



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



✂ (1) [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

✂ (2) [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

✂ (3) [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

✂ (4) [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

✂ (5) [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

(6) [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3}$$

$$b = 2^{b_1} 3^{b_2} 5^{b_3}$$

$$c = 2^{c_1} 3^{c_2} 5^{c_3}$$

$$a_1 + b_1 \geq 7 \quad (ab) \quad \min a_1 + b_1 + c_1$$

$$a_1 + c_1 \geq 14 \quad (ac)$$

$$b_1 + c_1 \geq 13 \quad (cb)$$

$$a_2 + b_2 \geq 11$$

$$a_2 + c_2 \geq 17$$

$$b_2 + c_2 \geq 15$$

$$2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 34$$

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 17$$

$$abc \geq 2^{17}$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{43}{2} \Rightarrow abc \geq 3^{\lceil \frac{43}{2} \rceil + 1} = 3^{22}$$

~~Ответ $a_3 + b_3 + c_3 \geq 1$~~

т.к. $abc \geq 3^{22} \Rightarrow abc \geq 5^{43} \Rightarrow abc \geq 2^{17} 3^{22} 5^{43} \Rightarrow \min abc = 2^{17} 3^{22} 5^{43}$

Пример на $abc = 2^{17} 3^{22} 5^{43}$: $c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{20}$

$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{23}$
 $b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^{23}$ - да

Пояснение (1) - $a_1 + b_1$ - степень двойки в ab

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

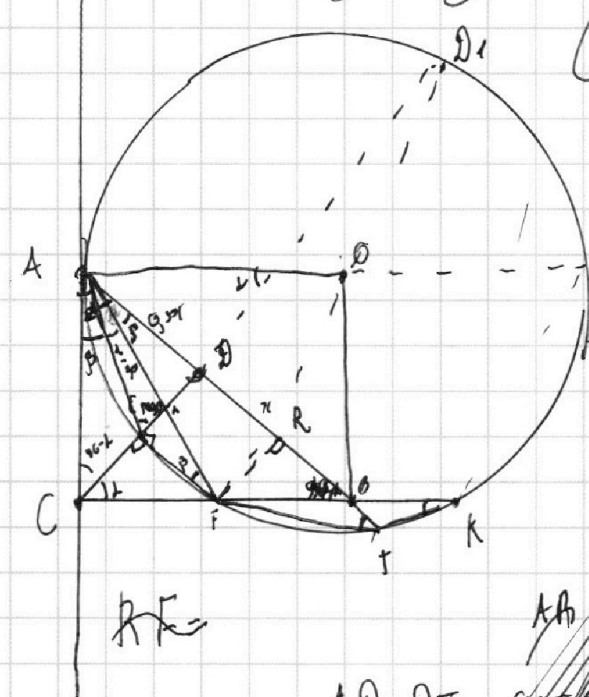
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AB} = \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CB}$$

$$CE = FB \cdot \frac{AB}{AC} \quad \frac{CE}{AC} = \frac{FB}{AB}$$

$$\frac{FB}{AB} \cdot \frac{CF}{AB}$$



~~$$\frac{CE \cdot CF}{AF \cdot AC}$$

$$\frac{FB \cdot FC}{CA \cdot CD}$$~~

~~$$\frac{EF \cdot CE}{AF \cdot DC}$$~~

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CE \cdot FB}$$

$$ED \cdot \dots = \dots$$

$$CD = \dots$$

$$CE = \dots$$

$$RF =$$

$$AB \cdot BF = FB \cdot BK$$

$$AD \cdot DT = \dots$$

$$CA^2 = CE \cdot CK$$

$$0,3 \cot \alpha = \dots$$

$$\frac{EF}{DR} = \frac{EF}{CD} =$$

$$\frac{2M}{AE} = \frac{AF}{ED}$$

$$\cot^2 \alpha = \frac{10}{3}$$

$$\cot \alpha = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$\frac{CF + FB}{AC} = \frac{CD}{AD}$$

$$FB = \frac{CD \cdot AC - CE \cdot AD}{AD}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle CAE = \angle EFA = \angle B \text{ (м.к. } CA \text{ - кас, а } \angle EFA \text{ центр } AE)$$

$$\angle CAB = \alpha \Rightarrow \angle PDCB ; \angle ABF = \angle CFE \text{ как } x = 90 - \alpha ; \angle DEF = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle EAF = \alpha - 2\beta = \angle FAT = \angle B$$

$$CD = \operatorname{tg} \alpha \cdot 0,3x = \operatorname{ctg} \alpha \cdot x \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{10}{3}} \Rightarrow CF = \frac{AC}{AD} \cdot ED \quad (1)$$

$$\triangle AED \sim \triangle AFC \text{ по 2-м к.} \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{CF}{ED} = \frac{AC}{AD} = k_1$$

$$\triangle AFB \sim \triangle AEC \text{ по 2-м к.} \Rightarrow \frac{AF}{AE} = \frac{FB}{CE} = \frac{AB}{AC} = k_2$$

$$k_1 = k_2 \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AB = 0,39x^2$$

$$AC = \sqrt{0,39} x \Rightarrow BC = \operatorname{tg} \alpha \cdot AC = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{0,39} x$$

$$CD = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} \cdot 0,3x ; \triangle CEF \sim \triangle CDB \text{ (} EF \parallel DB \text{)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{CF}{DB} = \frac{EF}{BC} \quad \& \quad EF = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{BC}{CD} \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{ED}{CE} = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{BC}{CD} = \frac{0,3 \cdot \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot \sqrt{0,39}}{\sqrt{0,39} \cdot \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot 0,3} x$$

$$ED + EC = CD \quad = 1 \Rightarrow ED = CE$$

$$ED = \sqrt{\frac{3}{10}} x - EC$$

$$\triangle ADC \sim \triangle CEF$$

$$k = \frac{CD}{EF} = \frac{\sqrt{\frac{10}{3}} \cdot 0,3}{\sqrt{\frac{3}{10}} \cdot x} = \frac{\sqrt{10} \cdot 0,3}{\sqrt{3} \cdot x} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{0,3}{x}$$

$$\frac{S_{ADC}}{S_{CEF}} = k^2 = \frac{10}{3} \cdot 0,3^2 = \frac{6}{5} = \frac{3x}{2}$$

Ответ $\frac{6}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arccos(a) \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{3}{2}\pi + x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-4\pi \leq x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq 4,5\pi$$

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3}{2}\pi + x$$

$$5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3}{2}\pi + x$$

I случай $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$ $5 \frac{\pi}{2} - 5x = \frac{3}{2}\pi + x \Rightarrow -\frac{\pi}{6} - 6x = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$

II случай $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{3}{2}\pi$ $5(\frac{\pi}{2} - x - \pi) = \frac{3}{2}\pi + x \Rightarrow x = -\frac{2\pi}{3}$

III случай $\frac{3}{2}\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{5}{2}\pi$ $5(-x - \frac{3}{2}\pi) = \frac{3}{2}\pi + x \Rightarrow x = -\frac{3}{2}\pi$

IV случай $\frac{5}{2}\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{7}{2}\pi$ $5(-x - \frac{5}{2}\pi) = \frac{3}{2}\pi + x \Rightarrow x = -\frac{14\pi}{6}$

V случай $\frac{7}{2}\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{9}{2}\pi$ $5(-x - \frac{7}{2}\pi) = \frac{3}{2}\pi + x \Rightarrow x = -\frac{19\pi}{6}$

Ответ $x \in \left\{ -\frac{\pi}{6}; -\frac{2}{3}\pi; -\frac{3}{2}\pi; -\frac{14}{3}\pi; -\frac{19}{6}\pi \right\}$

1,3
0,3
0,3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x+3ay-7b=0$
 $(x^2+4x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=9 - w_1 & 216 \\ (x^2+4x)^2+y^2=2^2 - w_2 \end{cases}$
 (D-м. касодущий кас. к окр, L-кас. к окр, K-м. пересек. Oy и к D, A, L (всего у прямой окр не более 4-х м. пересек.)
 A B D A ~ A C L A (CL, b D | D L)

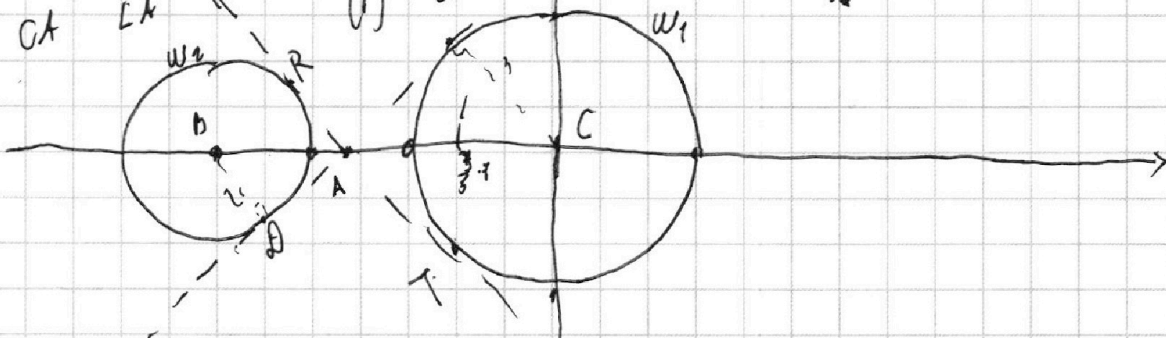
$B D = 2, C L = 3 \Rightarrow C B = 4 \Rightarrow$
 $C A = \frac{21}{5}, B A = \frac{14}{5} \Rightarrow L A = \sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - \left(\frac{14}{5}\right)^2}$

$a > d_2$ - реш-ва
 меньше 3-х между

→ обш. кас к 2-м окр $a = d_2$
 окр

$A(a' = \frac{21}{5}; 0)$

$\Delta C L K \sim \Delta C L A \frac{CK}{CL} = \frac{CA}{CL}$
 $\frac{CK}{CA} = \frac{CL}{LA} \Rightarrow CK = \frac{CA \cdot CL}{LA}$



→ обш. кас к 2-м окр $a = a_1$

пусть $x+3ay-7b$ - ка-ца
 $g(x) = x^2+y^2=9$ и
 $h(x) = (x+4)^2+y^2=2$

если $a \leq d_1$ то решение
 а меньше точек пересек
 с 2-м окр меньше 3-
 между

ур-ние кас к $g(x)$:

$y = (x-x_0) f'(x_0) + f(x_0)$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot 2x$

$y = \sqrt{9-x^2} = g(x)$

$y = \sqrt{2-(x+4)^2} = h(x)$

$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2-(x+4)^2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

из (1) \Rightarrow ур-ние прямой DLK : $y = \frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{21}{5\sqrt{6}}$ или или $x = \sqrt{6}y - \frac{21}{5}$

аналогично ур-ние прямой $ATKR$: $y = -\frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{21}{5\sqrt{6}}$ ~~прямая~~ ^{м.к}

$$x = -\sqrt{6}y + \frac{21}{5}$$

при $a \in [-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$ -
- решений меньше 4-х

если прямая $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v}$ пр-т \vec{u}/z т A и $\forall a \notin [-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$ то кол-во точек пересек - 4 (по 2 у каждой окр) т.к при $\forall a \notin [-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$

$\exists b$: эта прям пр-т \vec{u}/z т A , то уу.

Если прямая проходит \vec{u}/z т A не имеет 4-х пересек,

то ~~совр-на~~ ^{или} ее // перенос по Oy мы не най-м прямую инволюцию

и т. пересек т.к от одной из окр-ми прямая будет ую-ся

(~~если прямая~~ (если прямая пр-т \vec{u}/z т A и пересек одну окр, ^{и одной окр DLK и $ATKR$} то

она пересек и уу.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15

$$\begin{cases} 6x > 0 \\ 6x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_7^4 (6x)^{-a} = 2 \log_6 x^7 = \log_3 36x^2 - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log_7 y^7 = \log_7 2 (7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_7^4 6x - \frac{7}{2} \log_6 x^7 + 4 = 0 \\ \log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_7 y^7 + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \log_7 6x \\ b = \log_7 y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^5 + 8a - 7 = 0 \\ 2b^5 + 8b + 7 = 0 \end{cases} \leftarrow \text{пусть } a_1 \text{ — корень } 2a^5 + 8a - 7 = 0$$

и-е это у ур-я $2a^5 + 8a - 7 = 0$ — один корень. $(a^5 = -\frac{8}{20} + 1, a^4 > 0)$
 $f'(a) = 10a^4 + 8, f'(a) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow$
 \Rightarrow не более одного корня

Заметим $f(a) = f(-a) \Rightarrow b = -a \Rightarrow \log_7 y = -\log_7 6x$
 $y = \frac{1}{6x} \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$

Заметим это если $f(a_0) = 0$ то $f(-a_0) = -7$ и 2
 $2a_0^5 + 8a_0 = 7$ то $2(-a_0)^5 + 8(-a_0) = -7 \Rightarrow$ если a_0 — корень I то
 $-a_0$ — корень II то $2b^5 + 8b + 7 = 0 \Rightarrow a = -b, \log_7 x = -\log_7 y$

$$y = \frac{1}{6x}; xy = \frac{1}{6}$$

Ответ $xy = \frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



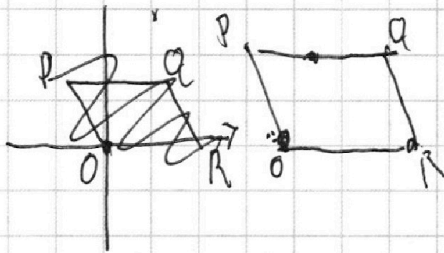
№6 m параллелограмм огранич. прямы OR, PQ, OP и QR

m -е m ур-ние этих прямых $OR: y=0$

$$PQ: y=68$$

$$OP: y=-4x$$

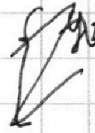
$$QR: y=76-4x$$



m -е m с коор x_1, y_1 лежит внутри $\square \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y_1 \geq -4x_1 \\ y_1 \leq 76-4x_1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_1 \leq 68 \end{cases}$$

m -е по оси



$$\begin{cases} 0 \leq y_2 + 4x_2 \leq 76 \\ 0 \leq y_1 + 4x_1 \leq 76 \end{cases}$$

как Расс-н m с внутри $\square: x_c + 4y_c = k \Rightarrow 0 \leq k \leq 76$

если $40 > k > 36$ то $4x_c + y_c \leq 40$

$$4x_c + y_c \leq 40 \text{ и}$$

m с не может

если $k \leq 36$ то аналог. m с не может быть m в \square m с не может быть m в \square m с не может быть m в \square

$$4x_2 + y_2 = 76 - 40 + k$$

$$\text{и } 4x_c + y_c + 40 \geq 76 \Rightarrow$$

если $k \geq 40$ то

m с не может быть m в \square m с не может быть m в \square

$$4x_2 + y_2 \geq 76 - \text{невозм. и}$$

m с не может быть m в \square m с не может быть m в \square

$$4x_1 + y_1 = 40 - k \rightarrow k - 40$$

$k > 40$

П. в каждой m с целочисл. коор на прямой $y = k - 4x$ при $k \leq 76$

можно поставить в пару только точки на прямой $y_2 = k - 40 - 4x_2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

если $k \notin \mathbb{Z}$ то при $x \in \mathbb{Z} \rightarrow y \in \mathbb{Z} \rightarrow k - 4x \in \mathbb{Z}$ и $y \notin \mathbb{Z}$ т.е

п.е если на прямой есть т. с целыми коор то $k \in \mathbb{Z}$

если $x \in \mathbb{Z}$ то $y \in \mathbb{Z}$ $k - 4x \in \mathbb{Z} \rightarrow y \in \mathbb{Z}$ т.е для $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

на прямой $y = k - 4x$ \exists равно одна т. с целыми коор. $(x_1; y_1)$

прямая $y = k - 4x \parallel \mathbb{Q}R$; на прямой $\mathbb{Q}R$ - 18 т. с целыми коор \Rightarrow

на \forall прямой $y = k - 4x$ при $k \in \mathbb{Z}$ - 18 точек т.

$26 \leq k \leq 40 - 237 \Rightarrow 18^2 \cdot 37$ пар точек $= 10692$ пар 11988 пар
 \downarrow
прямых с $k \in [0; 36]$

(упорядоченных с $k \geq 40$ и $k \leq 36$ - взаимно однозначное соответствие)

Ответ: 11988

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



В $\triangle ABC$ $AM=10$; $BC=10$ $S_{ABC}=60 \Rightarrow AA_1=15$

по формуле медианы $m = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}$

$$AA_1^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$$

$$AB^2 + AC^2 = 250 \quad AB = \sqrt{250 - AC^2}$$

$S_{\triangle ABC} = AH \cdot BC \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow AH = 12 = \sin \angle ACB \cdot AC = \sin \angle ABC \cdot AB$

$$\frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AH}{\sqrt{250 - AC^2}} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \sin$$

$CH = x \Rightarrow BH = 10 - x$

$$AH = \begin{cases} AB^2 = 100 + x^2 - 20x + 144 \\ AC^2 = x^2 + 144 \end{cases}$$

$$AB^2 = 250 - 144 - x^2 = 106 - x^2$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 20x + 138 &= 0 \\ x^2 - 10x + 69 &= 0 \end{aligned}$$

$$2x^2 - 20x + 112 = 0$$

$$x^2 - 10x - 56 = 0$$

$$D = \sqrt{100 + 224} = \sqrt{324} = 18^2$$

$$x = 19 \quad x = 14 \Rightarrow$$

\Rightarrow CB - тупой

$$BB_1 = 15$$

$$CC_1 = \sqrt{180}$$

$$AC = \sqrt{340}$$

$$AB = \sqrt{160}$$

$$AA_1 \cdot CC_1 \cdot BB_1 =$$

$$= \sqrt{45 \cdot 180} \cdot 15 = 90 \cdot 15 = 1350$$

$$180 = 9 \cdot 4 \cdot 5 \quad \frac{15}{1350}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

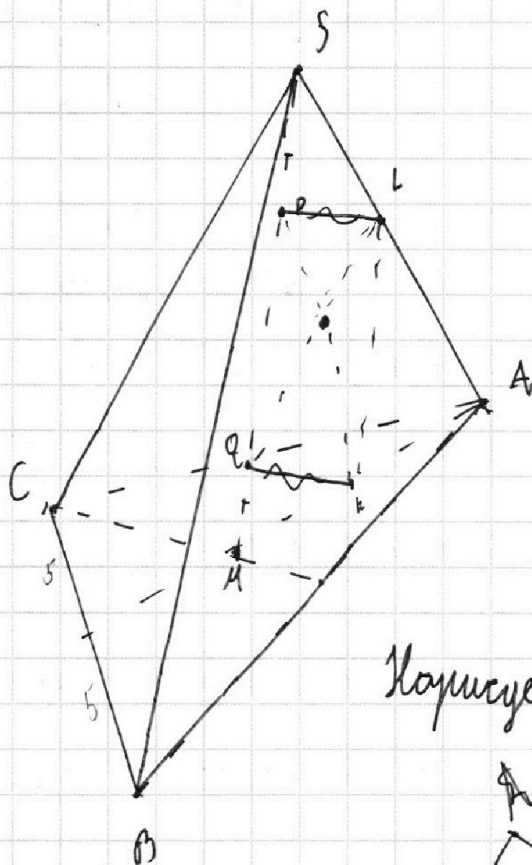
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

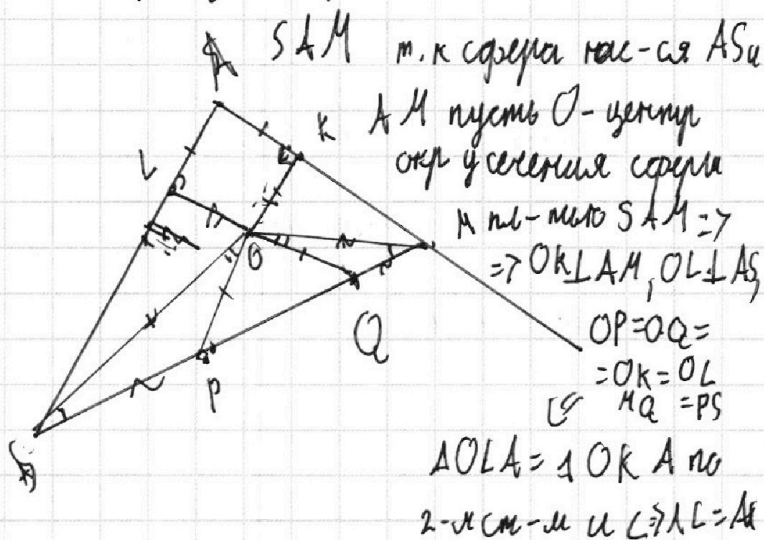
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



AL · A



Нарисуем пр-ую на пл-ти



SAМ м.к. сферы кас-ся ASB
 AM пусть O - центр
 окр. усевающей сферы
 и пл-ти SAМ ⇒
 ⇒ OL ⊥ AM, OL ⊥ AS,
 OP = OQ =
 = OK = OL
 ⇒ HQ = PS
 ΔOLA = ΔOKA по
 2-м см-м и ∠L = ∠K

AS = AM = 10

∠ OS = OM ∠ = ΔOSP = ΔOQM по 2-м см-м
 и ∠ (∠OPQ = ∠OQP м-р Δ
 ΔOSL = ΔOMK по 2-м см-м и ∠ OS = OM
 ⇒ SL = MK
 ⇒ ∠OPS = ∠OQM = 180° - ∠OPQ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^7 3^{11} 5^{19}$$

$$bc: 2^{13} 3^{15} 5^{18}$$

$$ac: 2^{19} 3^{17} 5^{18} 7^4 3$$

$$\begin{array}{r} \times 289 \\ 37 \\ \hline 2023 \\ 8670 \\ \hline 10693 \end{array}$$

abcd

$$a = 2^x 3^y 5^z$$

$$a = 2^x 3^y 5^z$$

$$c = 2^{2+x} 3^{2+y} 5^{2+z}$$

$$b = 2^{13-x} 3^{15-y} 5^{18-z}$$

$$\text{НОД}(ab, bc) = b$$

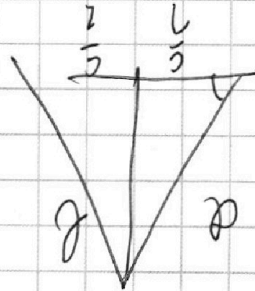
$$(ab, bc) = b(a, c) \Rightarrow$$

$$= b$$

$$13+x \quad 15+y$$

$$\frac{b}{2} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 2^4$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 2^8 - 2^2 + 2^2 \\ \hline 2^8 - 2^2 + 2^2 \\ \hline \end{array} = 2^4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$0h - 0\beta + 0\alpha \quad 2\alpha$$

$$4\alpha - 4\beta - 6\alpha + 4\beta$$

$$5\beta - 0\alpha + 0\alpha$$

$$5h - 0\beta + 0\alpha$$

$$C(\alpha + 2\beta)$$

$$C(\alpha - 2\beta)$$

$$2\beta = \frac{2\alpha}{\sqrt{2}} = \alpha \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$4\alpha - 2\beta - 2\alpha + 4\beta$$

α

$$2\alpha = 90 - \beta$$

$$\alpha + \beta = 90 - \alpha \quad \beta = 90 - 2\alpha$$

$$130 - 4\alpha + 4\beta$$

90°
 9

$h\beta$

$$2\alpha - 2\beta + 2\alpha = 180 - 2\alpha$$

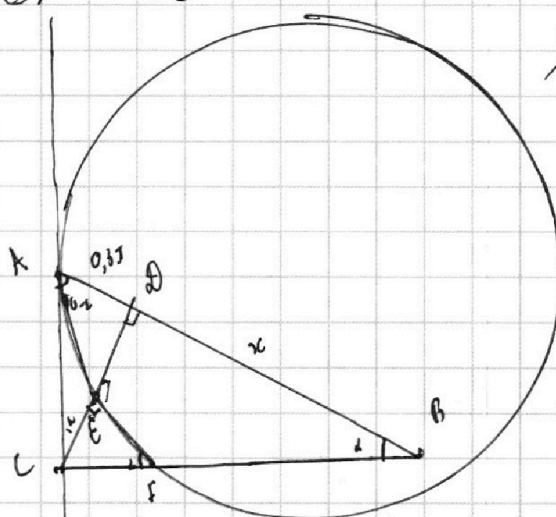
$$2\alpha = 180 - 4\alpha + 2\beta$$

$$2\alpha - 2\beta - 2\alpha = \frac{5\alpha}{9\beta}$$

2α

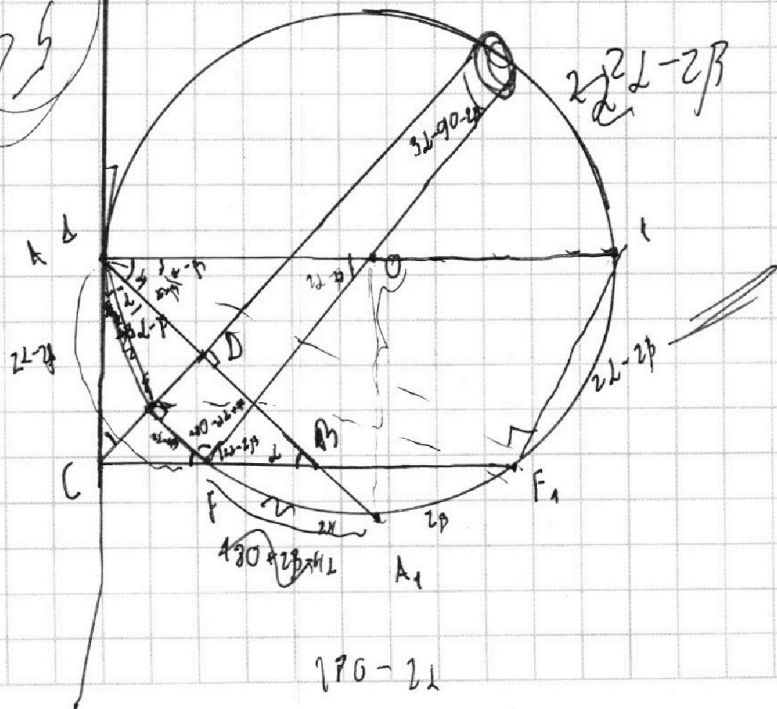
$$6\alpha - 130 - 4\beta$$

$$b = \frac{5\alpha}{4\beta - 9}$$



$$90 - 2\alpha + \beta$$

90°
 2α



$$180 - 2\alpha$$



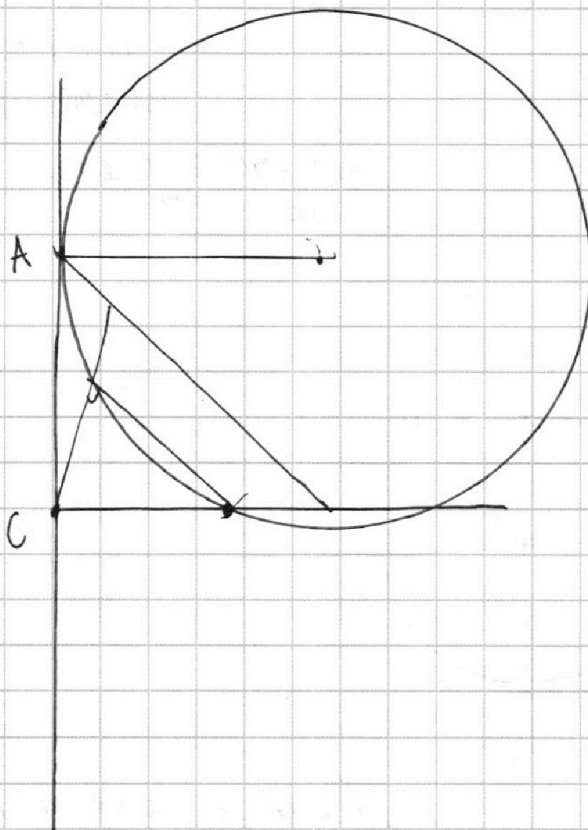
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 34^{\frac{7}{3}} - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4 \end{cases}$$

1) $\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4$

$$\log_7^4(6x) - \frac{5}{2} \log_{6x} 7 + 4 = 0$$

5) $\frac{5}{2} \log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_y 7 + 4 = 0$

$$a^4 - \frac{7}{2a} + 4 = 0$$

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

$$\frac{7}{2} \log_{6x}(7(6x)^4)$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3}{2}\pi + x$$

$$\log_7 y = \log_7 6x$$

$$y = 6x$$

$$10a^4 + 8 = 0$$

$$a^4 = -\frac{8}{10}$$

$$5 \frac{\sqrt{3}}{2} - 5\pi = \frac{3}{2}\pi + x \quad \pi = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

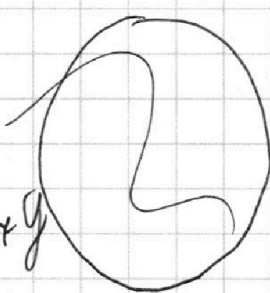
log

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

$$2b^5 + 8b + 4 = 0$$

$$\log_7 6x = -\log_7 y$$

$$\frac{1}{y} = 6x \quad y = x$$



$$a^{\frac{7}{2}}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$1$$

$$\frac{3}{4}$$

$$2^8$$

$$\frac{2}{3}$$

$$1$$

$$\frac{3^5}{4^5}$$

$$\frac{2^5}{3^5}$$

$$243$$

$$\frac{5}{3} - 243$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$CF \ y_1 \leq 68$ $-4x_1 + 19 \geq y_1 \geq -4x_1$
 $0 \leq y_2 \leq 68$ $-4x_1 + 19 \geq y_2 \geq -4x_1$

DR прямая OP - $y = -\frac{68}{14}x$ $y = -4x$
 прямая QR $y = \frac{49}{2}x + 19$ $y = -kx + b$

$-19k = -b$
 $19k = b$

$y = -kx + 19k$
 $19k = 68$
 $k = 4$
 $y = -4x + 19 \cdot 4$

$c = 10$
 $a = 7$
 $b = 6$

$y_1 + x_1$

$76 + 19 \geq y_1 + 4x_1 \geq 0$
 $76 + 19 \geq y_2 + 4x_1 \geq 0$

$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$
 $4x_2 + y_1$ $c = 10$

$c = 8$
 $a = 6$ $b = 5$

$y_1 = -k - 4x_1$



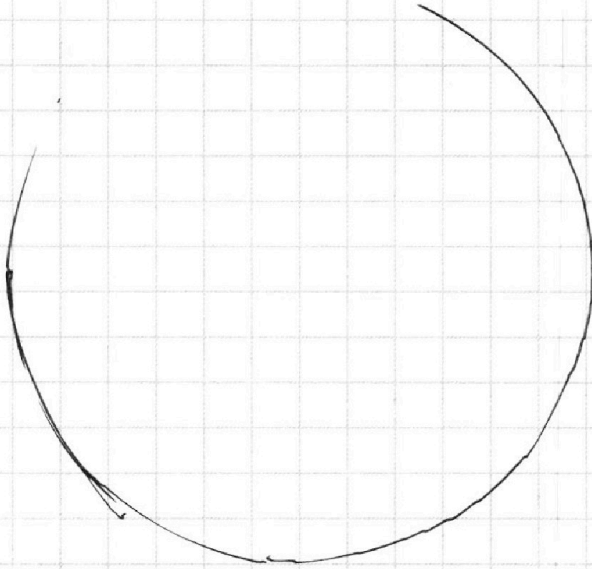
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AC \leftarrow \sin \angle B$$

$$\frac{\sin \angle B}{CE} = \frac{\sin 90^\circ}{AE} = \frac{\sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}{AC}$$

$$\frac{\sin \angle B}{FB} = \frac{\sin 90^\circ}{AF} \quad \frac{AF}{AE} = \frac{CF}{ED} = \frac{AC}{AD} = \frac{FB}{CE} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{FB}{CE} = \frac{AF}{AE}$$

$$\frac{CE}{AC} = \frac{FB}{AB}$$

$$\frac{FB}{AB} = \frac{RT \cdot CF}{EF \cdot AB} = \frac{ED \cdot CE}{EC \cdot AB}$$

$$\frac{CF}{EC} = \frac{CB}{CD} = \frac{AC}{AD}$$

$$\frac{CF + FB}{CF} = \frac{DB}{EF}$$

$$FB = \frac{FB}{CF} = \frac{RT}{EF} \frac{ED}{EC}$$

$$\frac{AC \cdot ED}{AD \cdot AB}$$