



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Предположим, что мы нашли искомые значения a, b и c , при которых abc - наименьшее, тогда, 500 , пусть $a = 2^{x_a} \cdot 7^{y_a}$;
 $b = 2^{x_b} \cdot 7^{y_b}$; $c = 2^{x_c} \cdot 7^{y_c}$, где x_a, y_a, x_b, y_b, x_c и y_c целые неотрицательные, т.к. a, b и c натуральные. Тогда по условию:
 $ab = 2^{x_a+x_b} \cdot 7^{y_a+y_b}$; $ac = 2^{x_a+x_c} \cdot 7^{y_a+y_c}$; $cb = 2^{x_c+x_b} \cdot 7^{y_b+y_c}$, тогда

$$x_a + x_b = 14$$

$$x_b + x_c = 17$$

$$x_c + x_a = 20$$

т.к. 2 и 7 взаимнопросты и других множителей у наших чисел нет, т.к. мы можем разделить на доп. множители и abc умножимся, а по предположению оно наименьшее.

Тогда: $2(x_a + x_b + x_c) = 51 \Rightarrow x_a + x_b + x_c = 25,5$, но т.к. все числа натуральные, то все простые множители в их разложении входят в целых неотрицательных степенях, то минимальные возм. сумма показателей степеней равна 26 . Аналогично:

$$y_a + y_b = 10$$

$$y_b + y_c = 17$$

$$y_c + y_a = 37$$

→ т.к. $y_a + y_b + y_c < 37$ - противоречие (т.к. все они неотрицательные), значит $y_a + y_b + y_c \geq 37$

$2(y_a + y_b + y_c) \geq 64 \Rightarrow y_a + y_b + y_c \geq 32$. Таким образом мы определили минимальные возм. суммы показателей степеней двойки и 7 (других простых множителей у чисел a, b и c нет). Отв., что $abc = 2^{x_a+x_b+x_c} \cdot 7^{y_a+y_b+y_c} \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$

Это значение abc достигается при

$$a = 2^9 \cdot 7^{10}$$

$$b = 2^6 \cdot 7^{17}$$

$$c = 2^{11} \cdot 7^{27}$$

Отв.: $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$, след-но минимально возможное значение $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{\cancel{ab} \quad a+b}{2(a-b)^2 - (a+b)^2}$$

Ответ, что при $m=1$ - верно,

Ответ: $m=1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2(x-1)(x-1,5)}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$2x^2-7 \left(2x^2-5x+3 + 2x^2+2x+1 \right) - 2 \cdot \sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = 4-28x+49x^2$$

$$2x^2-7 \left(2x^2-5x+3 \right) \left(2x^2+2x+1 \right) = \left(-45x^2+25x \right)^2$$

$$16x^2 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12 = 445$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На графике построим решение второго уравнения системы:

$((x+8)^2 + y^2 - 1)$ — на графике это окр-ть радиусом 1, с ц. в т.

$(8; 0)$, $(x^2 + y^2 - 4)$ — на графике это окружность с центром

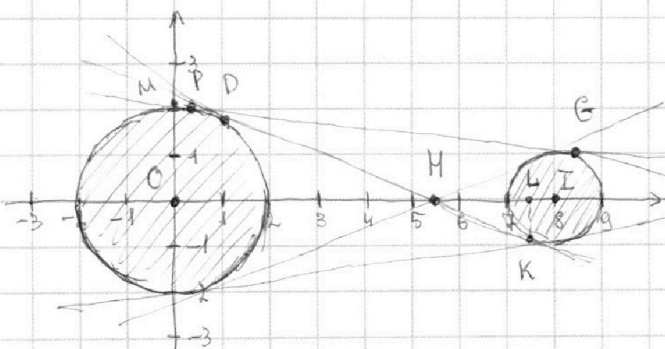
в начале коорд $(0; 0)$ и радиусом 2. Решением будет являться

любая точка не снаружи окружностей (из графика огов, что

они не пересекаются и в этом случае один из множителей

будет ^{не} отрицательным, а другой ^{не} положительным,

след-но их произведение будет не положительным.



$ax - y + 10b = 0$ — прямая.

Огов, что прямая с окруж-
ностью имеет ~~одну~~ ~~или~~ бесконечно много
общих точек, тогда огов,
это наша прямая — касат-
ельная к обоим окружност-
ям.

Очевидно, что если D и K — т. касания внутр. касат.,
то $\triangle ODH \sim \triangle IKH$, (O и I — центры окр-тей H — т. в которой
касательная пересекает x -ось), т.к. $\angle ODH = \angle HKI = 90^\circ$ и $\angle IHK =$
 $\angle ODH$, как вертикальные и коэф. подобия — отношение

радиусов \Rightarrow равен 2: $\frac{OD}{KI} = \frac{OH}{IH} = 2 \Rightarrow OH = \frac{2}{3} OI = \frac{2}{3} \cdot 8$, тогда

По т. Пифагора (т.к. $IH = \frac{1}{3} OI = \frac{1}{3} \cdot 8$) для $\triangle HIK$: $HK = \sqrt{HI^2 - IK^2}$
 $= \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \sqrt{\frac{55}{9}}$. В $\triangle HKI$ $\sin \angle IHK = \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot 8} = \frac{3}{8}$, тогда y

точки K равен: $-HK \cdot \sin \angle IHK = -\sqrt{\frac{55}{9}} \cdot \frac{3}{8} = -\sqrt{\frac{64}{64}}$, а
 x т.к. равен $OH + HL$, где L — проекция т.к на ось X , и

по т. Пифагора: $HL = \sqrt{HK^2 - KI^2} = \sqrt{\frac{55 \cdot 55}{9} - \frac{55}{64}} =$

$= \sqrt{\frac{55(64-9)}{64 \cdot 9}} = \frac{55}{24}$. $OL = HO + HL = \frac{16}{3} + \frac{55}{24} = \frac{183}{24}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $x = \frac{2}{3} \cdot 8$; $y = 0$ - подставим в ур-е прямой 2 значения

$$y = ax + 10b \rightarrow (1) 0 = \frac{16}{3}a + 10b \quad \text{Вычтем из (2) \cdot (1)}$$

$$(2) - \sqrt{\frac{55}{64}} = \frac{183}{24}a + 10b$$

$$(2) - (1) \Rightarrow -\sqrt{\frac{55}{64}} = \frac{55}{24}a \Rightarrow a = \frac{-3\sqrt{55}}{55} \quad \text{Очев, из-за симметрии}$$

относительно Ox $a = \frac{3\sqrt{55}}{55}$

Аналогично для внешних касательных: пусть Z - т. перес. Ox ,

P и G - т. касания, тогда $\triangle ZIG \sim \triangle ZOP$, т.к. $\angle OZP$ - общ.,

$$\angle OPZ = \angle IGZ = 90^\circ \Rightarrow \frac{IG}{OP} = \frac{ZI}{ZO} \Rightarrow \frac{ZI}{ZI+8} = \frac{1}{2} \Rightarrow ZI = 8. \text{ В } \triangle ZIG$$

$$\text{по т. Пифагора } GZ = \sqrt{IZ - IG} = \sqrt{63} \Rightarrow \text{Тогда } \operatorname{tg} \angle GZI = \frac{IG}{GZ} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{63}}. \text{ Пусть прямая } ZGP \text{ пересекает } Oy \text{ в т. } M, \text{ тогда}$$

$$x \text{ точки } M \text{ равен } 0, \text{ а } y \text{ точки } M \text{ равен } \operatorname{tg} \angle MOZ \cdot ZO, \text{ т.к. } MO \perp OZ \Rightarrow y \text{ точки } M \text{ равен } \frac{1}{\sqrt{63}} \cdot 16 = \frac{16}{\sqrt{63}}$$

Подставим коорды точек Z и M в ур-е прямой:

$$y = ax + 10b: (3) 0 = 16a + 10b \quad \text{Вычтем из ур-я (4) ур-я (3)}$$

$$(4) \frac{16}{\sqrt{63}} = 0a + 10b$$

$$\frac{16}{\sqrt{63}} = -16a, \text{ откуда } a = -\frac{1}{\sqrt{63}} \Rightarrow \text{очев, это из-за симметрии}$$

$$\text{реш, относительно } Ox \quad a = \frac{1}{\sqrt{63}} - \text{тоже подходит.}$$

$$\text{Ответ: } a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}} \text{ и } a = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$$



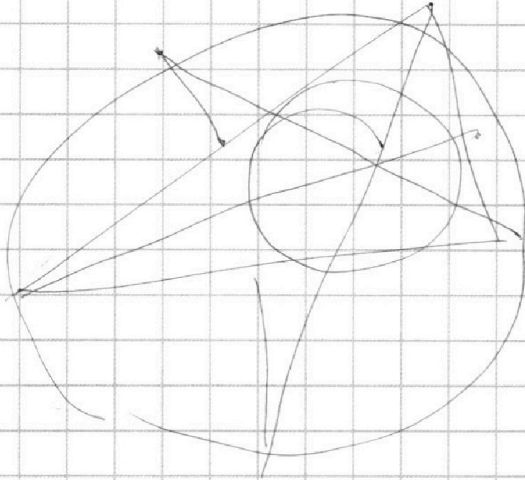
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При $x = \frac{2}{3} \cdot 8$; $y = 0$ - подставим в ур-е прямой:

$$ax - y + 10b = 0 \Rightarrow a \cdot \frac{16}{3} - 0 + 10b = 0$$

$$y = ax + 10b \Rightarrow 0 = a \cdot \frac{16}{3} + 10b$$

Очев, что $a = 0$ нам не подходит, а т.к.

Подставим полученные значения x и y точки K :

$$y = ax + 10b \Rightarrow -\sqrt{\frac{55}{64}} = a \cdot \left(\frac{55}{24} + \frac{16}{3}\right) + 10b$$

возьмем из верхнего ур-я в китке и получим: $0 + \sqrt{\frac{55}{64}} = a \left(\frac{16}{3} - \left(\frac{55}{24} + \frac{16}{3}\right)\right)$ отсюда

$$a = \frac{\sqrt{\frac{55}{64}}}{\frac{128}{24} - \frac{128}{24} - \frac{55}{24}} = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$$

Очев, что из-за симметрии относительно Ox $a = +\frac{3\sqrt{55}}{55}$ тоже подходит (второе

внутр касательная. Найдем a для внешних касательных:

Пусть P и G - точки касаний, Z - т. пересек. с Ox , тогда:

Очев, что $\triangle ZGI \sim \triangle ZPO$, но т.к. $\angle OPZ = \angle IGZ = 90^\circ$ и $\angle PZO$ - общий и $\frac{ZI}{ZO} = \frac{GI}{PO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{ZI}{ZI+8} = \frac{1}{2} \Rightarrow ZI = 8$.

Z - точка с координатами $(16; 0)$. Аналогично $\sin \angle GZI = \frac{GI}{GZ}$

По т. Пифагора для $\triangle GIZ$: $GZ^2 = \sqrt{ZI^2 - IG^2} = \sqrt{64 - 1} = \sqrt{63}$

Тогда $\tan \angle IZG = \frac{IG}{GZ} = \frac{1}{\sqrt{63}}$. Пусть прямая PGZ пере-

секает ось y в т. M , тогда, т.к. $\angle MOZ = 90^\circ$, то $MO = \tan \angle MZO = \tan \angle GZI \cdot ZO = \frac{1}{\sqrt{63}} \cdot 16 = \frac{16}{\sqrt{63}}$ \rightarrow y точки M , а x точки

M равен 0. Подставим в ур-е прямой: $y = ax + 10b \Rightarrow$

(1) $0 = a \cdot 16 + 10b$ Возьмем из (2) y ~~(1)~~ уравнение (1):

(2) $\frac{16}{\sqrt{63}} = 10b$ $\frac{16}{\sqrt{63}} = -16a \Rightarrow a = -\frac{1}{\sqrt{63}}$ и, аналогично из-за

симметрии относительно Ox значение $a = \frac{1}{\sqrt{63}}$ тоже подходит



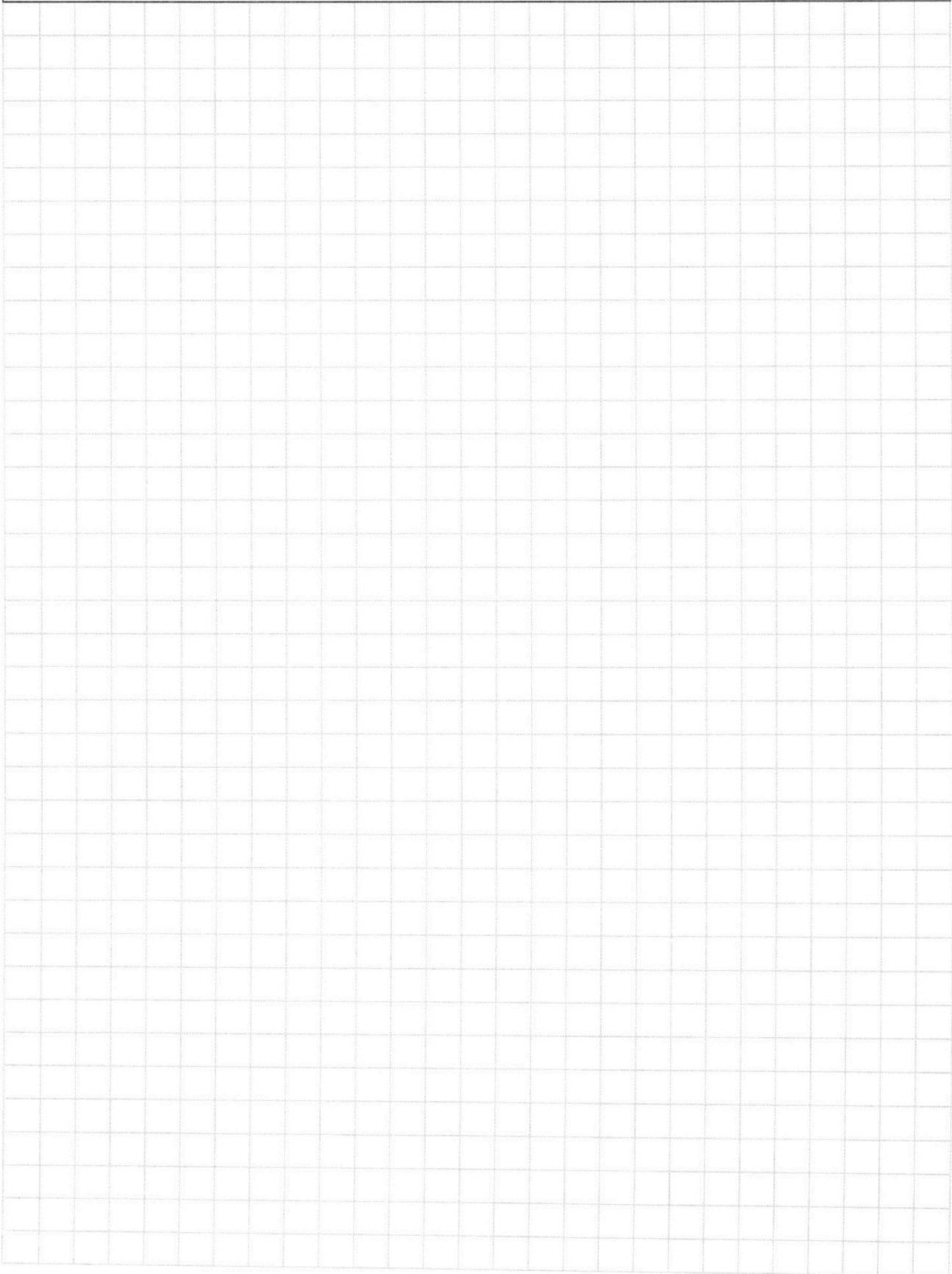
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



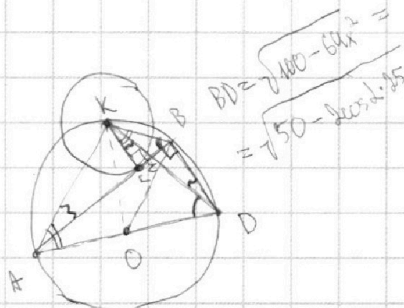
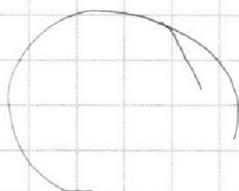
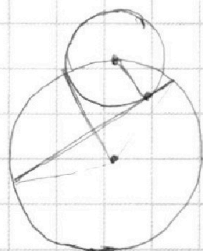
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$100 - 64x^2 = 50(1 - \cos \alpha) \quad AK = \sqrt{49x^2 + 1}$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2$$



След-во $KD = x \cdot AK$, $AK = \sqrt{49x^2 + 1}$ $\frac{KC}{CZ} = \frac{KA}{KZ} = \frac{CB}{KD} = \frac{CK}{AK} = \frac{x}{1}$

$$KD^2 = x^2 \cdot AK^2 = 49x^4 + x^2$$

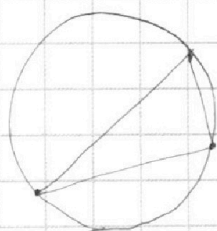
$$\frac{CB}{CK} = \frac{KD}{AK} = \frac{x}{1}$$

Тогда $AD^2 = AK^2 + KD^2 = 49x^4 + x^2 + 49x^2 + 1 = 100$
 $x = x^2$

$$49x^2 + 50x - 99 = 0$$

$$D = 2500 + 99 \cdot 49 \cdot 4 = 19404$$

$$4 \cdot (625 + 99 \cdot 49)$$



$$\begin{array}{r} + 4851 \\ 625 \\ \hline 5476 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 49 \\ 99 \\ \hline 441 \\ + 441 \\ \hline 4851 \end{array}$$

$$9 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} \times 4851 \\ 19404 \\ + 2500 \\ \hline 21904 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 132 \\ 132 \\ \hline 264 \\ + 324 \\ \hline 588 \end{array}$$

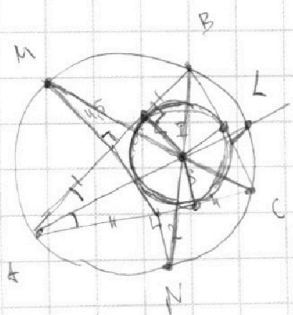
$$\begin{array}{r} 132 \quad 162 \\ 17424 \quad 26244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 76 \\ 76 \\ \hline 456 \\ + 5362 \\ \hline 5776 \end{array}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$$

$$\frac{5 \pm 1}{4} = 1; 1,5$$



$$2(x-1)(x-1,5)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



также это $a = 2^{x_a} \cdot 7^{y_a}$ $b = 2^{x_b} \cdot 7^{y_b}$ $c = 2^{x_c} \cdot 7^{y_c}$

$$a \cdot b = 2^{x_a+x_b} \cdot 7^{y_a+y_b} = \frac{a+b}{a^2-6ab+8b^2-8b^2}$$

$$b \cdot c = 2^{x_b+x_c} \cdot 7^{y_b+y_c} = \frac{a^2+b}{(a-3b)^2-8b^2} = \frac{a+b}{(a-3b-2b)(a-3b+2b)}$$

$$a \cdot c = 2^{x_a+x_c} \cdot 7^{y_c+y_a}$$

$$\begin{aligned} x_a + x_b &= 14 \\ x_b + x_c &= 17 \\ x_a + x_c &= 20 \end{aligned}$$

$$x_a + x_b + x_c$$

$$4 \cdot 8 = 2^2 \cdot 2^3 = 32 = 2^5$$

$$\frac{a+b}{(a-3b)^2-4b^2-4b^2} = \frac{a+b}{(a-5b)(a-b)-4b^2}$$

$$2(x_a + x_b + x_c) = 20 + 17 + 14 = 51$$

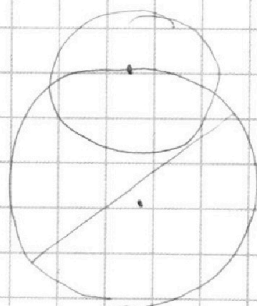
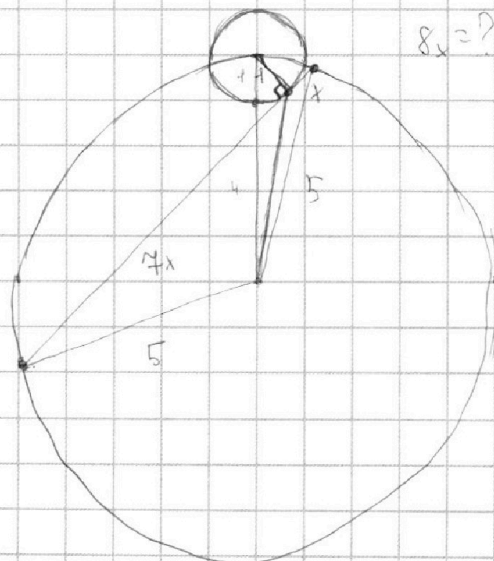
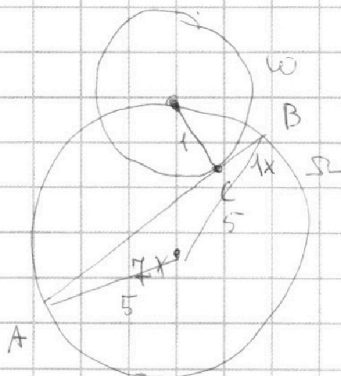
$$4x^2 + 4x + 2$$

$$4x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 4x^3 - 10x^2 + 6x + 2x^2 - 5x + 3$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 \neq 7x - 2 = \sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)}$$

$$a(a-3b) = b(b-3a)$$

$$(4x^2 + 4x + 2) \sqrt{(4x^2 + 4x + 2)} = 16x^4 + 16x^3 + 8x^2 + 16x^3 + 16x^2 + 8x + 8x^2 + 8x + 4 = 16x^4 +$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$16x^4 + 32x^3 + 32x^2 + 16x + 4 = 8x^4 - 12x^3 - 4x^2 + 2x + 6$$

$$8x^4 + 44x^3 + 36x^2 + 14x - 2 = 0$$

$$4x^4 + 22x^3 + 18x^2 + 7x - 1 = 0$$

$$4 + 22 + 18$$

$$4 - 22 + 18 - 7x - 1$$

$$\times 152$$

$$\times 152$$

$$304$$

$$760$$

$$152$$

$$23104$$

$$+ 146$$

$$+ 146$$

$$876$$

$$+ 584$$

$$146$$

$$21316$$

$$\times 148$$

$$\times 148$$

$$+ 1184$$

$$+ 592$$

$$148$$

$$21904$$

$$76 \cdot 2 = 152$$

2500

49

99

$$\times 49$$

$$\times 99$$

$$441$$

$$441$$

$$\times 4851$$

$$\times 4$$

$$19404$$

$$2500$$

$$21904$$

$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$

$$2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 = 12$$

$a_1 = 1$

$$(a+b)^2 = (a-b)^2$$

$$2(a-b)^2 - (a+b)^2$$

$$(1+\sqrt{2}) \cdot (a\sqrt{2} - b\sqrt{2} + a + b)(a\sqrt{2} - b\sqrt{2} - a - b)$$

$$(a(\sqrt{2}+1) + b(1-\sqrt{2}))(a(\sqrt{2}-1) + b(-1-\sqrt{2}))$$

$$ax + y + 10b = 0$$

$$cx + y + 10b = 0$$

Точка $(x; y)$ лежит
внутри (на границе) одной
из окружностей

$$y=0$$

$$y = ax + 10b$$

$$y = ax + 10b$$

$$y = x$$

$$\sin \angle KMI =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot 8} = \frac{3}{8}$$

$$\sqrt{i - \frac{9}{64}} =$$

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 8 \\ - 128 \\ \hline 55 \\ 73 \end{array}$$