



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot k_1$ ,  $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot k_2$ ,  
 $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot k_3$ , где  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{Z} \geq 0$ , а

$k_i \in \mathbb{N}$  и  $\text{НОД}(k_i, 30) = 1$ . Тогда из

условия:  $ab : 2^6$ ,  $bc : 2^{14}$ ,  $ac : 2^{16} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 6 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 14 \\ \alpha_3 + \alpha_1 \geq 16 \end{cases}$

Тогда:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$ . Из условия, что  $ab : 3^{13}$ ,  
 $bc : 3^{21}$ ,  $ac : 3^{25} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 13 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 21 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{59}{2} \\ \beta_2 + \beta_1 \geq 25 \end{cases}$

т.к.  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z} \geq 0 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30$ .

Из условия, что  $ac : 5^{28} \Rightarrow \gamma_1 + \gamma_3 \geq 28$ .

Умно:  $a \cdot b \cdot c = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \geq$   
 $\geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Самый простой пример:  $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$   
 $b = 2^2 \cdot 3^5$   
 $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{15}$

Ответ:  $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

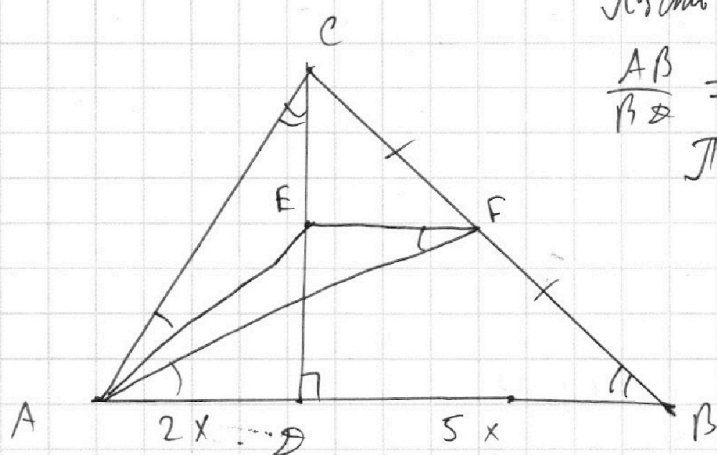
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

ЛМФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $AB = 7x$ . П.к.  ~~$\frac{AB}{BD} = 1,4$~~   
 $\frac{AB}{BD} = 1,4 \Rightarrow AD = 2x, BD = 5x$

П.к.  $AC$  — катет  
 $\Rightarrow \angle CAE = \angle FFA$

$\Rightarrow \angle CAE = \angle FFA$

П.к.  $EF \parallel AB \Rightarrow$

$\angle FFA = \angle FAB$

Поскольку  $\angle CAE = \angle FAB$ .  $\angle CBD + \angle DCB = 90^\circ$ ,

$\angle DCB + \angle ACD = 90^\circ \Rightarrow \angle ACD = \angle CBD \Rightarrow$

$\triangle ACE \sim \triangle AFB$  по 2 углам  $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BF}$ .

П.к.  $\triangle ACD \sim \triangle ACB$  по 2 углам  $\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow$

$AC^2 = AD \cdot AB \Rightarrow AC = \sqrt{14}x$ . Аналогично  $CB^2 = BD \cdot AB$

$CB = \sqrt{35}x$ .  $\frac{CE}{BF} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{14}x}{7x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

П.к.  $\triangle ACD \sim \triangle CBD$  по 2 углам  $\Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow$

$CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{10}x$ . П.к.  $EF \parallel BD \Rightarrow$

$\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB} = \frac{\sqrt{10}x}{\sqrt{35}x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ .  $\frac{CF}{BF} = \frac{\frac{CE}{BF}}{\frac{CE}{CF}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}} = 1$

Поскольку  $CF = BF = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{35}}{2}x$ .  $\triangle ACD \sim \triangle ECF$  по 2 углам ( $\angle CEF = 90^\circ$  п.к.  $EF \parallel AB$ ,  $\angle CFE = \angle CBA = \angle ACD$ ,

п.к.  $EF \parallel AB$ ). Тогда:  $\frac{S_{ACD}}{S_{ECF}} = \left(\frac{AC}{CF}\right)^2 = \frac{14x^2}{35x^2} = \frac{2}{5}$

Ответ:  ~~$\frac{2}{5}$~~   $\frac{2}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

П.к.  $\arccos x \in [0; \pi] \Rightarrow$  если  $x$  - решение

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x, \text{ то } 9\pi - 2x \in [0; 10\pi]$$

то возможно:  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$

Произвольное решение:  $\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$ :

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 2x - 10 \arcsin(\sin x) = 4\pi$$

$$1) x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x, \Rightarrow -8x = 4\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$2) x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = \pi - x \Rightarrow 2x - 10(\pi - x) = 4\pi \Rightarrow$$

$$12x = 14\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$3) x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x - 2\pi \Rightarrow 2x - 10(x - 2\pi) = 4\pi \Rightarrow$$

$$8x = 16\pi \Rightarrow x = 2\pi$$

$$4) x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = 3\pi - x \Rightarrow 2x - 10(3\pi - x) = 4\pi \Rightarrow$$

$$12x = 34\pi \Rightarrow x = \frac{17}{6}\pi$$

$$5) x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = \cancel{4\pi - x} x - 4\pi \Rightarrow 2x - 10(x - 4\pi) = 4\pi$$

$$8x = 36\pi \Rightarrow x = \frac{9\pi}{2}$$

Ответ:  $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{6}, x = 2\pi, x = \frac{17\pi}{6}, x = \frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

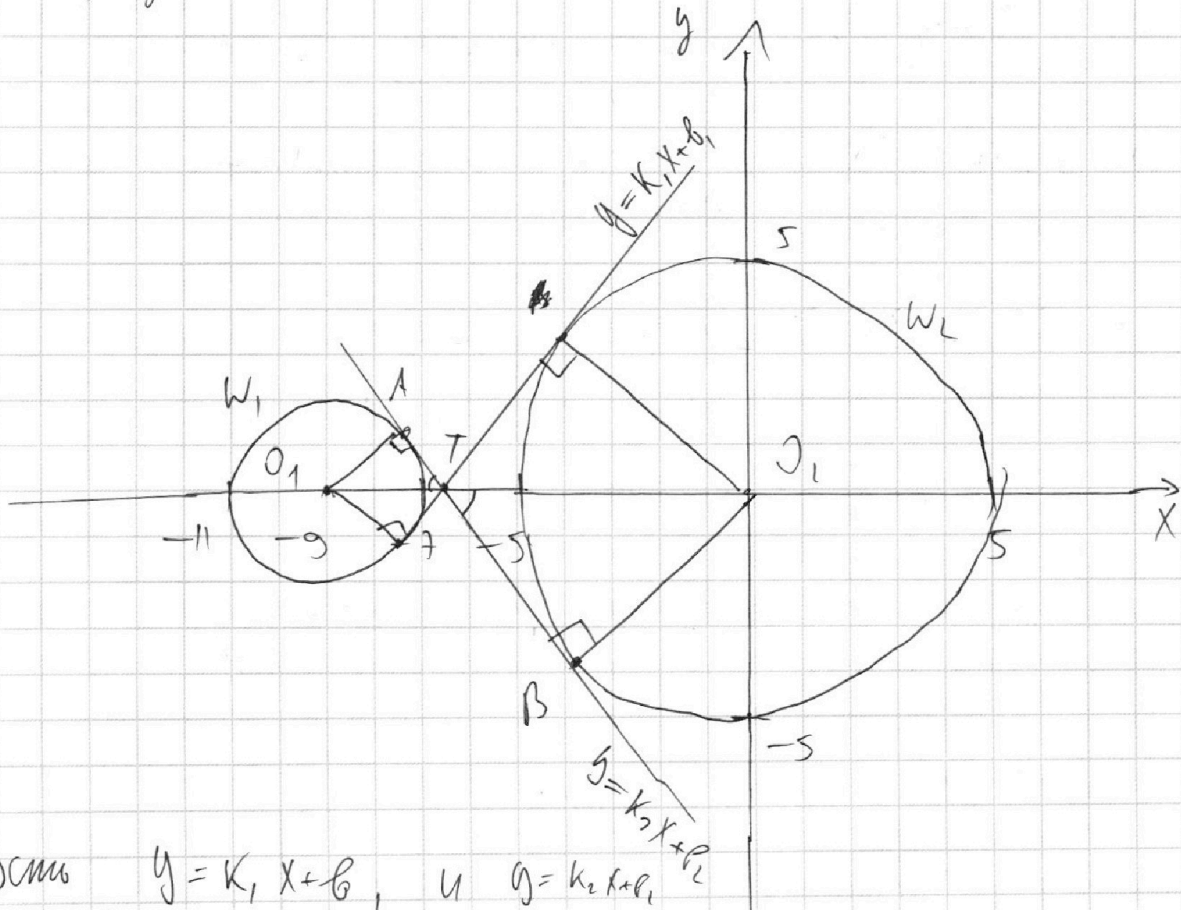
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Связь между решениями  $x \Leftrightarrow y$ . При  
такой замене, количество решений не  
изменяется. Пусть:  $y = \frac{6}{5} - 1,2ax$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 - 4) = 0$$

Второе уравнение на координатах  $x$  и  $y$   
представляет собой две окружности:



Пусть  $g = k_1x + b_1$  и  $g = k_2x + b_2$

это две внешние касательные к  
этим двум окружностям. Тогда наша  
система имеет ровно 4 решения при  
каком-то  $b$ , радиусов и центрах,  
тогда  $-1,2a \in (k_2, k_1)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что эти две окружности симметричны относительно оси  $Ox$ , поэтому ось  $Ox$  является осью симметрии. Заметим, что вершины и центры окружностей симметричны, поэтому пересечение осей симметрии является центром окружностей. Пусть ось  $Ox$  — это  $W_1$ , ее центр  $O_1$ , а ось  $W_2$ , ее центр  $O_2$ . Пусть уравнение  $W_2$  пересечения  $W_1$  в точке  $A$ , а  $W_2$  в точке  $B$ , ось  $Ox$  в точке  $T$ . Тогда  $\triangle O_1AT \sim \triangle O_2BT$  по 2 углам.  $\Rightarrow \frac{O_1T}{O_2T} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{5}$ .  $O_1T + O_2T = O_1O_2 = 9 \Rightarrow O_1T = \frac{18}{7}$ ,  $O_2T = \frac{45}{7}$ . Тогда  $\angle ATO_1 = \angle$  ~~...~~  $AT = \sqrt{O_1T^2 - O_1A^2} = \sqrt{\left(\frac{18}{7}\right)^2 - 4} = \frac{8\sqrt{2}}{7}$ . Тогда  $\tan \angle = \frac{2}{\frac{8\sqrt{2}}{7}} = \frac{7}{4\sqrt{2}}$ . Крестовое  $y$  уравнение  $y = k_2x + b_1$ ,  $k_2$  по условию равен  $\tan \angle \Rightarrow k_2 = -\frac{7}{4\sqrt{2}}$ . Углы симметричны  $k_1 = \frac{7}{4\sqrt{2}} \Rightarrow -1,75 \in \left(-\frac{7}{4\sqrt{2}}, \frac{7}{4\sqrt{2}}\right)$   $a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}, \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$ . Ответ:  $a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}, \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Преобразуем левую:  $\log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3 \cdot \log_{11} x} - 5$

Сделаем замену:  $\log_{11} x = a: a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \quad | \cdot 3a$

$3a^5 + 15a = 16$ . Преобразуем в другое:

$\log_{11}^4(0,5g) + \frac{1}{\log_{11}(0,5g)} = -\frac{13}{3 \cdot \log_{11} 0,5g} - 5$

Сделаем замену:  $\log_{11} 0,5g = b:$

$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5 \quad | \cdot 3b: 3b^5 + 15b = -16$

Рассмотрим функцию  $f(t) = 3t^5 + 15t$

$f'(t) = 15t^4 + 15 > 0 \Rightarrow f(t)$  - возрастает.

Также заметим, что  $f(t) = -f(-t) \Rightarrow$

$f(t)$  - нечетная. П.к.  $f(t)$  монотонно

возрастает, то решим уравнение  $f(t) = 16$

только 1 (она существует, п.к.  $f(t)$  - монотонно

нечетная функция). Аналогично  $f(t) = -16$

имеет только одно решение. Пусть  $a_0$  -

решение  $f(t) = 16$ . П.к.  $f(t)$  - нечетная, то

$f(-a_0) = -16 \Rightarrow -a_0$  - решение  $f(t) = -16$

Получаю: если  $x$  и  $y$  решение системы,

то  $a = -b \Rightarrow \log_{11} x = -\log_{11} 0,5g \Rightarrow$

$\log_{11} 0,5xg = 0 \Rightarrow 0,5xg = 1 \Rightarrow xg = 2$  Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

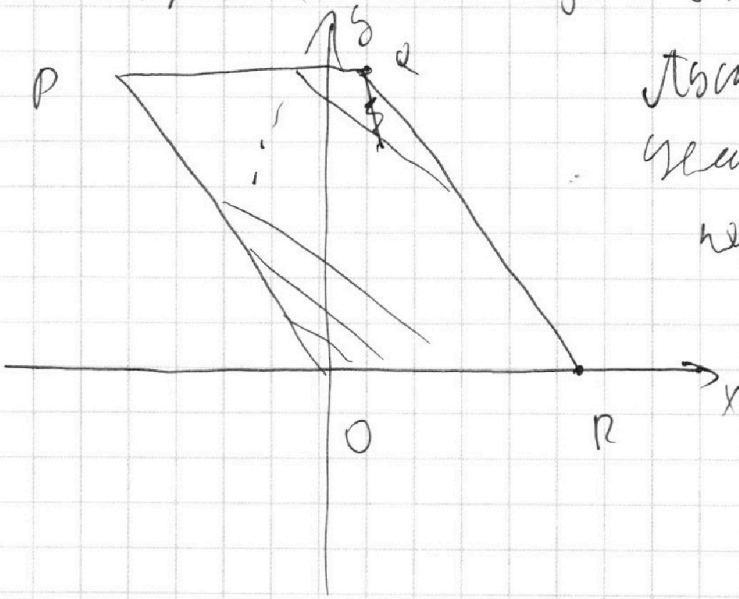
Пусть точка  $A$  лежит на прямой

$$y = b_1 - bx. \text{ Пусть также условие выполняется,}$$

точка  $B$  также лежит на прямой

$$y = 48 + b_1 - bx. \text{ Пусть результаты перен}$$

на прямую вида  $y = -bx + c.$



Пусть  $A_i$  - различные

значения параметра

перен на

$$\text{прямой } y = i - bx.$$

Пусть



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

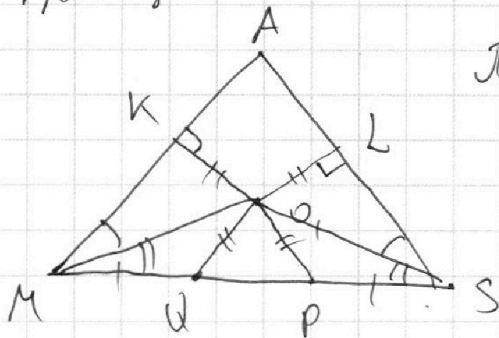
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $O$  — центр сферы  $\Omega$ . Рассмотрим проекцию точки  $O$  на плоскость  $SAM$ :



т.е.  $OK = OL = OP = OQ$

как радиусы сферы  $\Rightarrow$

$O_1K = O_1L = O_1P = O_1Q \Rightarrow$

$\triangle O_1QP \sim \triangle O_1PQ \Rightarrow$

$\angle O_1QP = \angle O_1PQ \Rightarrow \angle O_1QM = \angle O_1PS \Rightarrow$

$\triangle MQO_1 = \triangle SPO_1$ , по 2 сторонам и углу

между ними  $\Rightarrow \angle O_1MQ = \angle O_1SP$ .  $\triangle MKO_1 = \triangle SLO_1$ ,

по катету и гипотенузе  $\Rightarrow \angle KMO_1 = \angle LSO_1 \Rightarrow$

$\angle AMS = \angle ASM \Rightarrow AM = AS = 20$ . Теперь

рассмотрим плоскость  $ABC$ :

т.к.  $M$  — пересечение высот  $\Rightarrow$

$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow MA_1 = 10$$

тогда в  $\triangle ABC$  высота

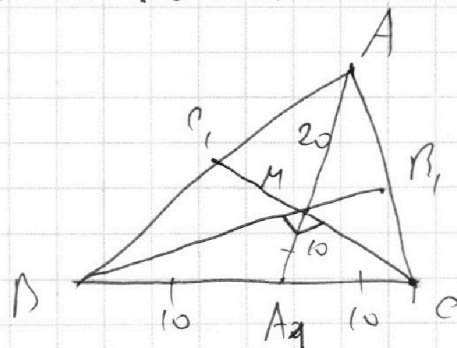
ведет к острым углам  $\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$ . Опустим

высоту  $AH$  на  $BC$ . Тогда:  $S_{ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2} = 180$

$AH = \frac{360}{BC} = \frac{360}{20} = 18$ . Опустим высоту  $MH_1$  на

$BC$ , тогда  $\triangle A_1MH_1 \sim \triangle A_1AH_1 \Rightarrow \frac{MH_1}{AH} = \frac{A_1M}{A_1A} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Тогда  $MH_1 = 6$ .  $S_{ABC} = \frac{BA \cdot AC}{2} = \frac{MH_1 \cdot BC}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

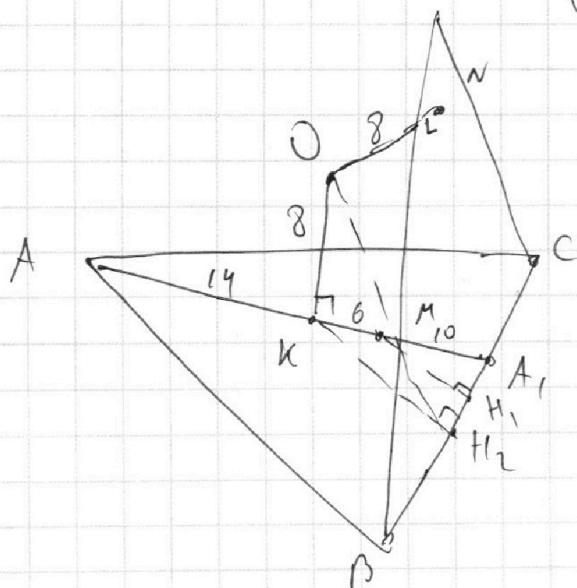
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $BM \cdot MC = MN_1 \cdot BC = 20 \cdot 6 = 120 \Rightarrow AM \cdot BA \cdot CA =$   
 $= 120 \cdot 20 = 2400$   $AA_1 = \frac{3}{2} AM$ ,  $BB_1 = \frac{3}{2} BA$ ,  $CC_1 = \frac{3}{2} CA \Rightarrow$   
 $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{27}{8} \cdot AM \cdot BA \cdot CA = \frac{27 \cdot 2400}{8} = 8100.$

$G = SN = SL$  как отрезки высоты  $\Rightarrow AL = AS - \cancel{SL} =$   
 $= 14$ .  $AL = AK$  как отрезки высоты,  
 высота:  $KH = \cancel{AK} = AM - AK = 6$ . П.к.

$ON = OK = 8$  как радиусы, то  $O \in$   
 дуге  $KL$ -м  $KL$  дуги радиуса  $8$  при хорде  $BC$ ;

Изучим высоту



$KH_2$  на  $BC$ .  $\triangle A_1KH_2C$

$\triangle A_1MH_1$  к.к.  $AH_1 \parallel KH_2$

Пусть:  $\frac{10}{16} = \frac{AH_1}{KH_2} \Rightarrow$

$KH_2 = \frac{16 \cdot 6}{10} = \frac{48}{5}$

П.к.  $OK \perp AC \Rightarrow$

$OK \perp KH_2$ . То

высота  $O$  при хорде  $KL$ :  $OH_2 \perp BC$ . Пусть

$\angle OH_2K = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{OK}{KH_2} = \frac{8}{\frac{48}{5}} = \frac{8 \cdot 5}{48} = \frac{5}{6}$

$\alpha = \arctan \frac{5}{6}$ . П.к.  $O \in$  дуге  $KL$ -м  $\Rightarrow$  дуга радиуса

при хорде  $BC$  имеет  $2\alpha$ . Ответ: а) 8100 б)  $2 \arctan \frac{5}{6}$

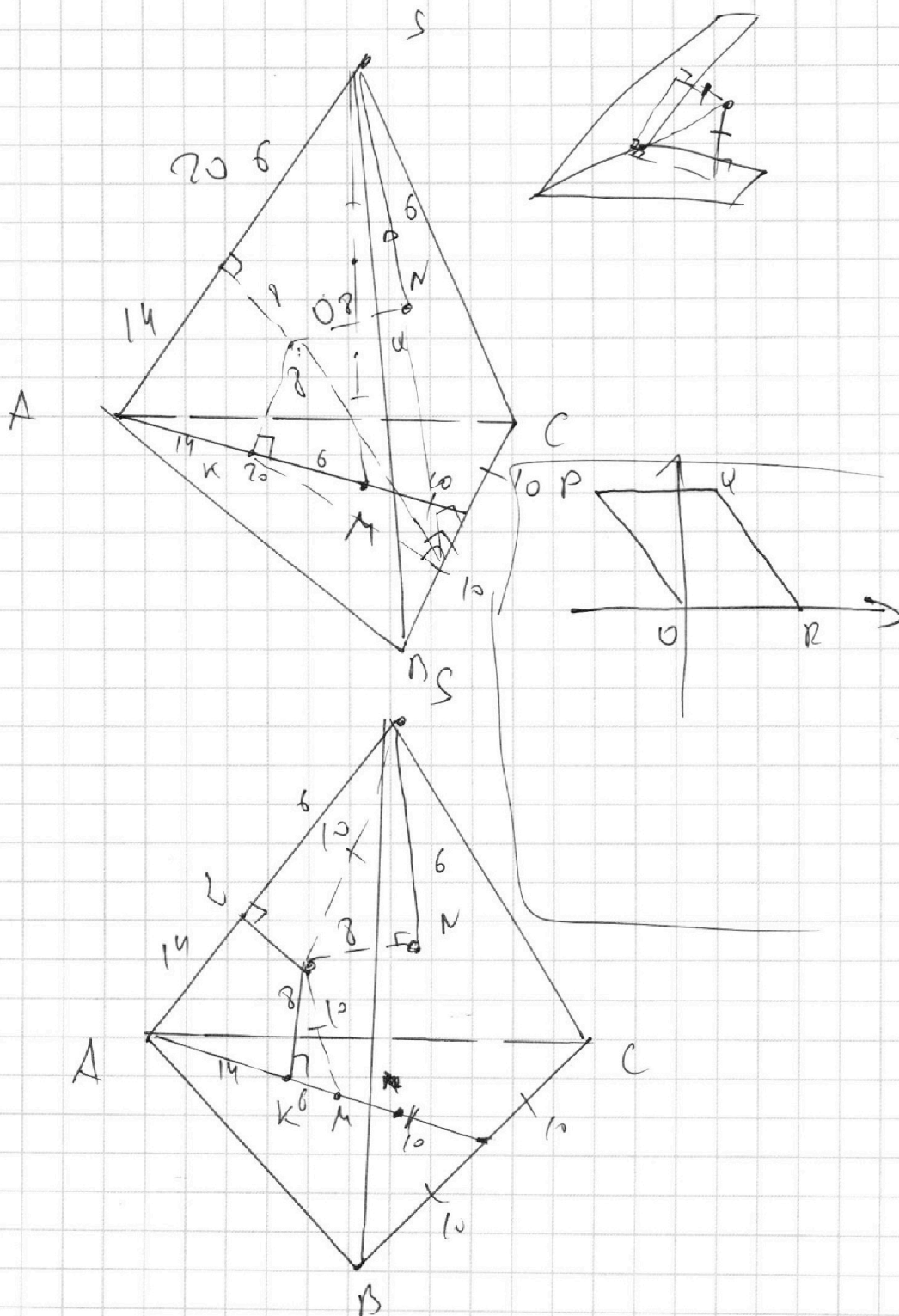
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



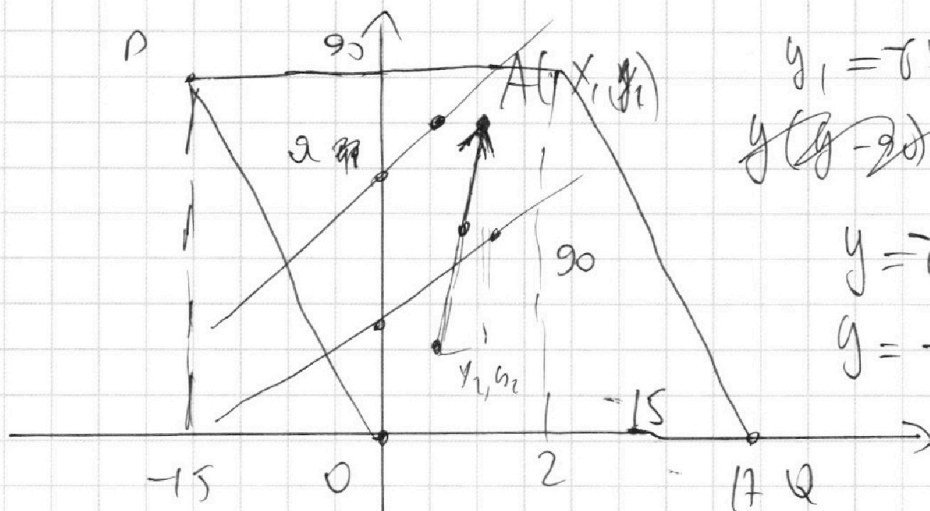
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y_1 = \sigma x_1 + \sigma_2 - 98 + \sigma x_2$$

$$y = (y - 90) \dots$$

$$y = \sigma x + \sigma$$

$$y = -\sigma x + 47 - \sigma$$

$$6y_2 - \sigma x_1 + \sigma_2 + \sigma_1 = 48$$

$$6(x_2 - x_1) + (\sigma_2 - \sigma_1) = 48$$

$$(\sigma; 1)$$

$$y_1 = \sigma_1 7 - \sigma x_1$$

$$y_2 = \sigma_2 - \sigma x_2$$

$$y_2 - y_1 + \sigma x_1 - \sigma x_2 = \sigma_2 - \sigma_1 + 48$$



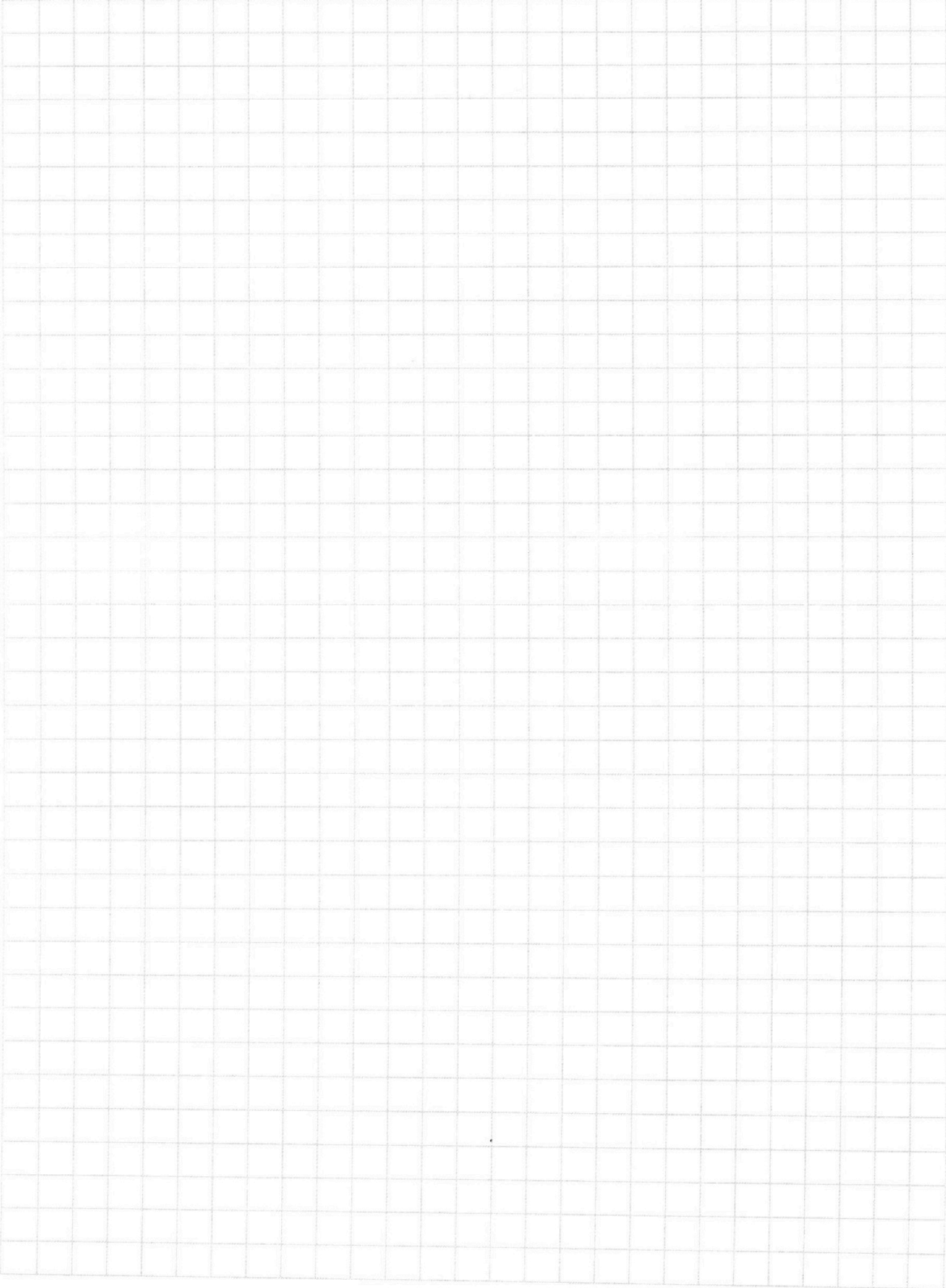
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \quad \log_{11} x = a$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \Rightarrow 3a^5 - 18 = -2 - 15a$$

$$\log_{11}^4 (0,75b) + \log_{11} 0,75b = \log_{11} (0,75b)^{11} - 5 \quad \underbrace{3a^5 + 15a - 16 = 0}$$

$$\log_{11} 0,75b = b$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-13) - 5 \quad | \cdot 3b$$

$$3b^5 + 3 = -13 - 15b$$

$$3b^5 + 16 + 15b = 0$$

$$3a^5 + 15a - 16 = 0 \quad \uparrow$$

$$3b^5 + 15b + 11 = 0 \quad \uparrow$$

~~а~~ ~~б~~

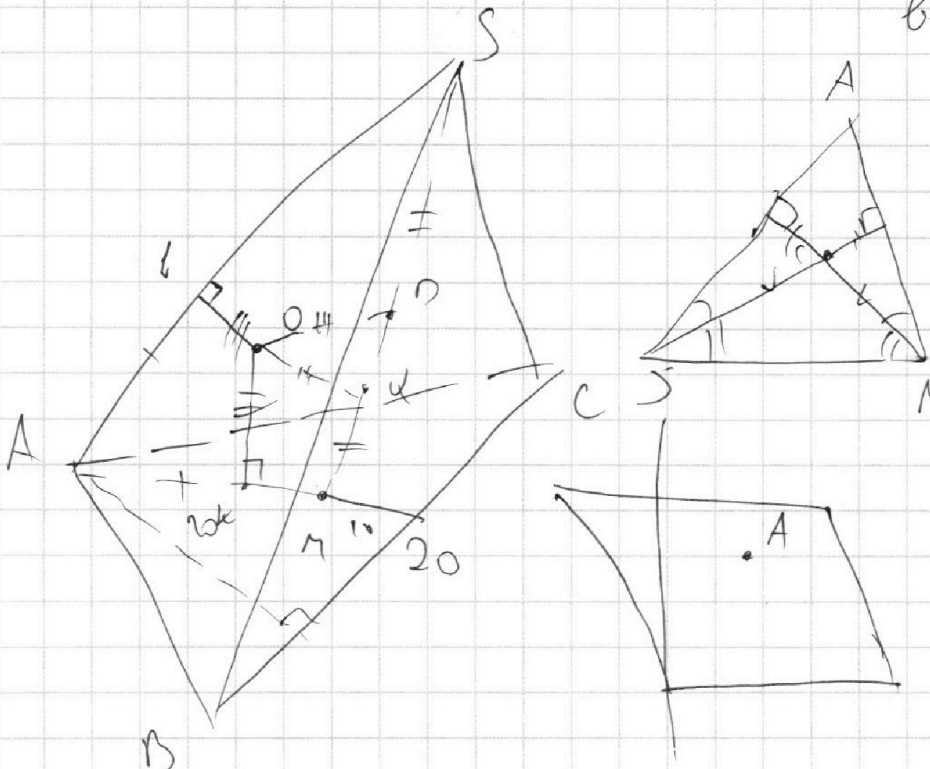
$$a = -b$$

$$\log_{11} x = \log_{11} t$$

$$\log_{11} x + \log_{11} t = 0$$

$$\log_{11} (x \cdot t) = 0$$

$$\boxed{x \cdot t = 1}$$



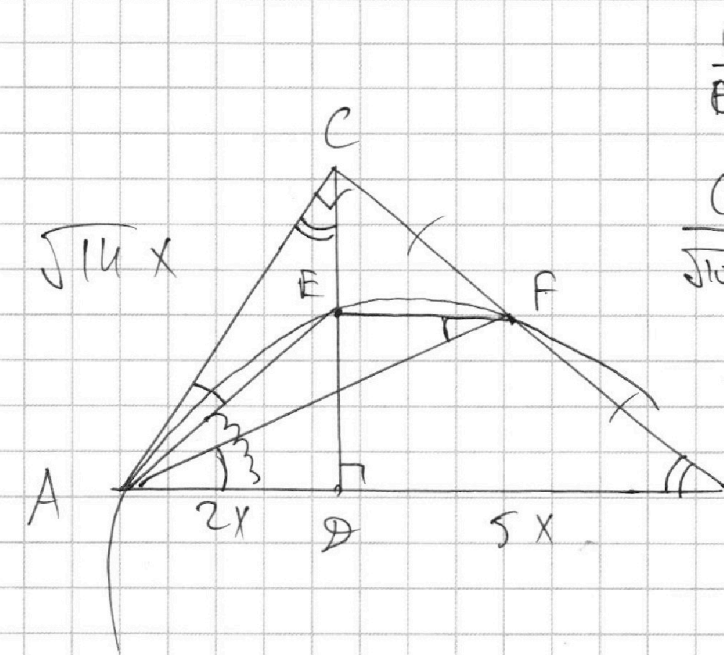
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{FD}$$

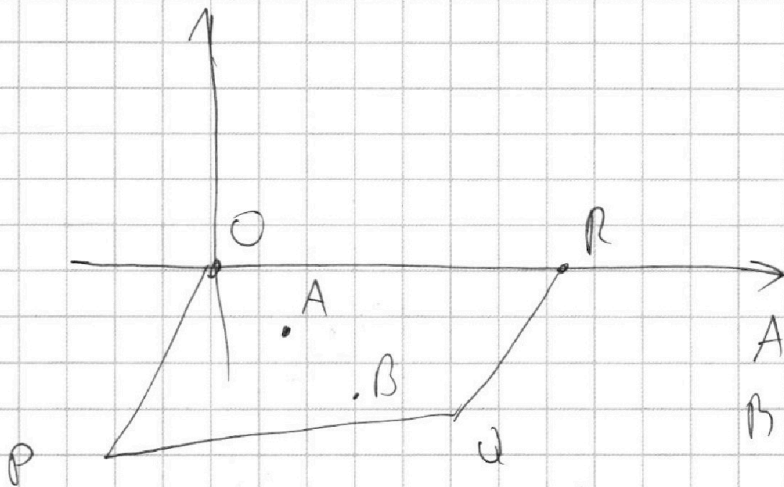
$$\frac{CE}{\sqrt{10}x} = \frac{CF}{\sqrt{5}x}$$

$$\frac{CE}{CF} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\frac{CE}{BF} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

⇓

$$\frac{BF}{CF} = \frac{\sqrt{2} \cdot 7}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{4}} = 1$$

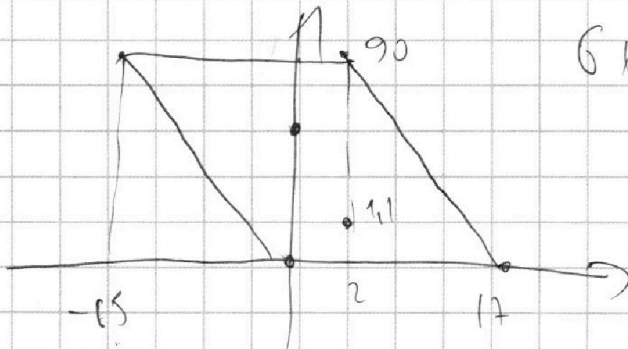


$$A(x_1, y_1)$$

$$B(x_2, y_2)$$

$$6x_2 = 6x_1 + y_2 - y_1 = 98$$

$$6x_2 + y_2 = 98 + y_1 + 6x_1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$2x - 10 \arcsin(\sin x) = 4\pi$$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]: 2x - 10x = 4\pi$$

$$-8x = 4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]: 2x - 10(\pi - x) = 4\pi$$

$$2x - 10\pi + 10x = 4\pi$$

$$12x = 14\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{6}$$

$$x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]: \pi(x - 2\pi) = 3\pi - x$$

$$\sin \frac{5\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \frac{7\pi}{2} = \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$2x - 30\pi + 10x = 4\pi$$

$$12x = 34\pi$$

$$8x = 17\pi$$

$$x = \frac{17\pi}{8}$$

$$10 \arccos\left(\sin \frac{17\pi}{8}\right) = 9\pi - \frac{17\pi}{2} =$$

$$= \frac{27\pi}{2} - \frac{17\pi}{2} = \frac{10\pi}{2}$$

$$\frac{17\pi}{8} = 2\pi + \frac{9\pi}{8}$$

$$\frac{\pi}{8}$$

$$\sin \frac{9\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$2x \leq 9\pi$$

$$9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$\boxed{x \leq 4,5\pi} \quad -\pi \leq 2x$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$$

$$x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$2x - 10(x - 2\pi) = 4\pi$$

$$2x - 10x + 20\pi = 4\pi$$

$$8x = 16\pi$$

$$x = 2\pi$$

$$x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$$

$$2x - 10(x - 4\pi) = 4\pi$$

$$2x - 10x + 40\pi = 4\pi$$

$$8x = 36\pi$$

~~$$x = \frac{9\pi}{2}$$~~

$$x = \frac{36\pi}{8} = \frac{9\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\delta_1} \cdot k_1$$

$$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\delta_2} \cdot k_2$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\delta_3} \cdot k_3$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 6$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq 16$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{6+14+16}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

$$\alpha_1 = 4 \quad \alpha_2 = 2 \quad \alpha_3 = 12$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 13$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 21$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 25$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{13+21+25+1}{2} = 30$$

$$\beta_3 = 16$$

$$\beta_4 = 9$$

$$\beta_2 = 5$$

$$\beta_1 = 13$$
$$\beta_2 = 5$$
$$\beta_3 = 16$$
$$\beta_4 = 9$$

$$\delta_1 + \delta_2 \geq 11$$

$$\delta_2 + \delta_3 \geq 19$$

$$\delta_3 + \delta_1 \geq 28$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \geq \frac{11+19+28}{2} = \frac{58}{2} = 29$$

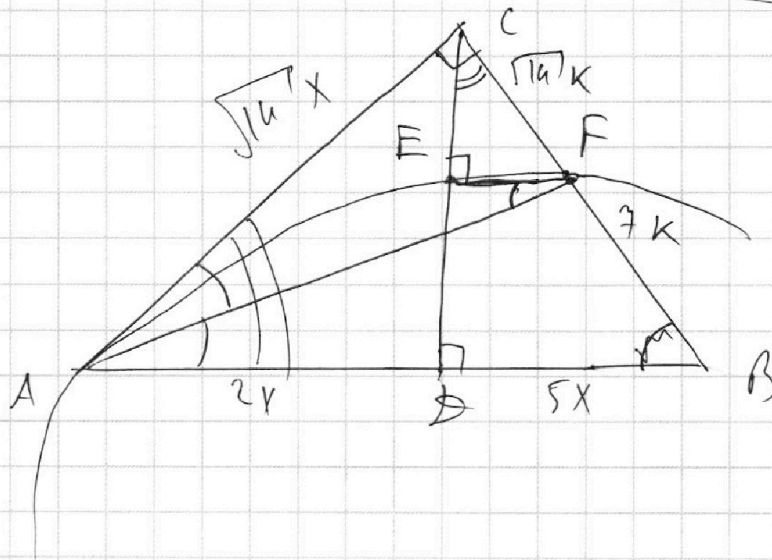
$$\delta_1 = 13$$

$$\delta_2 = 15$$

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13} \cdot k_1$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot k_2$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{15} \cdot k_3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

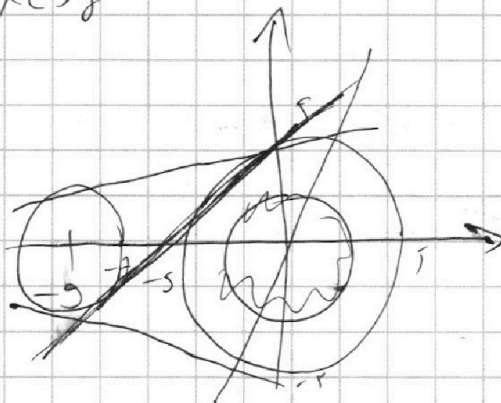
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4)

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$(x+9)^2 + y^2 = 4$$

$x \leftrightarrow y$



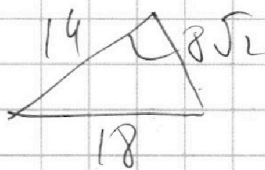
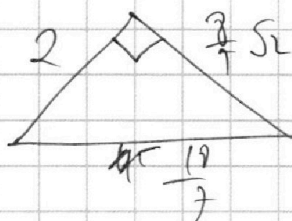
$$5y = 8 - 6ay$$

$$y = \frac{8}{5} - 1,2ay$$

$$2x + 5x = 9/4$$

$$7x = 9$$

$$x = \frac{9}{7}$$



$$\sqrt{18^2 - 14^2} = \sqrt{4 \cdot 32} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$$

$$18^2 - 14^2 = (18-14)(18+14) = 4 \cdot 32 =$$

$$= 2 \cdot 64 = \sqrt{128}$$

$$\frac{7}{6\sqrt{2}} : \frac{6}{5} = \frac{7 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot \sqrt{2}} = \frac{35}{24\sqrt{2}}$$

$$\log_4^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x \frac{1}{121} - 5 \quad \log_x x = t$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = \frac{1}{3} \cdot \log_x 11^{-2} - 5 = \frac{1}{3} \cdot (-2) - 5$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3} - 5 \quad | \cdot 3t$$

$$3t^5 - 18 = -2 - 15t$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

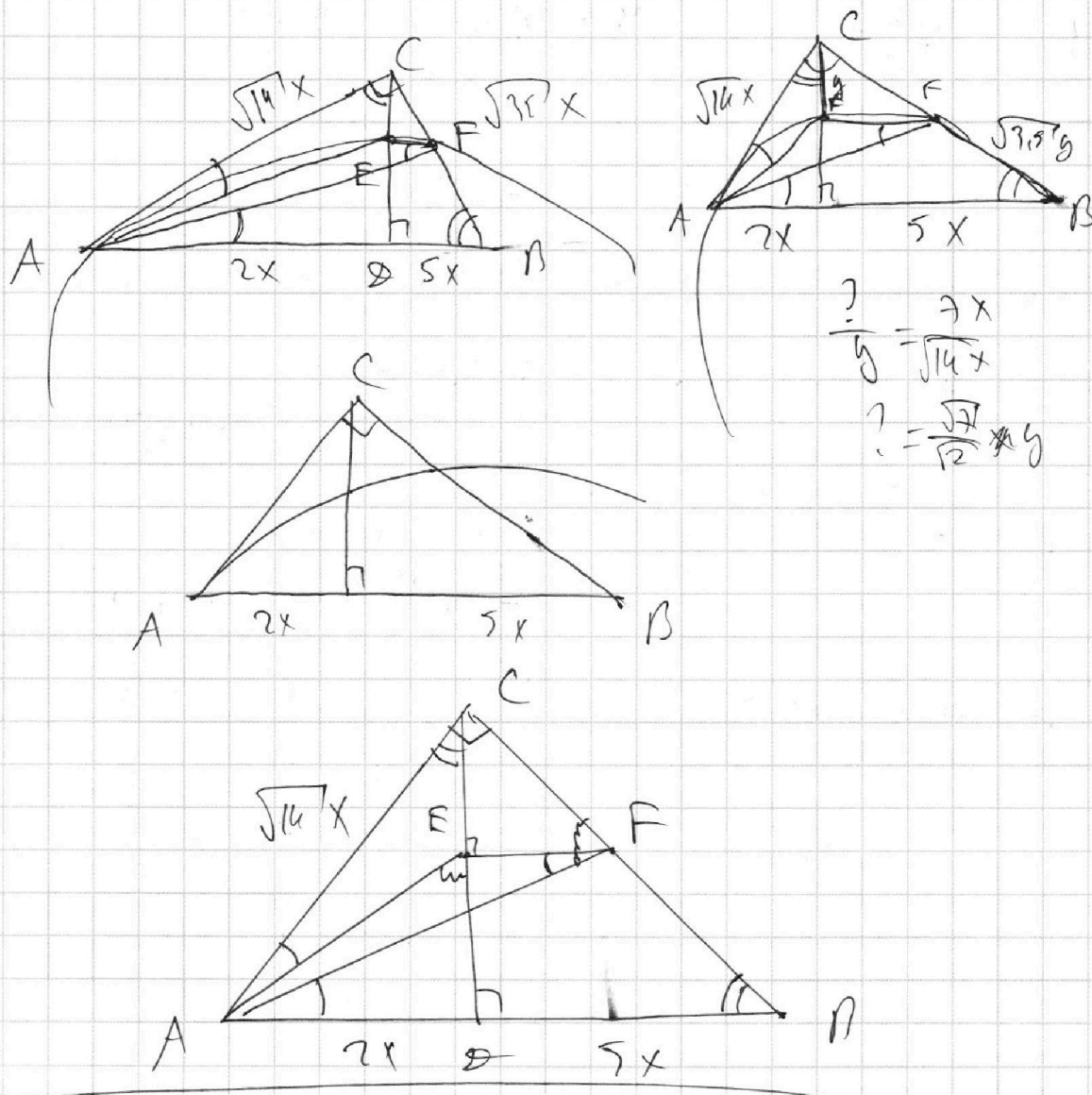
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{?}{y} = \frac{2x}{\sqrt{14}x}$$

$$? = \frac{\sqrt{14}}{12} * y$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5$$

УДЗ:  $\begin{cases} x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$

$$t^4 - \frac{6}{t} = \frac{1}{6t} - 5 \quad | \cdot 6t$$

$$6t^5 - 36 = 1 - 30t$$

$$6t^5 + 30t - 37 = 0$$