МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

Пусть $a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}\cdot k_1$, $b = 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}\cdot k_2$, $c = 2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}\cdot 5^{\gamma_3}\cdot k_3$, где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, а $k_i \in \mathbb{N}$ и НОД$(k_i, 30) = 1$. Тогда из условия: $ab \,\vdots\, 2^6$, $bc \,\vdots\, 2^{14}$, $ac \,\vdots\, 2^{16} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 \geq 6 \\ \alpha_2+\alpha_3 \geq 14 \\ \alpha_3+\alpha_1 \geq 16 \end{cases}$

Тогда: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 18$. Из условия, что $ab \,\vdots\, 3^{13}$, $bc \,\vdots\, 3^{21}$, $ac \,\vdots\, 3^{25} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\beta_2 \geq 13 \\ \beta_2+\beta_3 \geq 21 \\ \beta_3+\beta_1 \geq 25 \end{cases} \Rightarrow \beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq \frac{59}{2}$

т.к. $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \Rightarrow \beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 30$.

Из условия, что $ac \,\vdots\, 5^{28} \Rightarrow \gamma_1+\gamma_3 \geq 28$.

Итак: $a\cdot b\cdot c = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}\cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}\cdot k_1\cdot k_2\cdot k_3 \geq$
$\geq 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}\cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \geq 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$

Осталось привести пример: $a = 2^4\cdot 3^9\cdot 5^{13}$
$b = 2^2\cdot 3^5$
$c = 2^{12}\cdot 3^{16}\cdot 5^{15}$

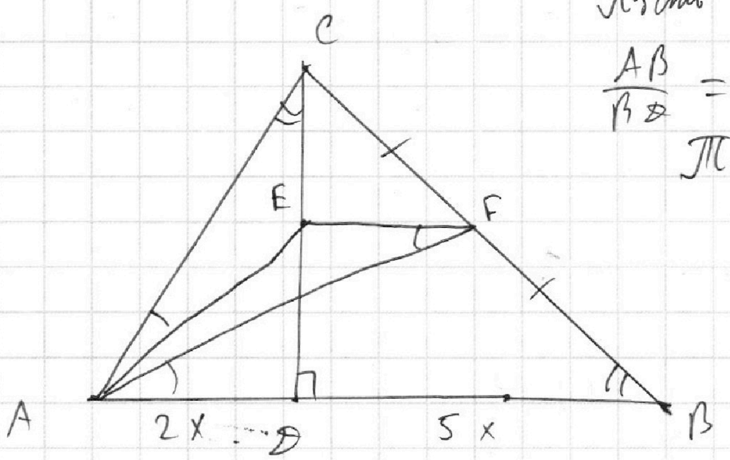
Ответ: $2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Пусть $AB = 7x$. Т.к. $\frac{AB}{BD} = 1{,}4 \Rightarrow AD = 2x$, $BD = 5x$

Т.к. AC – касательная $\Rightarrow \angle CAE = \angle EFA$

Т.к. $EF \parallel AB \Rightarrow \angle EFA = \angle FAB$

Тогда $\angle CAE = \angle FAB$. $\angle CBD + \angle DCB = 90^\circ$, $\angle DCB + \angle ACD = 90^\circ \Rightarrow \angle ACD = \angle CBD \Rightarrow$ $\triangle ACE \sim \triangle AFB$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BF}$.

Т.к. $\triangle ACD \sim \triangle ACB$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow$ $AC^2 = AD \cdot AB \Rightarrow AC = \sqrt{14}\,x$. Аналогично $CB^2 = BD \cdot AB$, $CB = \sqrt{35}\,x$. $\frac{CE}{BF} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{14}\,x}{7x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

Т.к. $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow$ $CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{10}\,x$. Т.к. $EF \parallel BD \Rightarrow$ $\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB} = \frac{\sqrt{10}\,x}{\sqrt{35}\,x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$. $\frac{CF}{BF} = \frac{\frac{CE}{BF}}{\frac{CE}{CF}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}} = 1$

Тогда $CF = BF = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{35}}{2}x$. $\triangle ACD \sim \triangle ECF$ по 2 углам ($\angle CEF = 90^\circ$ т.к. $EF \parallel AB$, $\angle CFE = \angle CBA = \angle ACD$, т.к. $EF \parallel AB$). Тогда: $\frac{S_{ACD}}{S_{ECF}} = \left(\frac{AC}{CF}\right)^2 = \frac{14x^2 \cdot 4}{35x^2} = \frac{8}{5}$

Ответ: $\frac{8}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Т.к. $\arccos x \in [0; \pi] \Rightarrow$ если x – решение

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$, то $9\pi - 2x \in [0; 10\pi]$

Это равносильно $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$

Воспользуюсь равенством: $\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$:

$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 2x - 10(\arcsin(\sin x)) = 4\pi$

1) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x, \Rightarrow -8x = 4\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$

2) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = \pi - x \Rightarrow 2x - 10(\pi - x) = 4\pi \Rightarrow$

$12x = 14\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{3\cdot 2} = \frac{7\pi}{6}$

3) $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x - 2\pi \Rightarrow 2x - 10(x - 2\pi) = 4\pi \Rightarrow$

$8x = 16\pi \Rightarrow x = 2\pi$

4) $x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = 3\pi - x \Rightarrow 2x - 10(3\pi - x) = 4\pi \Rightarrow$

$12x = 34\pi \Rightarrow x = \frac{17}{6}\pi$

5) $x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x - 4\pi \Rightarrow 2x - 10(x - 4\pi) = 4\pi$

$8x = 36\pi \Rightarrow x = \frac{9\pi}{2}$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{7\pi}{6}$, $x = 2\pi$, $x = \frac{17\pi}{6}$, $x = \frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

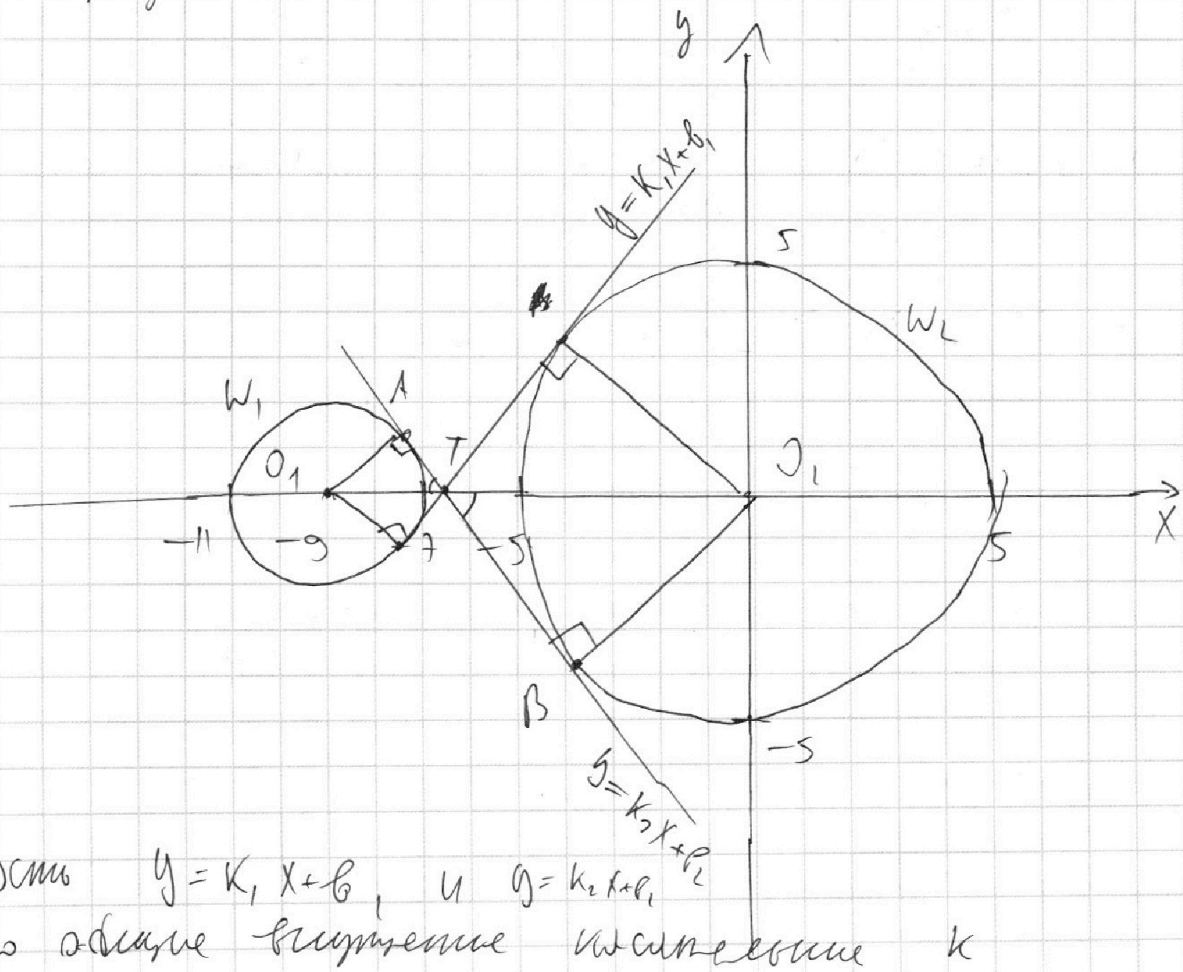
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Сделаю замену переменных $x \Leftrightarrow y$. При такой замене, количество решений не изменится. Тогда:

$$\begin{cases} y = \frac{b}{5} - 1{,}2ax \\ (x^2+y^2-25)((x+9)^2+y^2-4)=0 \end{cases}$$

Второе уравнение на координатной пл-ти xy представляет собой две окр-ти:



Пусть $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ это общие внутренние касательные к этим двум окружностям. Чтобы наша система имела ровно 4 решения при каком-то b, необходимо и достаточно, чтобы ~~…~~ $-1{,}2a \in (k_2; k_1)$

~~Заметим, что эти окружности симметричны относительно оси OX, поэтому общие касательные~~ Заметим, что верхняя и нижняя касательные симметричны, поэтому пересечение общих внешних касательных лежит на прямой OX. Пусть левая окр-ть это w_1, ее центр O_1, а правая w_2, ее центр O_2. Пусть прямая $y=k_2x+b_1$ пересекает w_1 в точке A, w_2 в точке B, ось OX в точке T. Тогда $\triangle O_1AT \sim \triangle O_2BT$ по 2 углам. $\Rightarrow \frac{O_1T}{O_2T}=\frac{O_1A}{O_2B}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{2}{5}$. $O_1T+O_2T = O_1O_2 = 9 \Rightarrow O_1T=\frac{18}{7}$, $O_2T=\frac{45}{7}$. Пусть $\angle ATO_1=\alpha$ ~~tg α =~~ $AT=\sqrt{O_1T^2-O_1A^2}=\sqrt{\left(\frac{18}{7}\right)^2-4}=\frac{8\sqrt{2}}{7}$. Тогда $tg\,\alpha=\frac{2}{\frac{8\sqrt{2}}{7}}=\frac{7}{4\sqrt{2}}$

~~k_2 это~~ У уравнения $y=k_2x+b_1$, k_2 по модулю равен $tg\,\alpha \Rightarrow k_2=-\frac{7}{4\sqrt{2}}$. Из симметрии $k_1=\frac{7}{4\sqrt{2}} \Rightarrow -1{,}2a\in\left(-\frac{7}{4\sqrt{2}};\frac{7}{4\sqrt{2}}\right)$

$a\in\left(-\frac{35}{24\sqrt{2}};\frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$. Ответ: $a\in\left(-\frac{35}{24\sqrt{2}};\frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Преобразуем первое: $\log_{11}^4 x - 6\cdot\frac{1}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3\cdot\log_{11} x} - 5$

Сделаем замену: $\log_{11} x = a$: $a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \;\Big|\cdot 3a$

$3a^5 + 15a = 16$. Преобразуем второе:

$\log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} = -\frac{13}{3\cdot\log_{11} 0,5y} - 5$

Сделаем замену: $\log_{11} 0,5y = b$:

$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5 \;\Big|\cdot 3b$: $3b^5 + 15b = -16$

Рассмотрим функцию $f(t) = 3t^5 + 15t$

$f'(t) = 15t^4 + 15 > 0 \Rightarrow f(t)$ — возрастает.

Также заметим, что $f(t) = -f(-t) \Rightarrow$ $f(t)$ — нечетная. Т.к. $f(t)$ монотонно возрастает, то решение уравнения $f(t) = 16$ ровно 1 (оно существует, т.к. $f(t)$ — многочлен нечетной степени). Аналогично $f(t) = -16$ имеет ровно одно решение. Пусть a_0 — решение $f(t) = 16$. Т.к. $f(t)$ — нечетная, то $f(-a_0) = -16 \Rightarrow -a_0$ — решение $f(t) = -16$.

Тогда: если x и y решение системы, то $a = -b \Rightarrow \log_{11} x = -\log_{11} 0,5y \Rightarrow$ $\log_{11} 0,5xy = 0 \Rightarrow 0,5xy = 1 \Rightarrow xy = 2$ Ответ: 2

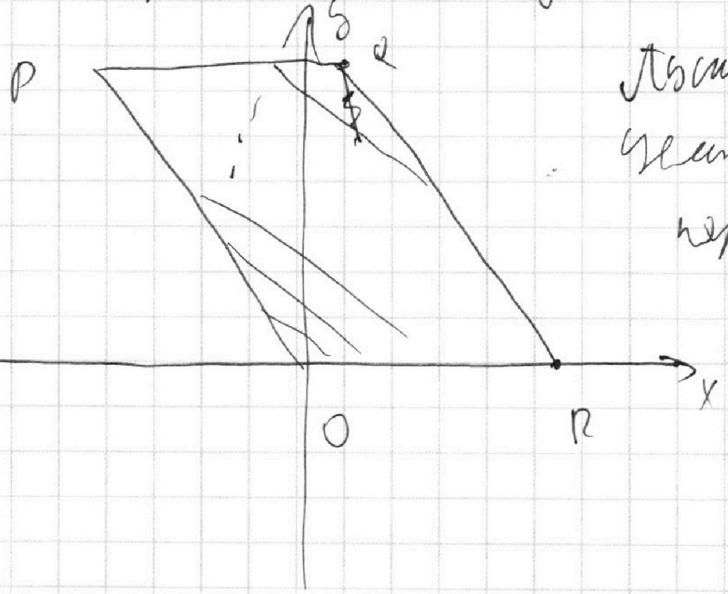
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть точка A лежит на прямой $y = b_1 - 6x$. Тогда чтобы условие выполнялось, точка B должна лежать на прямой $y = 48 + b_1 - 6x$. Тогда разобьем пар-м на прямые вида $y = -6x + c$.



Пусть S_i – площадь части пар-ма на прямой $y = i - 6x$. Тогда

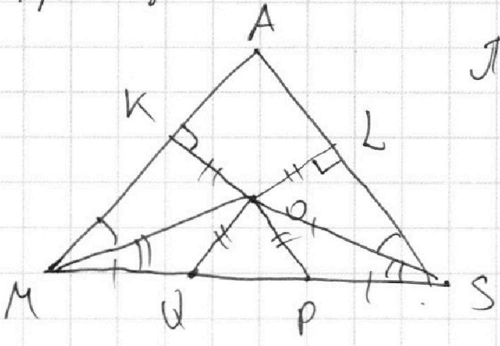
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

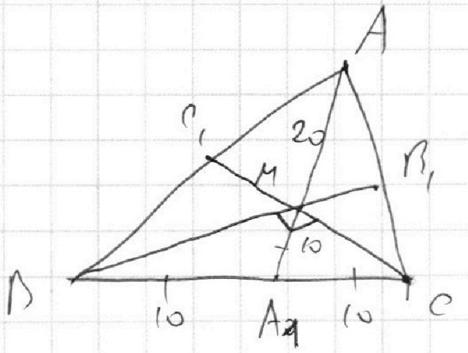
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть O — центр сферы Ω. Рассмотрим проекцию точки O на пл-ть SAM:



Т.к. $OL = OK = OP = OQ$ как радиусы сферы $\Rightarrow$ $O_1K = O_1L = O_1P = O_1Q$ $\Rightarrow$ $\triangle O_1QP$ — р/б $\Rightarrow$ $\angle O_1QP = \angle O_1PQ \Rightarrow \angle O_1QM = \angle O_1PS \Rightarrow$ $\triangle MQO_1 = \triangle SPO_1$ по 2 сторонам и углу между ними $\Rightarrow \angle O_1MQ = \angle O_1SP$. $\triangle MKO_1 = \triangle SLO_1$ по катету и гипотенузе $\Rightarrow \angle KMO_1 = \angle LSO_1 \Rightarrow$ $\angle AMS = \angle ASM \Rightarrow AM = AS = 20$. Теперь рассмотрим пл-ть ABC:



Т.к. M — т. перес. медиан $\Rightarrow$

$\frac{AM}{MA_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow MA_1 = 10$

Тогда в $\triangle AMC$ медиана равна половине стороны $\Rightarrow \angle BMC = 90°$. Опустим высоту AH на BC. Тогда: $S_{ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2} = 180$

$AH = \frac{360}{BC} = \frac{360}{20} = 18$. Опустим высоту MH_1 на BC, тогда $\triangle A_1MH_1 \sim \triangle A_1AH \Rightarrow \frac{MH_1}{AH} = \frac{A_1M}{AA_1} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Тогда $MH_1 = 6$. $S_{BMC} = \frac{BM \cdot MC}{2} = \frac{MH_1 \cdot BC}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

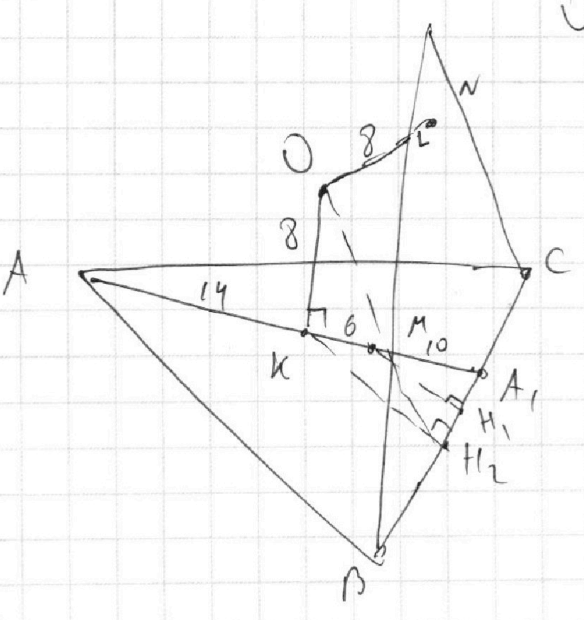
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Тогда $BM\cdot MC = MH_1\cdot BC = 20\cdot 6 = 120 \Rightarrow AM\cdot BM\cdot CM =$
$= 120\cdot 20 = 2400$ $AA_1 = \frac{3}{2}AM$, $BB_1 = \frac{3}{2}BM$, $CC_1 = \frac{3}{2}CM \Rightarrow$
$AA_1\cdot BB_1\cdot CC_1 = \frac{27}{8}\cdot AM\cdot BM\cdot CM = \frac{27\cdot \cancel{2400}^{300}}{\cancel{8}} = 8100.$

$6 = SN = SL$ как отрезки касательных $\Rightarrow AL = AS - SL =$
$= 14$. $AL = AK$ как отрезки касательных,
поэтому: $KM = AM - AK = 6$. Т.к.
$ON = OK = 8$ как радиусы, то $O \in$
бис. пл-ти двугранного угла при ребре BC.



Опустим высоту KH_2 на BC. $\Delta A_1KH_2 \sim \Delta A_1MH_1$ т.к. $MH_1 \parallel KH_2$

Тогда: $\frac{10}{16} = \frac{MH_1}{KH_2} \Rightarrow$
$KH_2 = \frac{16\cdot 6}{10} = \frac{48}{5}$

Т.к. $OK \perp ABC \Rightarrow$
$OK \perp KH_2$. По

теореме о трех перпендикулярах: $OH_2 \perp BC$. Пусть
$\angle OH_2K = \alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{OK}{KH_2} = \frac{8}{\frac{48}{5}} = \frac{8\cdot 5}{48} = \frac{5}{6}$

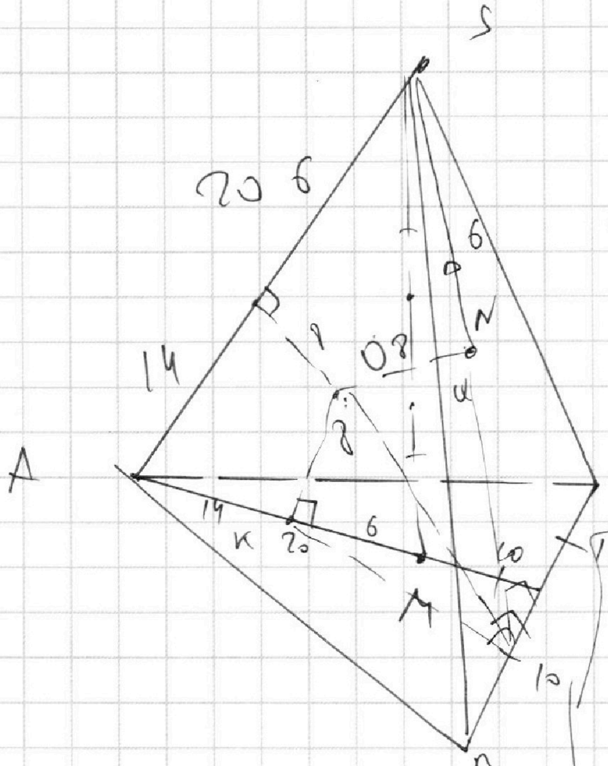
$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{5}{6}$. Т.к. $O \in$ бис. пл-ти $\Rightarrow$ двугранный
угол при ребре BC равен 2α. Ответ: а) 8100 б) $2\operatorname{arctg}\frac{5}{6}$

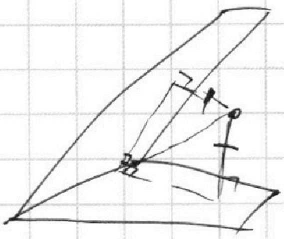
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

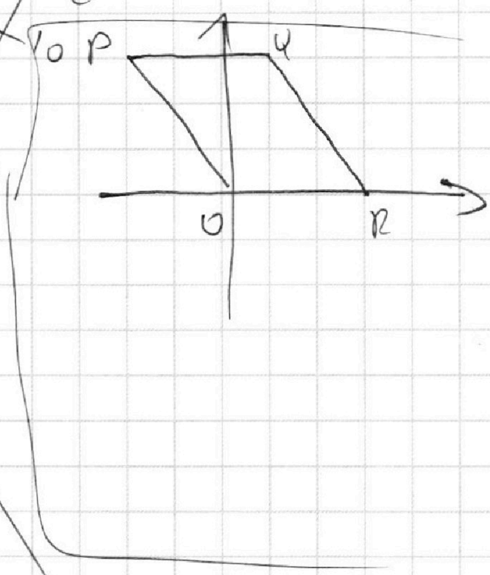
1 2 3 4 5 6 7

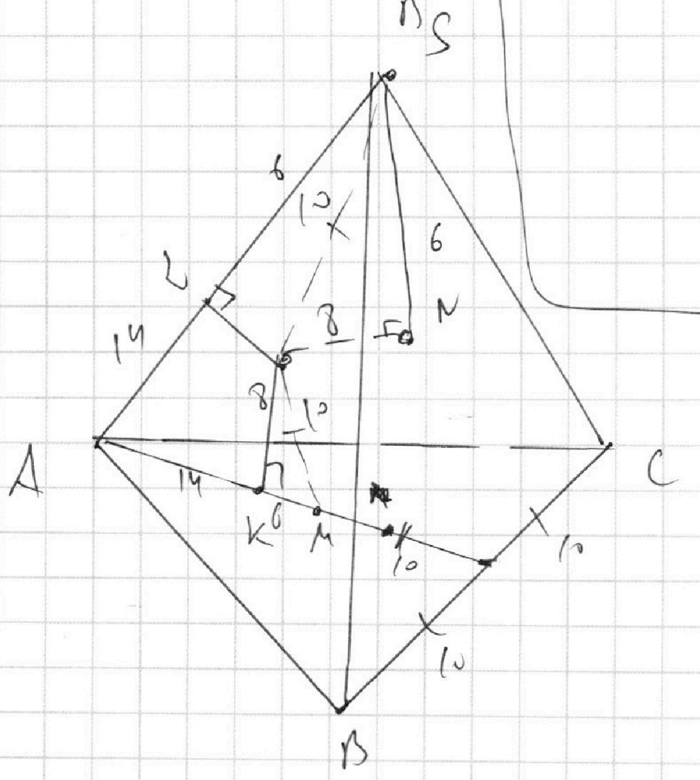
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





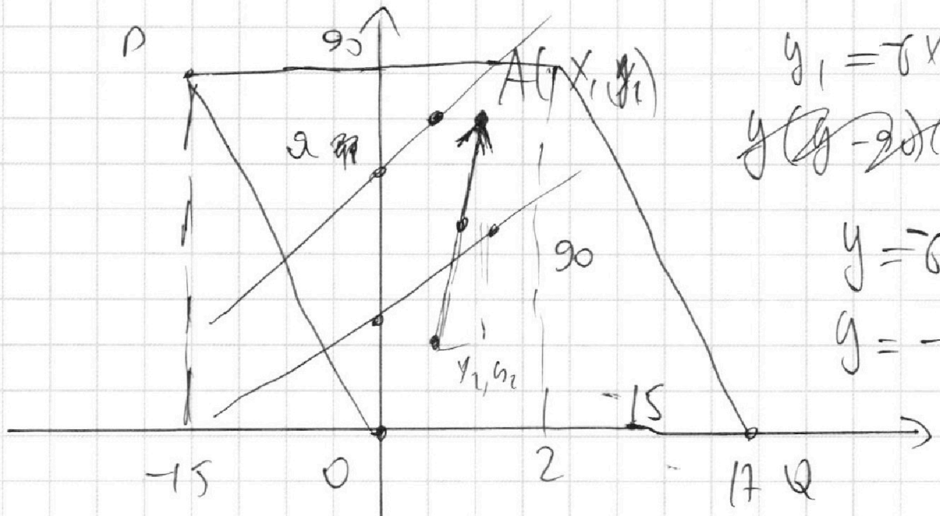




На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$y_1 = -6x_1 + y_2 - 48 + 6x_2$

~~$y(y-20)(\_\_)$~~

$y = -6x + b$

$y = -6x + 47 - b$

$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$

$(6;1)$

$y_1 = b_1 7 - 6x_1$

$y_2 = b_2 - 6x_2$

$y_2 - y_1 + 6x_2 - 6x_1 = b_2 - b_1 = 48$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\log_{11} x} - 5$ $\qquad \log_{11} x = a$

$\cdot 3a$

$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \Rightarrow 3a^5 - 18 = -2 - 15a$

$\underbrace{3a^5 + 15a - 16 = 0}$

$\log_{11}^4(0{,}59) + \log_{0{,}59} 11 = \log_{(0{,}59)^3}(11^{-13}) - 5$

$\log_{11} 0{,}59 = b$

$b^4 + \frac{1}{b} = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{3}\cdot(-13) - 5 \quad |\cdot 3b$

$3b^5 + 3 = -13 - 15b$

$3b^5 + 16 + 15b = 0$

$3a^5 + 15a - 16 = 0$ ↗

$3b^5 + 15b + 11 = 0$ ↗

~~a log~~

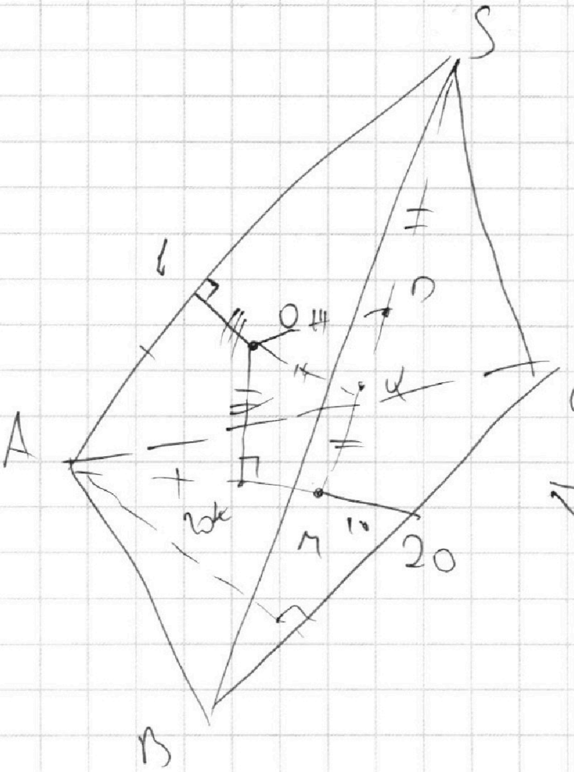
$a = -b$

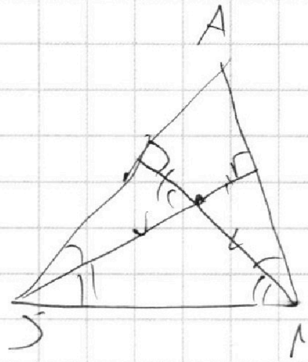
$\log_{11} x = -\log_{11} y$

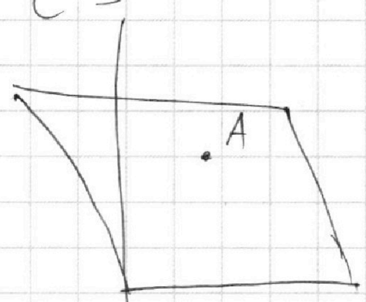
$\log_{11} x + \log_{11} y = 0$

$\log_{11} x\cdot y = 0$

$\boxed{x\cdot y = 1}$



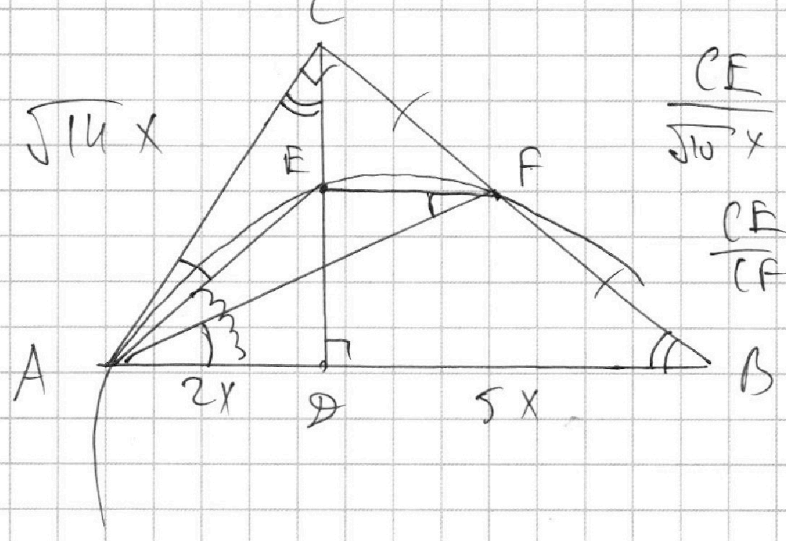




На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{FB}$$

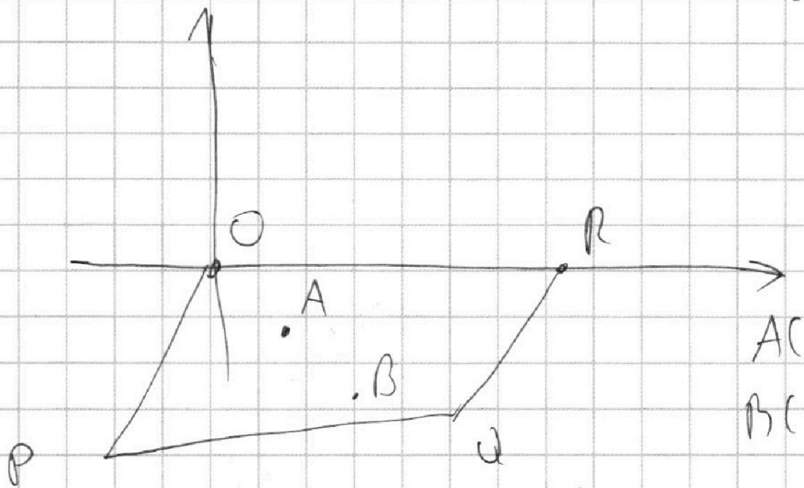
$$\frac{CE}{\sqrt{14}\,x} = \frac{CF}{\sqrt{35}\,x}$$

$$\frac{CE}{CF} = \frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\frac{CE}{BF} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{BF}{CF} = \frac{\sqrt{2}\cdot 7}{\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}}} = 1$$

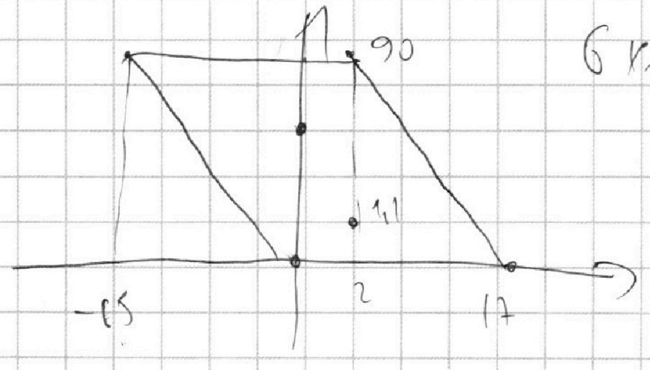


$A(x_1; y_1)$

$B(x_2; y_2)$

$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 98$

$6x_2 + y_2 = 98 + y_1 + 6x_1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ ≥ 0

$\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$

$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$

$2x \leq 9\pi$ $9\pi - 2x \leq 10\pi$

$\boxed{x \leq 4{,}5\pi}$ $-\pi \leq 2x$

$-\frac{\pi}{2} \leq x$

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi 9}{2}$

$5\pi - 10\arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$

$2x - 10\arcsin(\sin x) = 4\pi$

$x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$: $2x - 10x = 4\pi$

$-8x = 4\pi$

$x = -\frac{\pi}{2}$

$x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$: $2x - 10(\pi - x) = 4\pi$

$2x - 10\pi + 10x = 4\pi$

$12x = 14\pi$

$x = \frac{7}{6}\pi$

$x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$

$2x - 10(x - 2\pi) = 4\pi$

$2x - 10x + 20\pi = 4\pi$

$8x = 16\pi$

$x = 2\pi$

$x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$ $\pi - (x - 2\pi) = 3\pi - x$

$\sin\frac{5\pi}{2} = \sin\frac{\pi}{2}$

$\sin\frac{7\pi}{2} = \sin\frac{3\pi}{2}$

$2x - 30\pi + 10x = 4\pi$

$12x = 34\pi$

$6x = 17\pi$

$x = \frac{17}{6}\pi$

$x \in [\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$

$2x - 10(x - 4\pi) = 4\pi$

$2x - 10x + 40\pi = 4\pi$

$8x = 36\pi$

$x = \frac{36\pi}{8} = \frac{9\pi}{2}$

$10\arccos(\sin\frac{17\pi}{6}) = 9\pi - \frac{17\pi}{3} =$

$= \frac{27\pi}{3} - \frac{17\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$

$\frac{17\pi}{6} = 2\pi + \frac{5\pi}{6}$ $\frac{\pi}{3}$

$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot k_1$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot k_2$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot k_3$

$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 \geq 6 \\ \alpha_2+\alpha_3 \geq 14 \\ \alpha_1+\alpha_3 \geq 16 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq \frac{6+14+16}{2} = \frac{20+16}{2} = 18$

$\alpha_1 = 4 \quad \alpha_2 = 2 \quad \alpha_3 = 12$

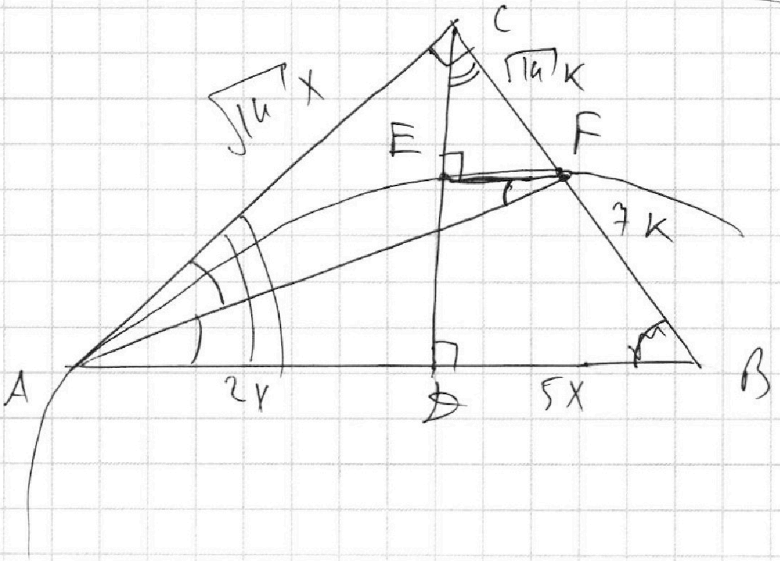
$\begin{cases} \beta_1+\beta_2 \geq 13 \\ \beta_2+\beta_3 \geq 21 \\ \beta_1+\beta_3 \geq 25 \end{cases}$ $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq \frac{13+21+25\pm 1}{2} = 30$

$\beta_3 = 16$
$\beta_1 = 9$
$\beta_2 = 5$

$\begin{cases} \gamma_1+\gamma_2 \geq 11 \\ \gamma_2+\gamma_3 \geq 13 \\ \gamma_3+\gamma_1 \geq 28 \end{cases} \Rightarrow \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geq \frac{11+13+28}{2} = \frac{52}{2} = 26$

$\gamma_1 = 13$
$\gamma_2 = 15$

$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13} \quad b = 2^2 \cdot 3^5 \quad c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{15}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

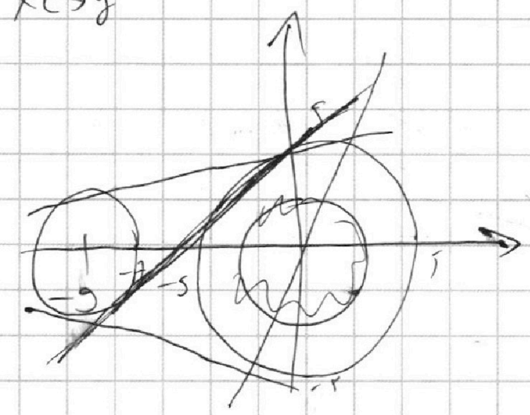
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4)

$x \leftrightarrow y$

$x^2+y^2 \le 25$

$(x+9)^2+y^2=4$



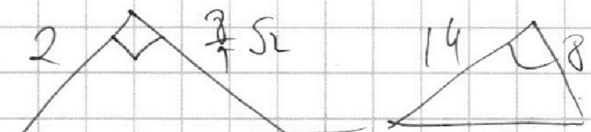
$5y = 8-6ay$

$y=\frac{8}{5}-1{,}2ay$

$2x+5x=9$

$7x=9$

$x=\frac{9}{7}$



$\sqrt{18^2-14^2}=\sqrt{4\cdot 32}=$
$=\sqrt{64\cdot 2}=8\sqrt{2}$

$18^2-14^2=(18-14)(18+14)=4\cdot 32=$
$=2\cdot 64=$
$=\sqrt{128}$

$\frac{7}{4\sqrt{2}} : \frac{6}{5}=\frac{7\cdot 5}{6\cdot 4\cdot \sqrt{2}}=\frac{35}{24\sqrt{2}}$

$\log_{11}^4 x-6\log_x 11=\log_{x^3}\frac{1}{121}-5$ $\quad \log_{11} x=t$

$t^4-\frac{6}{t}=\frac{1}{3}\cdot\log_x 11^{-2}-5=\frac{1}{3}\cdot(-2)^t-5$

$t^4-\frac{6}{t}=-\frac{2}{3t}-5 \,\Big|\cdot 3t$

$3t^5-18=-2-15t$

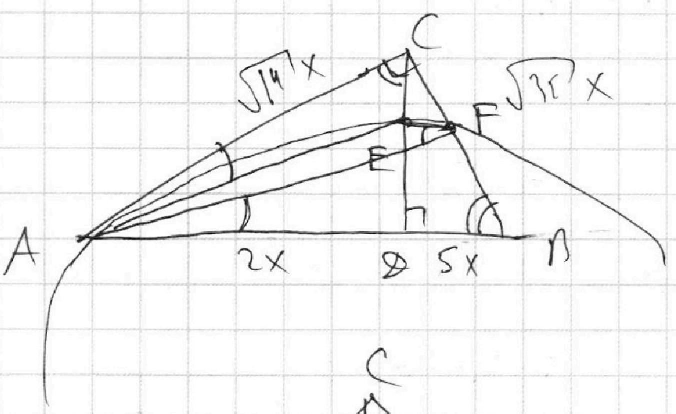
$3t^5+15t-16=0$

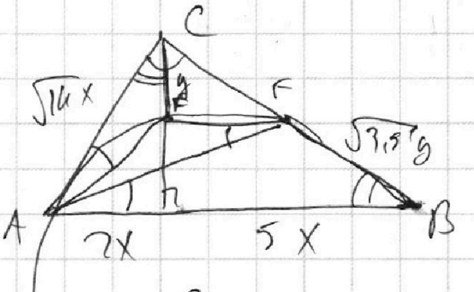
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

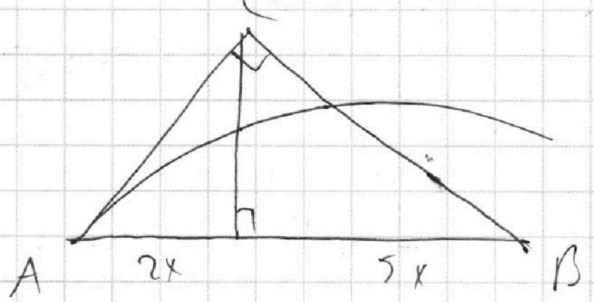
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

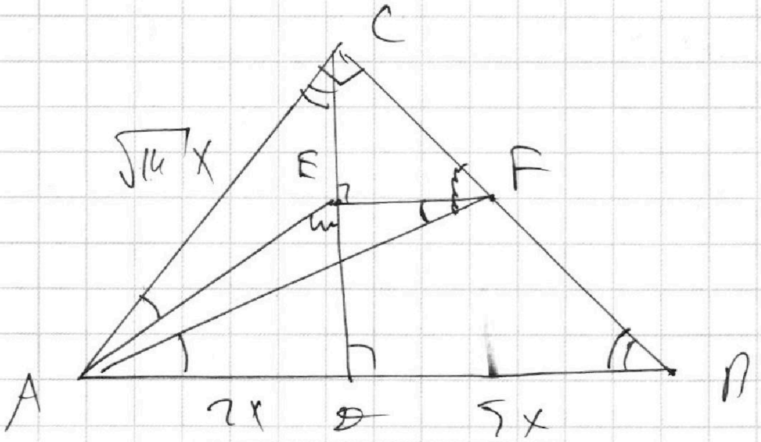




$\frac{?}{y} = \frac{7x}{\sqrt{14}\,x}$

$? = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\,y$





$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$ ОДЗ: $\boxed{\begin{matrix} x \neq 1 \\ x > 0 \end{matrix}}$

$t^4 - \frac{6}{t} = \frac{1}{6t} - 5 \quad \Big| \cdot 6t$

$6t^5 - 36 = 1 - 30t$

$6t^5 + 30t - 37 = 0$