



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



✂ (1) [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

✂ (2) [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

✂ (3) [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .

✂ (4) [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

✂ (5) [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

(6) [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-17; 68)$ ,  $Q(2; 68)$  и  $R(19; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3}$$

$$b = 2^{b_1} 3^{b_2} 5^{b_3} \Rightarrow$$

$$c = 2^{c_1} 3^{c_2} 5^{c_3}$$

$$a_1 + b_1 \geq 7 \quad (ab) \quad \min a_1 + b_1 + c_1$$

$$a_1 + c_1 \geq 14 \quad (ac)$$

$$b_2 + c_2 \geq 13 \quad (cb)$$

$\Downarrow$

$$2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 34$$

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 17$$

$$\Downarrow$$

$$abc \geq 2^{17}$$

$$a_2 + b_2 \geq 11$$

$$a_2 + c_2 \geq 14$$

$$b_2 + c_2 \geq 15$$

$$\Downarrow$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{43}{2} \Rightarrow abc \geq 3^{\lceil \frac{43}{2} \rceil + 1} = 3^{22}$$

и т.д.

~~Ответ  $a_3 + b_3 + c_3 \geq 1$~~

т.к.  $abc \geq 5^{43} \Rightarrow abc \geq 5^{43} \Rightarrow abc \geq 2^{17} 3^{22} 5^{43} \Rightarrow \min abc = 2^{17} 3^{22} 5^{43}$

Пример на  $abc = 2^{17} 3^{22} 5^{43}$ :  $c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{20}$

$$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{23}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^{23} \quad - \text{дд}$$

Пояснение (1) -  $a_1 + b_1$  - степень двойки в  $ab$

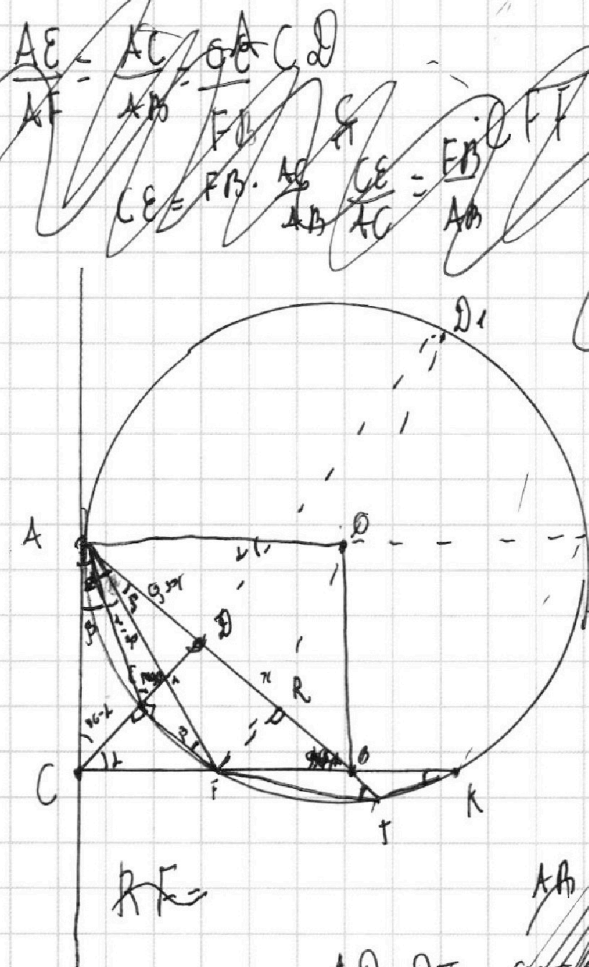
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$CE \cdot CF = AD \cdot AC$~~   
 ~~$FE \cdot FC = CA \cdot CD$~~

~~$\frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AB} = \frac{CA \cdot CD}{FB \cdot AB}$~~   
 ~~$CE = FB \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{FB \cdot AB}{AC}$~~

~~$\frac{FB}{AB} \cdot \frac{CF}{AD}$~~

~~$EF \cdot CE = AD \cdot DC$~~

~~$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CE \cdot FB}$~~

~~$ED = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot 0,3x$~~   
 ~~$CD = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot 0,3x \cdot \frac{1}{\cos 45^\circ}$~~   
 ~~$CE = 0,3x \cdot \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{0,3x \sqrt{2}}{\cos 45^\circ}$~~

~~$AF =$~~

~~$AB \cdot BF = FB \cdot BK$~~

~~$AD \cdot DT = CE \cdot CD$~~

~~$CA^2 = CE \cdot CK$~~

~~$0,3 \sqrt{2} x = \frac{1}{2} \sqrt{2} x$~~

~~$\frac{EF}{AD} = \frac{EF}{CD}$~~

~~$\frac{2x}{AE} = \frac{AF}{ED}$~~

~~$\cos^2 45^\circ = \frac{10}{3}$~~

~~$\cos 45^\circ = \sqrt{\frac{10}{3}}$~~

~~$\frac{CF + FB}{AC} = \frac{CD}{AD}$~~

~~$FB = \frac{CD \cdot AC - CE \cdot AD}{AD}$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle CAE = \angle EFA = \angle B \text{ (м.к. } CA \text{ - кас, а } \angle EFA \text{ центр } AE)$$

$$\angle CAB = \alpha \Rightarrow \angle PDCB ; \angle ABF = \angle CFE \text{ как } x = 90 - \alpha ; \angle DEF = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle EAF = \alpha - 2\beta = \angle FAT = \angle B$$

$$CD = \operatorname{tg} \alpha \cdot 0,3x = \operatorname{ctg} \alpha \cdot x \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{10}{3}} \Rightarrow CF = \frac{AC}{AD} \cdot ED \quad (1)$$

$$\triangle AED \sim \triangle AFC \text{ по 2-м к.} \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{CF}{ED} = \frac{AC}{AD} = k_1$$

$$\triangle AFB \sim \triangle AEC \text{ по 2-м к.} \Rightarrow \frac{AF}{AE} = \frac{FB}{CE} = \frac{AB}{AC} = k_2$$

$$k_1 = k_2 \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AB = 0,39x^2$$

$$AC = \sqrt{0,39} x \Rightarrow BC = \operatorname{tg} \alpha \cdot AC = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{0,39} x$$

$$CD = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} \cdot 0,3x ; \triangle CEF \sim \triangle CDB \text{ (} EF \parallel DB \text{)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{CF}{DB} = \frac{EF}{BC} \quad \& \quad EF = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{BC}{CD} \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{ED}{CE} = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{BC}{CD} = \frac{0,3 \cdot \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot \sqrt{0,39}}{\sqrt{0,39} \cdot \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot 0,3} x$$

$$ED + EC = CD \quad = 1 \Rightarrow ED = CE$$

$$ED = \sqrt{\frac{3}{10}} x - EC$$

$$\triangle ADC \sim \triangle CEF$$

$$k = \frac{CD}{EF} = \frac{\sqrt{\frac{10}{3}} \cdot 0,3x}{\sqrt{\frac{3}{10}} \cdot x} = \frac{0,3 \cdot \sqrt{\frac{10}{3}}}{\sqrt{\frac{3}{10}}} = \frac{0,3 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} = \frac{0,3 \cdot 10}{3} = 1$$

$$\frac{S_{ADC}}{S_{CEF}} = k^2 = \frac{10}{3} \cdot 0,3^2 = \frac{6}{5} = \frac{3x}{2}$$

Ответ  $\frac{6}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arccos(a) \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{3}{2}\pi + x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-4\pi \leq x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq 4,5\pi$$

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3}{2}\pi + x$$

$$5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3}{2}\pi + x$$

I случай  $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$   $5 \frac{\pi}{2} - 5x = \frac{3}{2}\pi + x \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$  - уга

II случай  $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{3}{2}\pi$   $5(\frac{\pi}{2} - x - \pi) = \frac{3}{2}\pi + x \Rightarrow x = -\frac{2\pi}{3}$  - уга

III случай  $\frac{3}{2}\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{5}{2}\pi$   $5(-x - \frac{3}{2}\pi) = \frac{3}{2}\pi + x \Rightarrow x = -\frac{3}{2}\pi$  - уга

IV случай  $\frac{5}{2}\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{7}{2}\pi$   $5(-x - \frac{5}{2}\pi) = \frac{3}{2}\pi + x \Rightarrow x = -\frac{14\pi}{6}$  - уга

V случай  $\frac{7}{2}\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{9}{2}\pi$   $5(-x - \frac{7}{2}\pi) = \frac{3}{2}\pi + x \Rightarrow x = -\frac{19\pi}{6}$  - уга

Ответ  $x \in \left\{ -\frac{\pi}{6}; -\frac{2}{3}\pi; -\frac{3}{2}\pi; -\frac{14}{6}\pi; -\frac{19}{6}\pi \right\}$

1,3  
0,3  
0,3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



14  $\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$   $x=7b-3ay$   $7b$  - отрез по оси  $ox$   $\frac{441}{25}-9$   
 $3a$  -  $L$  коэф наклона  $пр$   
 $\begin{cases} x^2+y^2=9-w_1 & 216 \\ (bx^2+7)^2+y^2=2^2-w_2 \end{cases}$   
 (D - м. касодущий кас  $\perp$  окр, L - касодущий окр K - м. пересек  $Oy$   $\perp$   $CD$  (всего у прямой окр не более 4-х м. пересек.)

$\Delta BDA \sim \Delta CLA (CL, BD \perp DL)$

$BD=2, CL=3 \Rightarrow CB=4 \Rightarrow$   
 $CA = \frac{21}{5} BA = \frac{14}{5} \Rightarrow LA = \sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 3^2}$

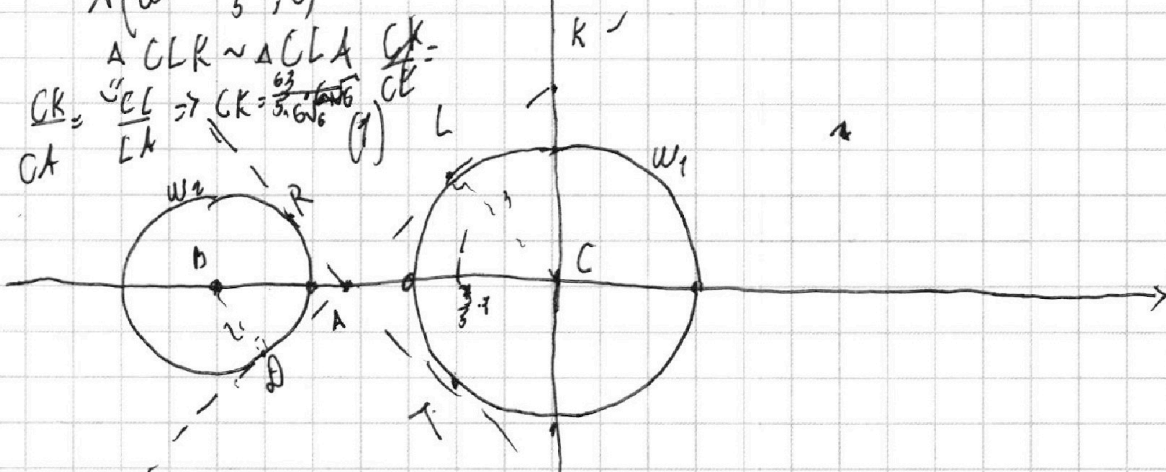
$a > d_2$  - реш-ва меньше 3-х небу

$\rightarrow$  отлук кас к 2-м  $a=d_2$   
 окр окр

$A(a' = \frac{21}{5}; 0)$

$\Delta CLR \sim \Delta CLA \frac{CR}{CL} = \frac{CA}{LA}$

$\frac{CR}{CA} = \frac{CL}{LA} \Rightarrow CR = \frac{9 \cdot \sqrt{21^2 - 3^2}}{21 - 3}$



$\rightarrow$  отлук кас к 2-м окр  $a=a_1$

пусть  $x+3ay-7b$  - ка-ца  
 $g(x) = x^2+y^2=9$  и  
 $h(x) = (x+7)^2+y^2=2$

если  $a \leq d_1$  то решение в точке пересек с 2-м окр меньше 3-х небу

ур-ние кас к  $g(x)$ :

$y = (x-x_0) f'(x_0) + f(x_0)$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot 2x$

$y = \sqrt{9-x^2} = g(x)$

$y = \sqrt{2-(x+7)^2} = h(x)$

$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2-(x+7)^2}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

из (1)  $\Rightarrow$  ур-ние прямой DLR:  $y = \frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{21}{5\sqrt{6}}$  или или  $x = \sqrt{6}y - \frac{21}{5}$

аналогично ур-ние прямой ATR:  $y = -\frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{21}{5\sqrt{6}}$  ~~прямая~~ <sup>м.к</sup>

$$x = -\sqrt{6}y + \frac{21}{5}$$

при  $a \in [-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$  -  
- решений меньше 4-х

если прямая  $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v}$  пр-т  $\vec{u}/z$  т А и  $\forall a \notin [-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$  то кол-во точек пересек - 4 (по 2 у каждой окр) т.к при  $\forall a \notin [-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$

Эв: эта прям пр-т  $\vec{u}/z$  т А, то уу.

Если прямая проходит  $\vec{u}/z$  т А не имеет 4-х пересек,

то ~~совр-на~~ <sup>или</sup> ее // перенос по Oy или по  $\vec{u}$ -н прямая инволюция

и т. пересек т.к от одной из окр-ми прямая будет ур-ся

(если ~~прямая~~ (если прямая пр-т  $\vec{u}/z$  т А и пересек одну окр, <sup>и одной окр  $\vec{u}/z$</sup>  то <sup>когда</sup>

она пересек и др.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15

$$\begin{cases} 6x > 0 \\ 6x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_7^4 (6x)^{-a} = 2 \log_6 x^7 = \log_3 36x^2 - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log_7 y^7 = \log_7 2 (7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_7^4 6x - \frac{7}{2} \log_6 x^7 + 4 = 0 \\ \log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_7 y^7 + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \log_7 6x \\ b = \log_7 y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^5 + 8a - 7 = 0 \\ 2b^5 + 8b + 7 = 0 \end{cases} \leftarrow \text{пусть } a_1 \text{ и } b_1 \text{ — корни}$$

В-ем это у ур-я  $2a^5 + 8a - 7 = 0$  — один корень.  $(a^5 = -\frac{8}{20} + 1, a^5 > 0)$   
 $f'(a) = 10a^4 + 8, f'(a) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  не более одного корня

Заметим  $f(a) = f(-a) \Rightarrow b = -a \Rightarrow \log_7 y = -\log_7 6x$   
 $y = \frac{1}{6x} \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$

Заметим это если  $f(a_0) = 0$  то  $f(-a_0) = -7$  и  $2$   
 $2a_0^5 + 8a_0 = 7$  то  $2(-a_0)^5 + 8(-a_0) = -7 \Rightarrow$  если  $a_0$  — корень I то  
 $-a_0$  — корень II то  $2b^5 + 8b + 7 = 0 \Rightarrow a = -b, \log_7 x = -\log_7 y$

$$y = \frac{1}{6x}; xy = \frac{1}{6}$$

Ответ  $xy = \frac{1}{6}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

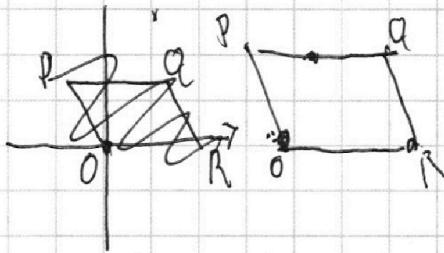
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6  $m$  параллелограмм огранич. прямы  $OR, PQ, OP$  и  $QR$

$m$ -е  $m$  ур-ние этих прямых  $OR: y=0$



$PQ: y=68$

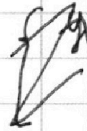
$OP: y=-4x$

$QR: y=76-4x$

$m$ -е  $m$  с коор  $x_1, y_1$  лежит внутри  $\square \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y_1 \geq -4x_1 \\ y_1 \leq 76-4x_1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_1 \leq 68 \end{cases}$$

$m$ -е по оси



$$\begin{cases} 0 \leq y_2 + 4x_2 \leq 76 \\ 0 \leq y_1 + 4x_1 \leq 76 \end{cases}$$

как Расс-н  $m$  с внутри  $\square: x_c + 4y_c = k \Rightarrow 0 \leq k \leq 76$

если  $40 > k > 36$  то  $4x_c + y_c \leq 40$

$4x_c + y_c < 40$  и

$m$  с не может

если  $k \leq 36$  то аналог.  $m$  с не может быть  $m$  в  $\square$   $m$  с не может быть  $m$  в  $\square$   $m$  с не может быть  $m$  в  $\square$

$4x_2 + y_2 = 76 - 40 + k$

и  $4x_c + y_c + 40 \geq 76 \Rightarrow$

если  $k \geq 40$  то

$m$  с не может быть  $m$   $m$  с не может быть  $m$  в  $\square$

$4x_2 + y_2 \geq 76$  - между и

$m$  с не может быть  $m$  в  $\square$  в макс-ве  $m$  в  $\square$

$4x_1 + y_1 = 40 - k \rightarrow k - 40$

$k > 40$

П. в каждой  $m$  с целочисл. коор на прямой  $y = k - 4x$  при  $k \leq$

можно поставить в ряду только точки на прямой  $y_2 = k - 40 - 4x_2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

если  $k \notin \mathbb{Z}$  то при  $x \in \mathbb{Z} \rightarrow y \in \mathbb{Z} \rightarrow k - 4x \in \mathbb{Z}$  и  $y \notin \mathbb{Z}$  т.е

п.е если на прямой есть т. с целыми коор то  $k \in \mathbb{Z}$

если  $x \in \mathbb{Z}$  то  $y \in \mathbb{Z}$   $k - 4x \in \mathbb{Z} \rightarrow y \in \mathbb{Z}$  т.е для  $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

на прямой  $y = k - 4x$   $\exists$  равно одна т. с целыми коор.  $(x_1; y_1)$

прямая  $y = k - 4x \parallel \mathbb{Q}R$ ; на прямой  $\mathbb{Q}R$  - 18 т. с целыми коор  $\Rightarrow$

на  $\forall$  прямой  $y = k - 4x$  при  $k \in \mathbb{Z}$  - 18 точек т.

$26 \leq k \leq 40 - 237 \Rightarrow 18^2 \cdot 37$  пар точек  $= 10692$  пар  $11988$  пар  
 $\downarrow$   
прямых с  $k \in [0; 36]$

(упорядоченных с  $k \geq 40$  и  $k \leq 36$  - взаимно однозначное соответствие)

Ответ: 11988

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle ABC$   $AM=10$ ;  $BC=10$   $S_{ABC}=60 \Rightarrow AA_1=15$

по формуле медианы  $m = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}$

$AA_1^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$

$AB^2 + AC^2 = 250$   $AB = \sqrt{250 - AC^2}$

$S_{\triangle ABC} = AH \cdot BC \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow AH = 12 = \frac{S_{\triangle ABC}}{AH} = \frac{S_{\triangle ABC}}{AH} = \frac{S_{\triangle ABC}}{AH}$

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AHC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{CH} = \frac{12}{10-x}$

$CH=x \Rightarrow BH=10-x$   $AH = \begin{cases} AB^2 = 100 + x^2 - 20x + 144 \\ AC^2 = x^2 + 144 \end{cases}$

$AB^2 = 250 - 144 - x^2 = 106 - x^2$

$2x^2 - 20x + 138 = 0$   
 $x^2 - 10x + 69 = 0$

$2x^2 - 20x + 112 = 0$

$x^2 - 10x - 56 = 0$

$D = \sqrt{100 + 224} = \sqrt{324} = 18$

$x = 19$   $x = 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow$   $CH = 14$  - правильный ответ

$BB_1 = 15$

$CC_1 = \sqrt{180}$

$AC = \sqrt{340}$   
 $AB = \sqrt{160}$

$AA_1 \cdot CC_1 \cdot BB_1 =$

$= \sqrt{45 \cdot 180} \cdot 15 = 90 \cdot 15 = 1350$

$180 = 9 \cdot 4 \cdot 5$   $\frac{15}{1350}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

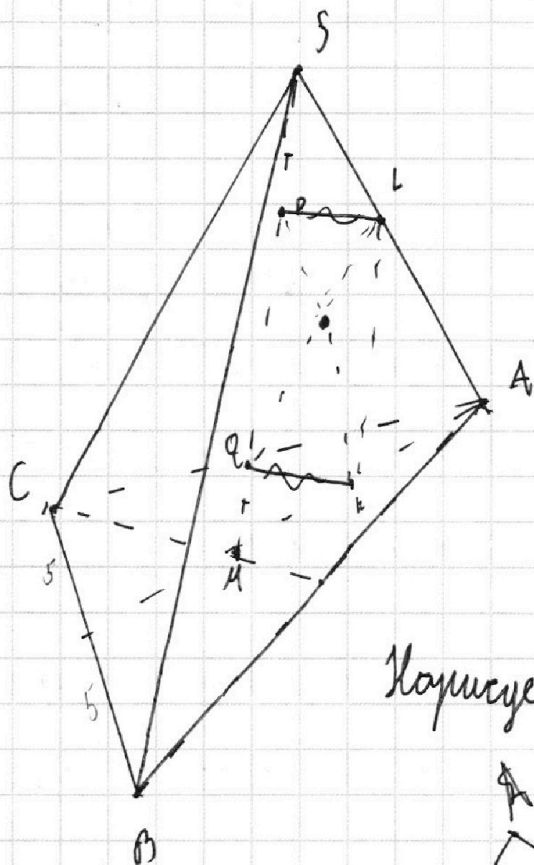
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

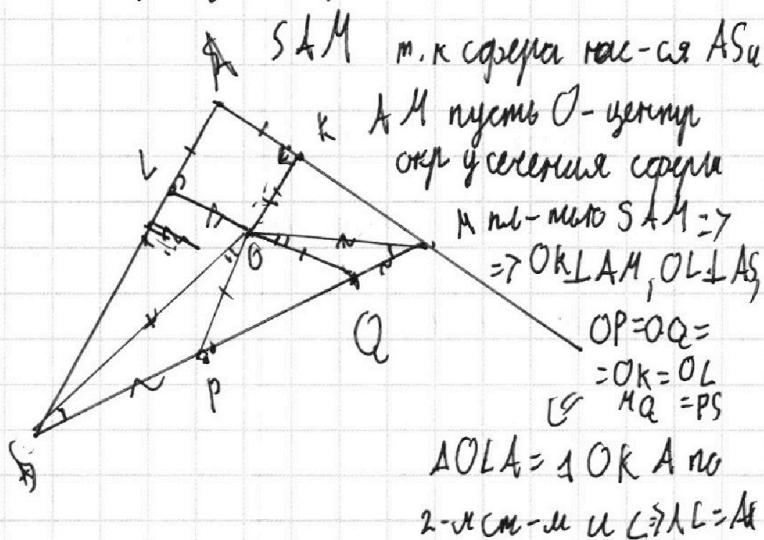
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



AL · A



Нарисуем пр-ую на пл-ти



SAМ м.к. сферы кас-ся ASu

AM пусть O - центр  
окр. усевающей сферы

и пл-ти SAМ ⇒

⇒ OK ⊥ AM, OL ⊥ AS,

OP = OQ =

= OK = OL

⇒ HQ = PS

ΔOLA = ΔOKA по

2-м см-м и ∠L = ∠K

AS = AM = 10

∠ OS = OM ∠ = ΔOSP = ΔOQM по 2-м см-м

и ∠ (∠OPQ = ∠OQP м-р Δ

и ∠ ⇒ ∠OPS = ∠OQM = 180° - ∠OPQ

и ∠ ⇒ SL = MK

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^7 3^{11} 5^{19}$$

$$bc: 2^{13} 3^{15} 5^{18}$$

$$ac: 2^{19} 3^{17} 5^{18} 7^4 3$$

$$\begin{array}{r} \times 289 \\ 37 \\ \hline 2023 \\ 8670 \\ \hline 10693 \end{array}$$

abcd

$$a = 2^x 3^y 5^z$$

$$a = 2^x 3^y 5^z$$

$$c = 2^{2x+9} 3^{y+9} 5^{2z+9}$$

$$b = 2^{7-x} 3^{11-y} 5^{14-z}$$

$$\text{НОД}(ab; bc) = \text{НОД}(b, b)$$

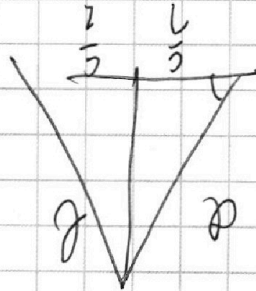
$$(ab, bc) = b(a, c) \Rightarrow$$

$$= W$$

$$\frac{13+x}{2} = \frac{15+y}{3}$$

$$\frac{b}{2} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 74$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 2^8 - 2^2 + 2^0 = 74 \\ \hline 2^8 - 2^2 + 2^0 = 74 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$0h - 0\beta + 0\alpha \quad 2\alpha$$

$$4\alpha - 4\beta - 6\alpha + 4\beta$$

$$5\beta - 0\alpha + 0\alpha$$

$$5\alpha - 0\beta + 0\beta$$

$$C(\alpha + 2\beta)$$

$$C(\alpha - 2\beta)$$

$$2\beta = \frac{2\alpha}{\sqrt{2}} = \alpha \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$4\alpha - 2\beta - 2\alpha + 4\beta$$

$\alpha$

$$2\alpha = 90 - \beta$$

$$\alpha + \beta = 90 - \alpha \quad \beta = 90 - 2\alpha$$

$$180 - 4\alpha + 4\beta$$

$90 - 2\alpha$   
 $9$

$90 - 2\alpha$

$$2\alpha - 2\beta + 2\alpha = 180 - 2\alpha$$

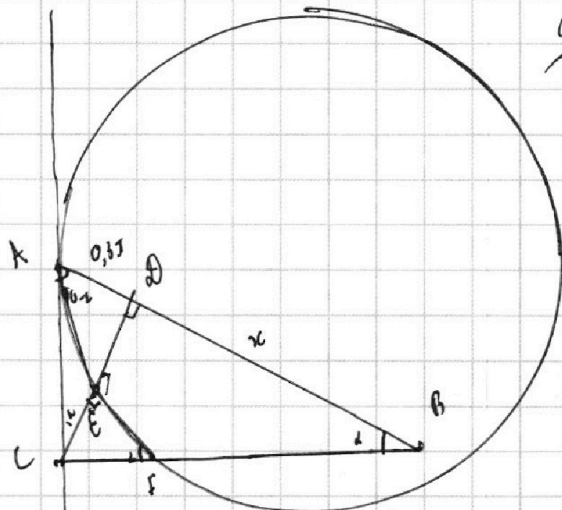
$$2\alpha = 180 - 4\alpha + 2\beta$$

$$2\alpha - 2\beta - 2\alpha = \frac{90}{\sqrt{2}}$$

$2\alpha$

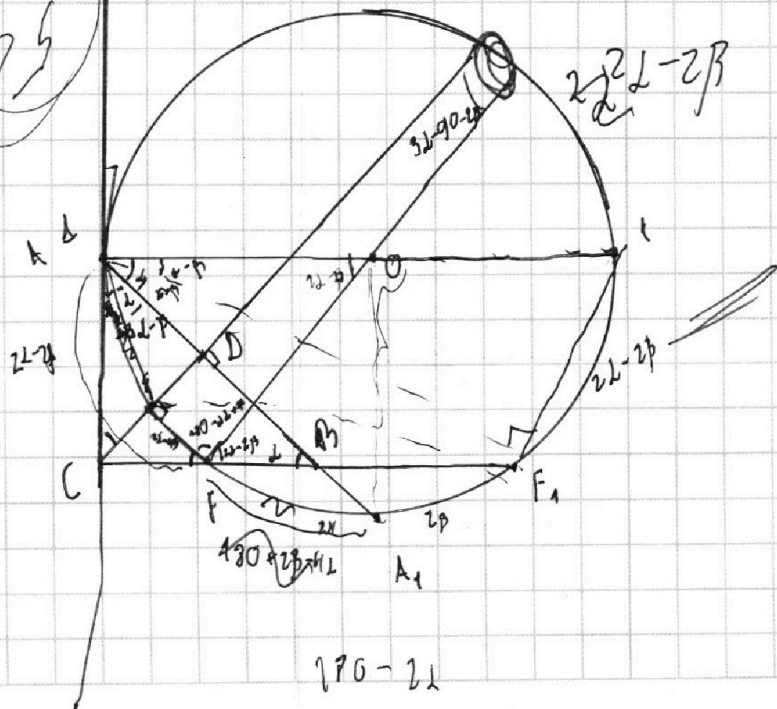
$$6\alpha - 180 - 4\beta$$

$$b = \frac{90}{\sqrt{2}}$$



$$90 - 2\alpha + \beta$$

$90 - 2\alpha$



$$180 - 2\alpha$$



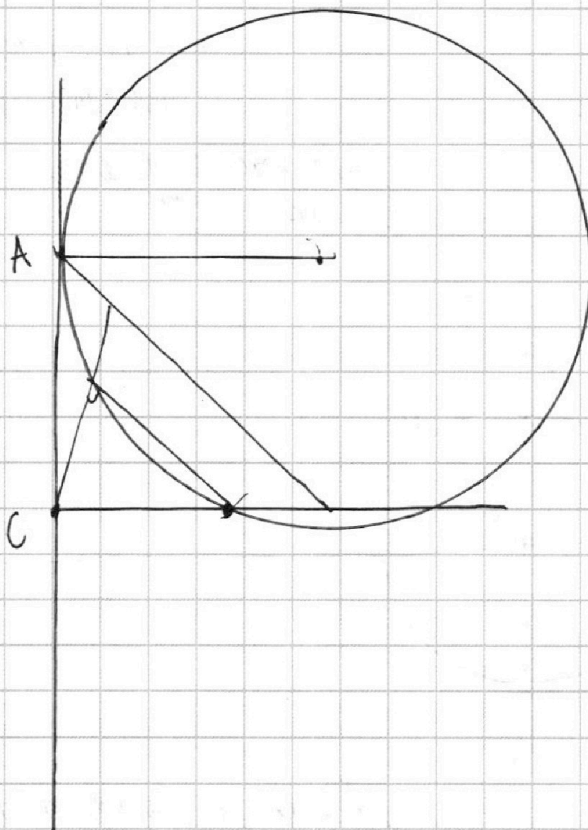
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 34^{\frac{7}{3}} - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4 \end{cases}$$

1  $\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4$

$$\log_7^4(6x) - \frac{5}{2} \log_{6x} 7 + 4 = 0$$

$$a^4 - \frac{7}{2a} + 4 = 0$$

5  $\frac{7}{2}$   $\log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_y 7 + 4 = 0$

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

$$\frac{7}{2} \log_{6x}(7(6x)^4)$$

$\arccos(\sin x) = \frac{3}{2}\pi + x$

$$\log_7 y = \log_7 6x$$

$$y = 6x$$

$$10a^4 + 8 = 0$$

$$a^4 = -\frac{8}{10}$$

$$5 \frac{7\pi}{2} - 5\pi = \frac{3}{2}\pi + x \quad \pi = \frac{7\pi}{3}$$

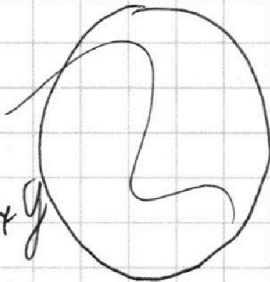
log

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

$$2b^5 + 8b + 4 = 0$$

$$\log_7 6x = -\log_7 y$$

$$\frac{1}{y} = 6x \quad y = x$$



$$a^{\frac{7}{2}}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$1$$

$$\frac{3}{4}$$

$$2^8$$

$$\frac{2}{3}$$

$$1$$

$$\frac{3^5}{5}$$

$$\frac{2^5}{5}$$

$$243$$

$$\frac{5}{3} - 243$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$CF \ y_1 \leq 68$   
 $0 \leq y_2 \leq 68$   
 DR    прямая OP -  
       прямая QR

$-4x_1 + 19 \geq y_1 \geq -4x_1$   
 $-4x_1 + 19 \geq y_2 \geq -4x_1$   
 $y = -\frac{68}{14}x$   
 $y = -\frac{49}{2}x + 19$   
 $y = -4x$   
 $y = -kx + b$   
 $y = -k + 19k$   
 $19k = 68$   
 $k = 4$   
 $y = -4x + 19 \cdot 4$

$C = 10$   
 $a = 7$   
 $b = 6$

$y_1 + x_1$   
 $76 + 19 \geq y_1 + 4x_1 \geq 0$   
 $76 + 19 \geq y_2 + 4x_2 \geq 0$

$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$   
 $4x_2 + y_2$   
 $C = 10$

$C = 8$   
 $a = 6$   
 $b = 5$



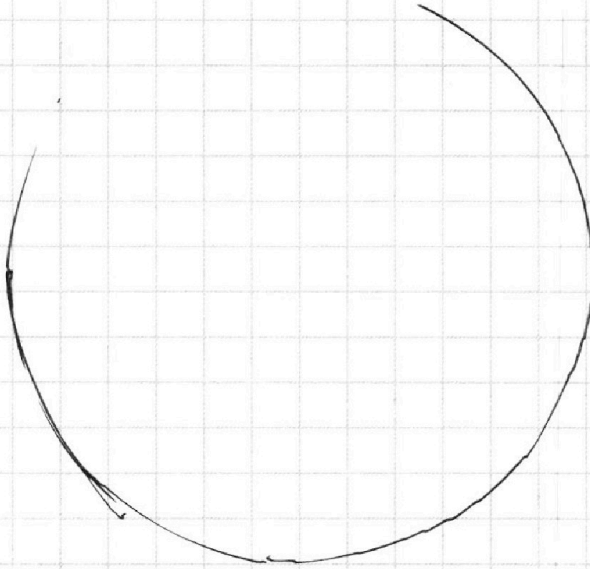
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AC \leftarrow \sin \angle B$$

$$\frac{\sin \angle B}{CE} = \frac{\sin 90^\circ \cdot d}{AE} = \frac{\sin \beta + \sin \alpha \cdot d}{AC}$$

$$\frac{\sin \angle B}{FB} = \frac{\sin 90^\circ \cdot d}{AF} \quad \frac{AF}{AE} = \frac{CF}{ED} = \frac{AC}{AD} = \frac{FB}{CE} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{FB}{CE} = \frac{AF}{AE}$$

$$\frac{CE}{AC} = \frac{FB}{AB}$$

$$\frac{FB}{AB} = \frac{RT \cdot CF}{EF \cdot AB} = \frac{ED \cdot CE}{EC \cdot AB}$$

$$\frac{CF}{EC} = \frac{CB}{CD} = \frac{AC}{AD}$$

$$\frac{CF + FB}{CF} = \frac{DB}{EF}$$

$$FB = \frac{FB}{CF} = \frac{RT}{EF} \frac{ED}{EC}$$

$$\frac{AC \cdot ED}{AD \cdot AB}$$