



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть $v_p(k)$ - это степень вхождения простого
числа p в число k ,

$$\text{тогда } v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b) \text{ и}$$

$$\text{если } ab: p^k, \text{ то } v_p(ab) \geq k \text{ и}$$

тогда

$$\begin{cases} v_2(a) + v_2(b) \geq 15 \\ v_2(b) + v_2(c) \geq 17 \\ v_2(a) + v_2(c) \geq 23 \end{cases} +$$

$$2(v_2(a) + v_2(b) + v_2(c)) \geq 55, +$$

$$v_2(a) + v_2(b) + v_2(c) \geq 28, \text{ т.к. } v_p(k) - \text{целое}$$

и минимум достигается, если:

$$\begin{aligned} v_2(b) &= 5 \\ v_2(a) &= 10 \\ v_2(c) &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} v_7(a) + v_7(b) \geq 11 \\ v_7(b) + v_7(c) \geq 18 \\ v_7(a) + v_7(c) \geq 39 \end{cases}$$

$$v_7(a) + v_7(b) + v_7(c) \geq v_7(a) + v_7(c) \geq 39.$$

Минимум достигается, если

$$\begin{aligned} v_7(b) &= 0 \\ v_7(a) &= 20 \\ v_7(c) &= 19, \text{ т.е.} \end{aligned}$$

$$v_2(abc) \geq 28, v_7(abc) \geq 39 \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

при $b = 2^5$
 $a = 2^{10} \cdot 7^{20}$
 $c = 2^{13} \cdot 7^{19}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Будем обозначать $\text{НОД}(a, b)$ как (a, b)

Дробь $\frac{a}{b}$ несократима $\Rightarrow (a, b) = 1$

Заметим тогда, что $(ab, a+b) = 1$

$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b}$$

Если целочисленная дробь сократима на m , тогда и

$$\frac{9ab}{a+b} : m \text{ сократима на } m,$$

$$\text{но } (ab, a+b) = 1 \Rightarrow$$

$$(9, a+b) : m, \text{ но}$$

$$(9, a+b) \leq 9 \Rightarrow m \leq 9.$$

Максимум достигается при $a=4$,
 $b=5$

$$\frac{9}{4+140} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11} \quad \text{Ответ: } 9$$

⊗ нуль нет ч

$$(ab, a+b) : p,$$

тогда

$$(a+b)b - ab : p,$$

$$\text{тогда } b^2 : p,$$

$$\text{тогда } b : p,$$

$$\text{но } a+b : p \Rightarrow$$

$$a : p \Rightarrow$$

$$(a, b) \neq 1,$$

противоречие

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. AB касается ω , то $OC \perp AB$ и $OC = 7$

Тогда рассмотрим $\triangle ADB$

Внем DC - высоту и $DC = 7$,
радиус отрезка окружности BC

$$\frac{AC}{CB} = \frac{7}{17}$$

Пусть $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABD = \beta$,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{DC \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{DC \cdot \operatorname{ctg} \beta} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{7}{17}$$

$$DB = \frac{DC}{\sin \beta} = \frac{7}{\sin \beta}$$

По Т. синусов:

$$\frac{DB}{\sin \alpha} = 2R = 26, \Rightarrow \frac{7}{\sin \beta \cdot \sin \alpha} = 26 \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{49}{676 \sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\sin^2 \beta}{1 - \sin^2 \beta} = \frac{49}{676 \sin^2 \alpha - 49}, \text{ где } \sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}^2 \beta = \frac{49}{676 \operatorname{tg}^2 \alpha - 49} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{49}{289} \operatorname{tg}^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\frac{49}{289} \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{49}{676 \operatorname{tg}^2 \alpha - 49}$$

Пусть $\operatorname{tg}^2 \alpha = t$

$$\frac{49}{289} t = \frac{49}{676t - 49 - 49t}$$

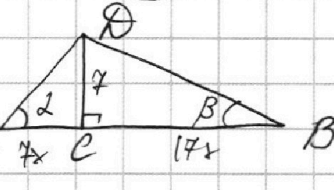
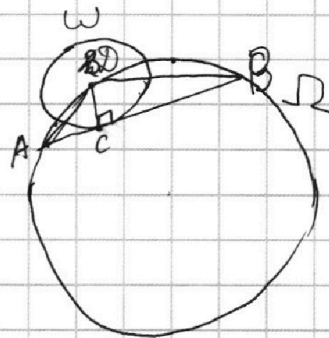
$$627t^2 - 289t - 338 = 0$$

укажем $t = 1$

$$(t - 1)(627t + 338) = 0$$

Заметим, что $\angle DAB > 0$

и OC между прямой, соединяющей
центр и точку, и касательной к этой точке



$\Rightarrow \angle DAB < 90^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} < 0$

а $t = \operatorname{tg}^2 \alpha \Rightarrow$

$\operatorname{tg}^2 \alpha = \pm 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \pm 1 \Rightarrow$

$\alpha = 45^\circ$, тогда

$AC = 7, DC = 17 \Rightarrow$

$AB = 24$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Умножим на сопряжённое

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 - 9x = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$x \neq \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 + \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \end{cases}$$

$$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 2 - 9x \quad | \wedge 2$$

$$12x^2 - 24x + 8 = 4 + 81x^2 - 36x$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0 \quad (4\sqrt{13})^2$$

$$D = 144 + 108 \cdot 69 = 16 \cdot 108 \cdot 69 = 108 \cdot 78 = (4\sqrt{13})^2 \quad x_{1,2} = \frac{12 \pm 4\sqrt{13}}{2 \cdot 69} =$$

~~$$x_{1,2} = \frac{12 \pm 4\sqrt{13}}{138} = \frac{6 \pm 2\sqrt{13}}{69}$$~~

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0, \text{ не подходит, корень отрицательный}$$

$$\frac{6 \pm 2\sqrt{13}}{69}, \text{ корни такие же}$$

ОДЗ: ун первого $(-\infty, 3 - \sqrt{3}) \cup (3 + \sqrt{3}, +\infty)$
у второго x -любый

если $x = \frac{1}{9}$, то

$$3x^2 - 6x + 2 = \frac{37}{27}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = \frac{37}{27} \Rightarrow \text{не подходит}$$

~~$69x^2 - 12x - 4$ не подходит
 $69x^2 - 12x - 8$ не подходит~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 6

Всего уравнение -

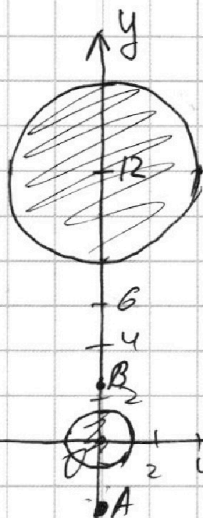
2 окружности

Если первое уравнение -

прямая и она должна

быть касательной к

одной окружности



т.е. только прямая 4 -

2 внешние и 2 внутренние

касательные. Т.к. окружности

симметричны относительно

Oy, то точки пересечения

2 внешних и 2 внутренних

касат. на Oy, при этом

они же 2 центра кон-

тасей, переводящих одну

окружность в другую, т.е.

$\Phi(0; 2; 4)$ - точка пересечения внутренних касательных,
точка B

$(0; -3)$ - точка пересечения внешних касательных
точка A.

Точка B

к касат. к малейшей окружности касательная дуга

$$2,4^2 - 1^2 = 4,76$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



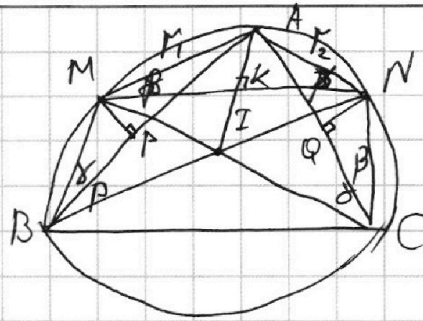
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N7

Если N - середина дуги AC , то
 BN - биссектриса $\angle ABC$, аналогично
 CM - биссектриса \Rightarrow

$BN \cap CM = I$, I - центр вписанной окружности \Rightarrow как
 центр окружности AI



По лемме о треугольнике $AM = MI = BM = r_1$

\wedge
 $AN = NI = NC = r_2 \Rightarrow$

MN - средний перпендикуляр к AI , то есть $MN \perp AI$ и делит пополам.

Пусть $\angle ABN = \beta$, тогда $\angle ABN = \angle ACN = \angle AMN = \beta$.

Пусть $MP \perp AB$ и $P \in AB$,

Пусть $\angle ACM = \alpha$, тогда $\angle ACM = \angle ABM = \angle ANM = \alpha$

$NQ \perp AC$ и $Q \in AC$.

Тогда: ~~$MP = r_1 \cdot \sin \alpha = 5$~~ , по условию
 $NQ = r_2 \cdot \sin \beta = 2,5$, по условию

Пусть $AI \cap MN = K$. Тогда $AK = \frac{r_2}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta = r_2 \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$

$AI = 2AK = 2r_1 \cdot \sin \beta =$
 $= 2 \cdot \frac{5}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

$2,5 \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{5 \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} \Rightarrow$

$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{2}$, т.к. $\sin \beta > 0$
 $\sin \alpha > 0$

$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}}$

Ответ: $5\sqrt{2}$



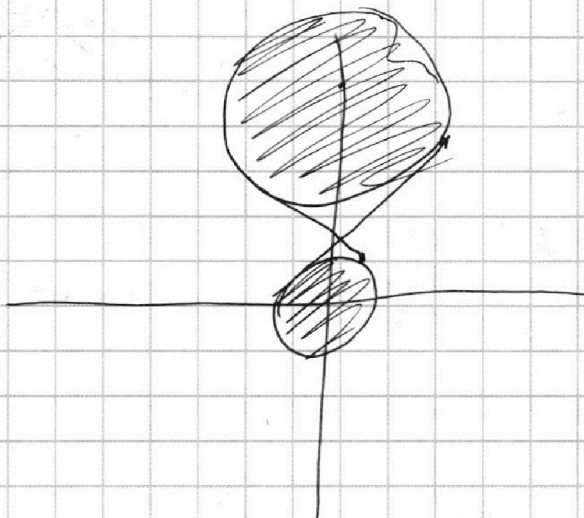
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$9-12$$

$$36-24=12$$

$$3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1 = 1-9x$$

$$1-9x=0$$

$$\frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$3x$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

$$\frac{1}{27} - \frac{6}{9} + 2$$

$$2\sqrt{3x^2-6x+2} = 2-9x$$

$$3x^2-6x+2 = \frac{1}{27} - \frac{6}{9} + 2$$

$$12x^2 - 24x + 8 = 4 + 8/x^2 - 36x$$

$$\frac{1-18+54}{27}$$

$$69x^2 - 12x - 8 = 0$$

$$3x^2+3x+1 = \frac{1}{27}$$

$$23 \cdot 3$$

$$4 \cdot 2$$

$$\frac{1}{27} + \frac{3}{9} + 1 =$$

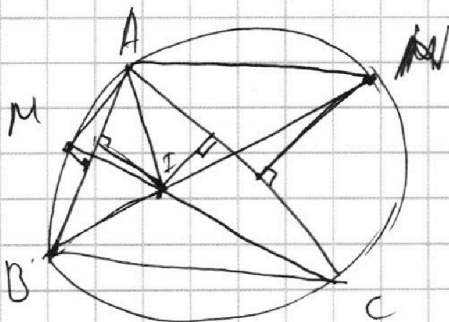
$$144 + 32 - 69$$

$$16(9+2 \cdot 69) = 188$$

$$147$$

$$16 \cdot 147$$

$$= \frac{1+9+27}{27}$$



$$144 + 32 - 69$$

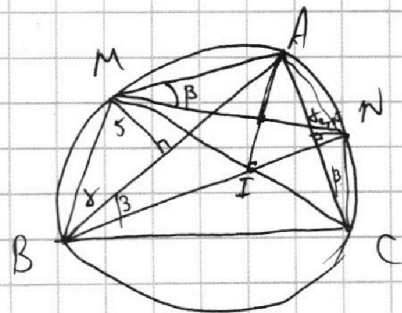
$$144 + 32 - 69$$

$$\sqrt{147} \pm 21$$

$$M_1 =$$

$$2r_1 \cdot \sin \beta = r_2 \cdot \sin \delta$$

$$r_1 = \frac{5}{\sin \delta} \quad r_2 = \frac{2,5}{\sin \beta}$$



$$\frac{52 \sin \beta}{\sin \delta} = \frac{r_1}{r_2} \frac{\sin \delta}{\sin \beta}$$

$$AI = 2r_1 \cdot \sin \beta = 2r_2 \cdot \sin \delta$$

$$r_1 = \frac{5}{\sin \delta} \quad r_2 = \frac{2,5}{\sin \beta}$$

$$\frac{\sin \delta}{\sin \beta} = \sqrt{2} \Rightarrow 2r_1 \sin \beta = \frac{2,5}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \delta}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

$$r_1 = \frac{5}{\sin \delta}$$

$$r_2 = \frac{2,5}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{\sin \delta}{\sqrt{2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{4}{\sin \beta \cdot \sin \alpha} = 26 \quad \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{7}{17} \quad , \tan \alpha = ?$$

$$\Downarrow$$

$$\sin \beta = \frac{7}{26 \sin \alpha} \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{49}{676 \sin^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \beta = 1 - \frac{49}{676 \sin^2 \alpha} = \frac{676 \sin^2 \alpha - 49}{676 \sin^2 \alpha}$$

$$\tan \beta = \frac{49}{676 \sin^2 \alpha - 49}$$

$$\frac{49}{(676 \sin^2 \alpha - 49) \tan^2 \alpha} = \frac{49}{289}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{\left(\frac{676 \cdot \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} - 49 \right) \tan^2 \alpha} = \frac{1}{289}$$

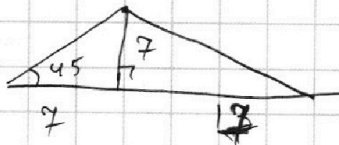
~~$$676 \tan^2 \alpha - 49 \tan^2 \alpha = 289 + 289 \tan^2 \alpha \quad \alpha = \tan \alpha$$~~

$$\frac{676 x^2}{1+x} - 49 x = 289 \quad | \cdot (1+x)$$

$$676 x^2 - 49 - 49 x^2 = 289 + 289 x$$

$$627 x^2 - 289 x - 338 = 0 \quad (x=1)$$

$$6(x-1)(627x+338) \quad x=1$$



$$\begin{array}{r} 169 \\ 7^2 \cdot 49 \\ \hline 228 \\ 109 \\ 289 \\ + 49 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 119 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= \tan \alpha \\ \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} &= \tan^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha &= \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) &= \tan^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha &= \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

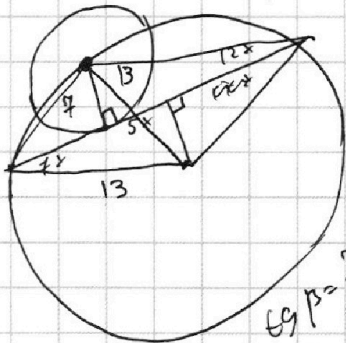


$a =$
 $b =$
 $c =$

$$\begin{cases} \sqrt{2}(a) + \sqrt{2}(b) \geq 15 \\ \sqrt{2}(b) + \sqrt{2}(c) \geq 17 \\ \sqrt{2}(a) + \sqrt{2}(c) \geq 23 \end{cases}$$

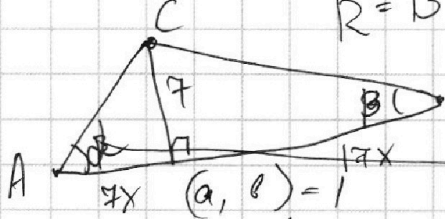
$\frac{abc}{4R^2} = \frac{1}{2} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$
 $ab \cdot \text{tg} \alpha + \text{tg} \beta$

$$\sqrt{2}(a) + \sqrt{2}(b) + \sqrt{2}(c) \geq 28$$



$$\begin{cases} \sqrt{7}(a) + \sqrt{7}(b) \geq 11 \\ \sqrt{7}(b) + \sqrt{7}(c) \geq 18 \\ \sqrt{7}(a) + \sqrt{7}(c) \geq 39 \end{cases}$$

$\frac{7}{\text{tg} \alpha} + \frac{7}{\text{tg} \beta}$
 $\frac{7}{\text{tg} \alpha} + \frac{17}{\text{tg} \beta} = \frac{24}{\text{tg} \alpha}$



$$\sqrt{7}(a) + \sqrt{7}(b) + \sqrt{7}(c) \geq 39$$

$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{a+b} - \frac{9ab}{a+b} = 9$$

$$\frac{7}{\text{tg} \alpha} = \frac{\text{tg} \beta}{\text{tg} \alpha} = \frac{7}{\text{tg} \alpha} \cdot \frac{1}{\text{tg} \alpha} = \frac{7}{\text{tg}^2 \alpha}$$

$$\frac{7}{\text{tg} \beta} = \frac{7}{\text{tg} \beta}$$

$$BC = \frac{7}{\sin \beta}$$

$$ab - (a+b)b = d$$

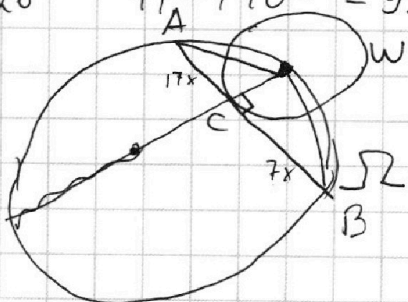
$$ab = d$$

$$\frac{\sin^2 \beta \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta \cdot \sin^2 \alpha} = \frac{49}{25}$$

$$\frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \tan^2 \beta = \tan^2 \alpha$$

$$\frac{7}{\sin \beta \cdot \sin \alpha} = 26$$

$$41 - 140 = -99$$



$$\frac{49 \cos^2 \alpha}{26^2 \cdot \cos^2 \beta \cdot \sin^2 \alpha} = \frac{49}{289}$$

$$27 -$$

$$36 -$$

$$\frac{13 \cdot 12}{9 \cdot 13 \cdot 14} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{27}{8 \cdot 12 \cdot 14} = \frac{27}{1344} = \frac{9}{448}$$

$$36 = \frac{49}{26^2 \cdot \sin^2 \alpha}$$