



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$\left. \begin{array}{l} ab: 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc: 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \end{array} \right\} \Rightarrow ab \geq 2^{15} \cdot 7^{11}; bc \geq 2^{17} \cdot 7^{18}; ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$$

Пусть $ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot x$; $bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot y$; $ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot z$;
где $(x; y; z) \in \mathbb{N}$; $(x; y; z) \geq 1$

Тогда, $a \cdot b \cdot c \cdot a \cdot c = a^2 \cdot b \cdot c^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot x \cdot y \cdot z \Rightarrow$
 $a \cdot b \cdot c = 2^{27} \cdot 7^{34} \cdot \sqrt{2 \cdot x \cdot y \cdot z}$

$a \cdot b \cdot c$ - минимально, при $\sqrt{2 \cdot x \cdot y \cdot z}$ - минимальном,
а $\sqrt{2 \cdot x \cdot y \cdot z}$ - минимально при $x=1; y=1; z=1$, т.к.
 $x \geq 1; y \geq 1; z \geq y \Rightarrow$
 $\min a \cdot b \cdot c = 2^{27} \cdot 7^{34} \cdot \sqrt{2}$

Ответ: $2^{27} \cdot 7^{34} \cdot \sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~2

$\frac{a}{b}$ - несократима $\Rightarrow \text{НОД}(a; b) = 1$; $\text{НОК}(a; b) = a \cdot b$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ найти max m , при котором:
 $(a+b) \bmod m = 0 \quad ((a+b) : m)$

$\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$ $a^2-7ab+b^2 \bmod m = 0 \quad ((a^2-7ab+b^2) : m)$

Физически эту дробь можно сократить на m , где $a+b \geq m \geq -(a+b)$, т.к. после сокращения и числитель, и знаменатель должны остаться целыми числами. нас интересует макс. m , поэтому будем проверять, удастся ли найти такой случай, что $m = a+b$.

Дробь $\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$ можно сократить на $(m = a+b)$ при $9ab : (a+b)$ или же $(a+b) : 9ab$, т.е. $(a+b) : 9$, а таких чисел

очень много: пример: $2; 7 : \frac{2+7}{2^2-7 \cdot 2 \cdot 7+49} = \frac{9:9}{-45:9}$ или же

$4; 5 : \frac{4+5}{4^2-7 \cdot 4 \cdot 5+5^2} = \frac{9:9}{-99:9}$) а значит макс. возможное

m - достигнуто и равно $a+b$, ну а в общем случае, $m = 1$

Ответ: при $m = a+b$ (при $(a+b) : 9$)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



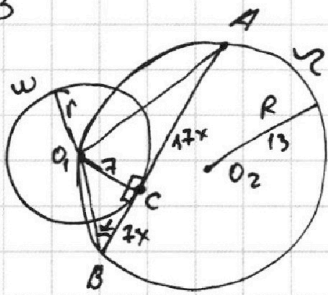
~ 3

$AC:CB =$
 $= 17:7$

$r = 7$

$R = 13$

$AB = ?$



Решение:

1) $O_1C \perp AB$; т.к. O_1C - радиус; AB - касат.

2) Пусть x - коэффициент пропорциональности, тогда

$AC = 17x$; $AB = 7x$

3) $O_1C = 7$; $BC = 7x \Rightarrow$ по т. Пиф.: $O_1B = 7\sqrt{x^2+1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

4) $\triangle O_1BA$ - вписан в $\omega \Rightarrow$ по т. син.: $\frac{AO_1}{\sin \alpha} = 2R$

$AO_1 = \sqrt{7^2 + 17^2 x^2}$ - по т. Пиф.; $AO_1 = \sqrt{49 + 289x^2}$

По т. син.: $\frac{\sqrt{49 + 289x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = 2 \cdot 13 \Rightarrow \sqrt{289x^2 + 49} \sqrt{x^2+1} = 26$

$\sqrt{289x^4 + 338x^2 + 49} = 26$

пачный квадрат

$(17x^2 + 7)^2 = 289x^4 + 338x^2 + 49 \Rightarrow$

$\Rightarrow |17x^2 + 7| = 26 \Rightarrow 17x^2 + 7 = 26 \Rightarrow$

$\Rightarrow 17x^2 = 19 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{19}{17}}$

$AB = 17x + 7x = 24x = 24\sqrt{\frac{19}{17}}$

Ответ: $24\sqrt{\frac{19}{17}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~4

сопряженные

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x \quad | \cdot (\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1 = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$(-9x+1) = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$\left[x = \frac{1}{9} \text{ (A)} \right] \text{ — или это}$$
$$\left[\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \text{ (B)} \right] \text{ — или это}$$

$$(B) \quad 6x^2 + 3x + 3 + 2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} = 1$$

$$6x^2 - 3x + 2 + 2\sqrt{9x^4 - 9x^2 - 9x^2 + 2} = 0$$

$$2\sqrt{9x^4 - 9x^2 - 9x^2 + 2} = -6x^2 + 3x - 2$$

$$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = -39$$

$$D < 0; a(-6) < 0 \Rightarrow$$

$$\text{при любых } x: -6x^2 + 3x - 2 < 0$$

$$\Rightarrow \text{при любых } x: 2\sqrt{9x^4 - 9x^2 - 9x^2 + 2} < 0, \text{ а такого}$$

$$\text{быть не может, т.к. } \sqrt{} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{лучше (B) — не подходит} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.

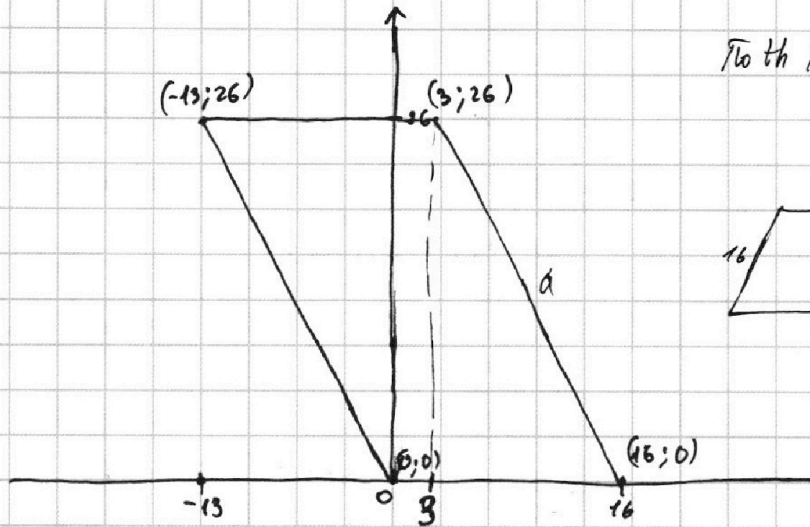
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

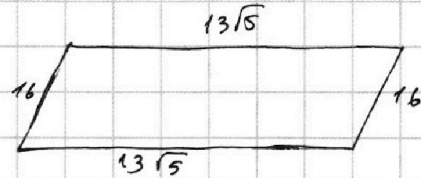
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{По теореме Пифагора: } \sqrt{13^2 + 26^2} = a$$

$$a = \sqrt{13^2 + 4 \cdot 13^2} = 13\sqrt{5}$$



$$(2x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14 \quad A$$

Для решения необходимо посчитать все ~~возможные~~ точки с целыми координатами в этой параллели (K); посчитать все-возможные точки, являющиеся решениями ур-ня A ~~(A)~~ и при этом в этой параллели. Таких, что $0 \leq (y_1; y_2) \leq 26$; $^{13} \leq (x_1; x_2) \leq 16$ (M)

$$\text{и воспользоваться формулой } C = \frac{K!}{(K-M)! \cdot M! \cdot 2!}$$

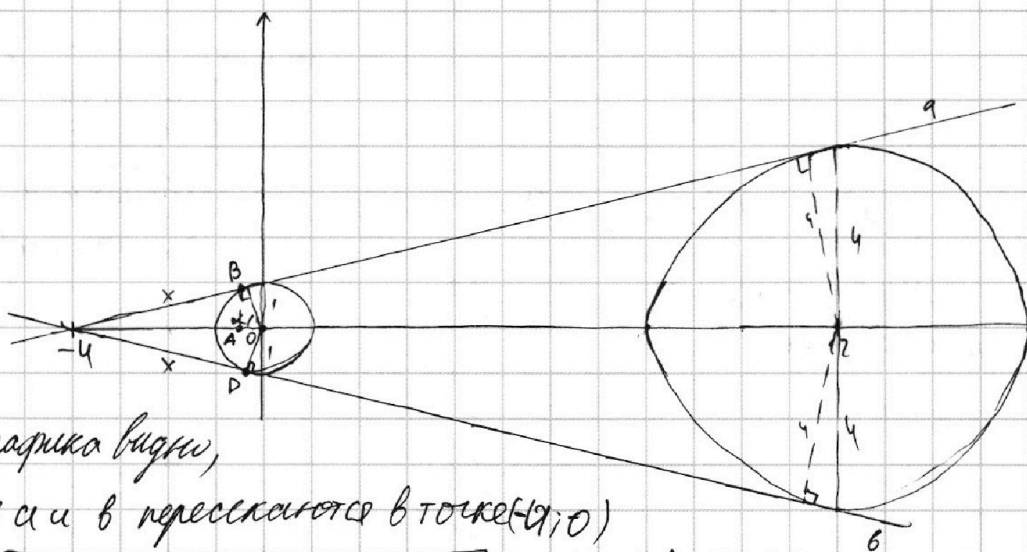
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Из рисунка видно,

что прямые a и b пересекаются в точке $(-4; 0)$

По т. Пиф.: $r^2 + x^2 = u^2 \Rightarrow x = \sqrt{15} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow$

т. А имеет коорд. $(-0,25; 0)$; $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow$

\Rightarrow т. В $\in a$ имеет коорд. $(-0,25; \frac{\sqrt{15}}{4})$.

$y = -a \cdot x + 8b$; $\begin{cases} 0 = -a \cdot (-4) + 8b \\ \frac{\sqrt{15}}{4} = -a \cdot (-0,25) + 8b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a = 8b \\ \sqrt{15} = a + 32b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2b \\ \sqrt{15} = a - 0,5a - 32 \end{cases}$

Коорд. т. D: $(-0,25; -\frac{\sqrt{15}}{4})$ - в силу симметрии.

$y = -a \cdot x + 8b$ $\begin{cases} 0 = -a \cdot (-4) + 8b \\ -\frac{\sqrt{15}}{4} = -a \cdot (-0,25) + 8b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -0,5a \\ -\sqrt{15} = a + 32b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{15} = a - 16a \\ \sqrt{15} = -15a \\ a = \frac{\sqrt{15}}{-15} = -\frac{1}{\sqrt{15}} \end{cases}$

Система будет иметь ровно

2 решения, при x когда прямая будет касаться двух окружностей
и $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y - 12^2 = 16$, т.е. при $a = -\frac{1}{\sqrt{15}}$; $a = \frac{1}{\sqrt{15}}$

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{15}}$; $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

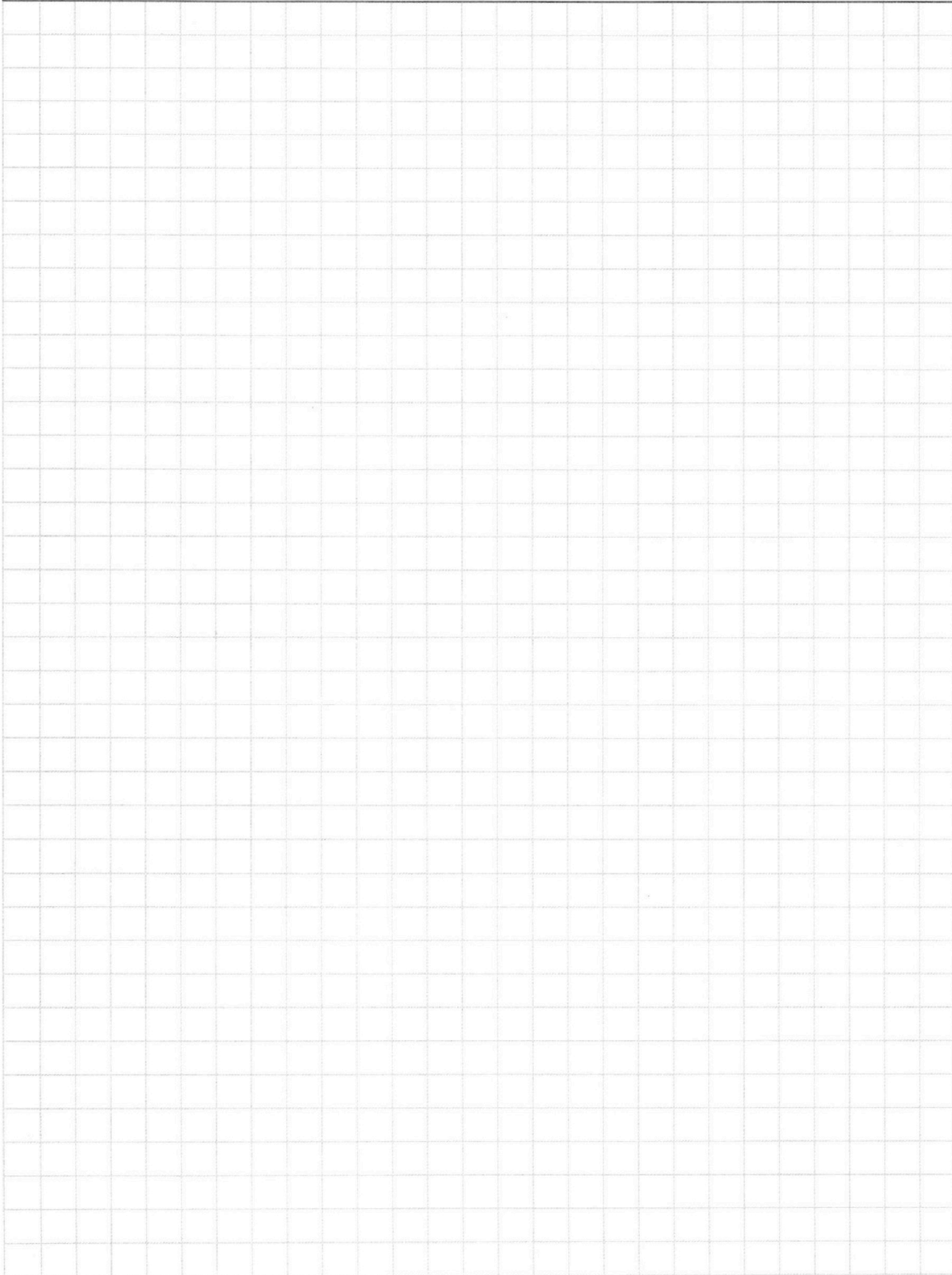
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



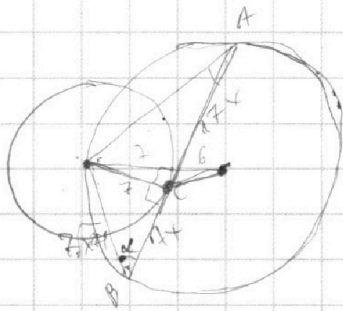
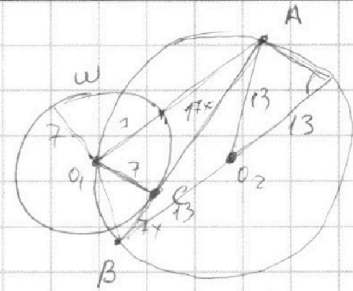
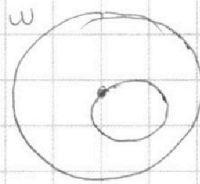
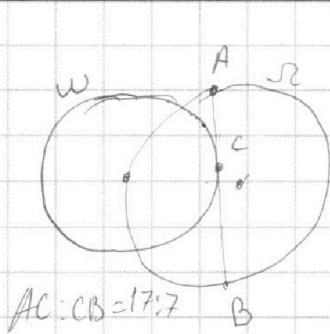
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



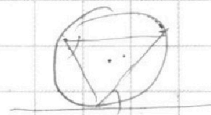
$$\sqrt{49+289x^2}$$

$$119x^2=7$$

$$x^2 = \sqrt{\frac{7}{119}} = \sqrt{\frac{1}{17}}$$

$$\sqrt{49+289x^2}$$

$$\sqrt{49x^2+49} = 7\sqrt{x^2+1}$$



$$7\sqrt{x^2+1}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{x}$$

$$\cos \alpha =$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{1}{x^2} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 179 \\ \hline 2989 \end{array}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{\sqrt{49+289x^2} \sqrt{x^2+1}}{1} = 26$$

$$(49+289x^2)(x^2+1) =$$

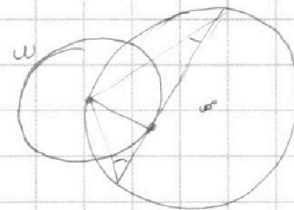
$$49x^2 + 49 + 289x^4 + 289x^2 = 676$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$x^2 = t$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^3 - 3x - 1 = (t-9x) \left(\sqrt{3x^2+6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} \right)$$

$$(-9x+1)$$



$$\begin{array}{r} 3 \\ 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$17x^2 + 17^2$$

$$\cos$$

$$576x^2 = 49 + 289x^2 + 49x^2 + 49 -$$

$$576x^2 - 338x^2 = 96 - 2 \cdot \sqrt{(x^2+1)(49+289x^2)} \cdot \cos \alpha$$

$$238x^2 = 96 - 2 \sqrt{289x^4 + 338x^2 + 49} \cdot \cos \alpha$$

$$119x^2 = 49 - \cos \alpha \cdot \sqrt{289x^4 + 338x^2 + 49}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases}
 abc \\
 ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot x \\
 bc = 2^{17} \cdot 7^{16} \cdot y \\
 ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot z
 \end{cases}$$

$$\frac{c}{a} = 2^2 \cdot 7^7$$

$$64 | a; 2^5$$

$$\frac{a}{b} = 2^6 \cdot 7^{11}$$

$$108 | b; 3^3 \cdot 2$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot \frac{b}{a} = \frac{108}{64} \cdot \frac{27}{16}$$

$$\frac{c}{b} = 2^2 \cdot 7^7$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot x$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{16} \cdot y$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot z$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc$$

$$\begin{array}{r}
 a+b \\
 \hline
 a^2 + 2ab + b^2 \\
 \hline
 525 \\
 5625
 \end{array}$$

$$D = 49b^2 - 4b^2 = 45b^2$$

$$a_{1,2} = \frac{7b \pm \sqrt{45}b}{2} = \frac{7b \pm 3\sqrt{5}b}{2}$$

$$\frac{a+b}{(a - \frac{7b + 3\sqrt{5}b}{2}) / (a - \frac{7b - 3\sqrt{5}b}{2})}$$

$$\frac{c}{a} = 2^2 \cdot 7^7 \cdot \frac{y}{x}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\frac{a}{b} = 2^6 \cdot 7^{11} \cdot \frac{z}{y}$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 = 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} + 18x^2 - 18x$$

$$6x^2 - 3x + 2 = 2\sqrt{9x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 18x^2 - 18x^2 + 6x + 6x^2 + 6x^2 + 2} + 18x^2 - 18x$$

$$6x^2 - 3x + 2 = 2\sqrt{9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2} = 81x^2 - 18x$$

$$-2\sqrt{9(x^4 - x^3 + x^2) + 2} = 75x^2 - 15x - 2$$

$$-4(9x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 2) = 75^2 x^4 + 225x^2 + 4 - 30 \cdot 75x^3 - 4 \cdot 75x^2 + 30 \cdot 2x$$

$$-36x^4 + 36x^3 + 36x^2 - 8 = 5625x^4 + 225x^2 - 2250x^3 - 300x^2 + 60x$$

$$5661x^4 + 189x^2 - 2286x^3 - 300x^2 + 60x + 8 = 0$$

$$5661x^4 - 111x^2 - 2286x^3 + 60x + 8$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a \cdot b = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$b \cdot c = 2^{47} \cdot 7^{18}$$

$$a \cdot b \cdot c = 2^{27} \cdot 7^{34}$$

$$a \cdot c = 2^{23} \cdot 7^{29}$$

$$\frac{c}{a} = 2^2 \cdot 7^7$$

НОК НОД

$$\frac{7+7}{4+49-7 \cdot 7} a = 1$$

$$\frac{a}{b} = 2^6 \cdot 7^{11}$$

$$= \frac{9}{53-98} = \frac{9}{-45} b = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$a \cdot b \cdot c = 2^{38}$$

$$\frac{c}{b} = 2^8 \cdot 7^{18}$$

$$c = 2^{23} \cdot 7^{29}$$

$$a^2 + b^2 < > 7ab$$

$$a^2 + b^2 - 7ab < > 0$$

$$(a+b)^2 - 2ab - 7abc < > 0$$

$$(a+b)^2 - 9ab < > 0$$

$$\text{НОД}(ab; bc; ac) = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$\text{НОК НОД} = (abc)^2$$

$$\text{НОК}(ab; bc; ac) = 2^{23} \cdot 7^{29}$$

$$2^{38} \cdot 7^{50} = (abc)^2$$

$$3; 18; 8$$

$$10000 + 40000$$

$$\text{НОД}(3; 18; 8) = 1$$

$$7 \cdot 100 \cdot 200 = 140000$$

$$\frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{c}{b}$$

$$a+b < > 3\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{3} < > \sqrt{ab}$$

$$\text{НОК}(3; 18; 8) = 72$$

$$\frac{c}{a} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b}$$

$$\frac{6}{7} :$$

$$a(a-35b) + b(b-35a)$$

$$\frac{90}{81+100-70 \cdot 9}$$

$$4; 5$$

$$(a+b) : m$$

$$a+b : m \quad \frac{90}{181-639}$$

$$9$$

$$a^2 - 7ab + b^2 : m$$

$$36+109 = 85$$

$$16+25-7 \cdot 20 = \frac{9}{-99}$$

$$\frac{7}{3}$$

$$16+25 = 41$$

$$42-7$$

$$\frac{3}{4+9-7 \cdot 6} = \frac{5}{-29}$$

$$\frac{13}{36+49-6 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{13}{85-294} = \frac{13}{-209}$$