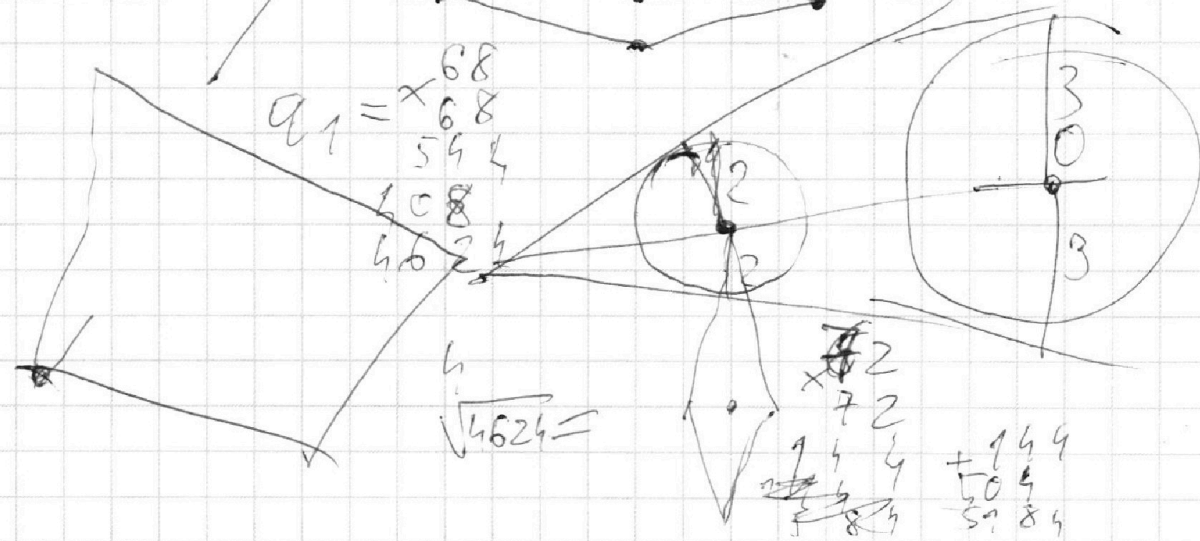


$$a_1 = x \begin{array}{l} 68 \\ 68 \\ 594 \\ 608 \\ 6624 \end{array}$$

$$\sqrt{4624} =$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 2 \\ 72 \\ 144 \\ 608 \\ \hline 5984 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 144 \\ 608 \\ \hline 5984 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



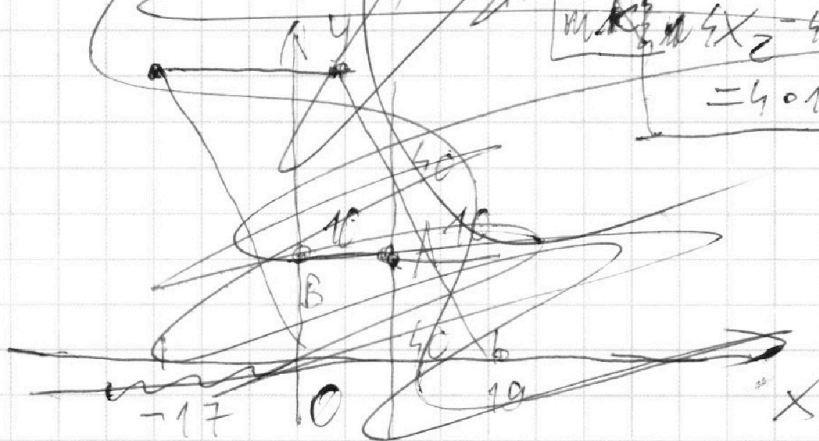
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~№6: Заметим, что  $MM$  - высота, опущенная  
из  $A(x_1, y_1)$  на прямую, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$  -~~

~~- выглядит как ромб с одной из диагоналей  
40 и 10. Заметим, что высота  $MM$  -~~

~~расстояние между двумя точками  $M$  и  $M'$  равно  $10$  (или  $10/2$ )~~

~~Заметим, что расстояние между двумя  
точками  $M$  и  $M'$  по оси  $Ox = 19$  ~~или~~  $10 \leq 10/2$  ~~или~~  $10 \leq 10/2$   
Значит, точки  $A$  и  $B$  существуют  $B$   
тоже, что  $AB = 10$ ,  $AB \parallel Ox \Rightarrow$  точки  $A$  и  $B$  находятся~~



Черновик