МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Допустим, что одно из чисел a, b, c имеет простые делители, отличные от 2 и 7. Тогда если мы ~~раз~~ уберём эти делители, то на условия на делимость это никак не повлияет, а произведение abc уменьшится. Тогда представим числа a, b, c в виде

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}$, где $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3 \in \mathbb{N}_0$.

$b = 2^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}$, $ab = 2^{\alpha_1+\alpha_2}\cdot 7^{\beta_1+\beta_2}$, тогда $ab \vdots 2^{15}\cdot 7^{11}$ можно записать

$c = 2^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3}$, как $\alpha_1+\alpha_2 \geq 15$ и $\beta_1+\beta_2 \geq 11$.

Т.о.,

$$+\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 \geq 15, & \beta_1+\beta_2 \geq 11, \\ \alpha_2+\alpha_3 \geq 17, & \beta_2+\beta_3 \geq 18, \\ \alpha_1+\alpha_3 \geq 23, & \beta_1+\beta_3 \geq 39, \end{cases} \Rightarrow \beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 39$$

$2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \geq 55$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 27{,}5$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq 28$

Из этих двух неравенств получаем, что
$abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \geq 2^{28}\cdot 7^{39}$

Пример: $a = 2^{10}\cdot 7^{20}$, $b = 2^{5}\cdot 7^{0}$, $c = 2^{13}\cdot 7^{19}$.

$ab = 2^{15}\cdot 7^{20} \vdots 2^{15}\cdot 7^{11}$; $abc = 2^{28}\cdot 7^{39}$

$bc = 2^{18}\cdot 7^{19} \vdots 2^{17}\cdot 7^{18}$;

$ac = 2^{23}\cdot 7^{39} \vdots 2^{23}\cdot 7^{39}$;

Ответ: $2^{28}\cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Сокр дробь~~ №2.

Если $НОД(x;y)=z$, то дробь $\frac{x}{y}$ сокращается на z, а если $\frac{x}{y}$ несократима, то $НОД(x,y)=1$.

Если $\cancel{\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}}$ $НОД(a+b;a^2-7ab+b^2)=c$, то c – наибольшее возможное число, на которое можно сократить дробь.

$a^2+b^2-7ab=a^2+2ab+b^2-2ab-7ab=(a+b)^2-9ab.$

$НОД(a+b;(a+b)^2-9ab)=НОД(a+b;-9ab)$ по свойствам НОД.

$НОД(a+b;ab)=1$, т.к. $НОД(a;b)=1$ $\Rightarrow$ ~~a+b~~ $НОД(a+b,b)=1$
и
$НОД(a+b,a)=1$

Тогда $НОД(a+b;9ab)\le 9$. $\Rightarrow$ дробь можно сократить на $m\le 9$.

Пример: $a=4$, $b=5$.

$$\frac{4+5}{4^2-7\cdot4\cdot5+5^2}=\frac{9}{16+25-140}=\frac{9}{41-140}=\frac{9}{-99}$$, сокращается на 9.

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4

Заметим, что $3x^2-6x+2-(3x^2+3x+1)=1-9x$. Тогда

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x=(\sqrt{3x^2-6x+2})^2-(\sqrt{3x^2+3x+1})^2$. Если

$a=\sqrt{3x^2-6x+2}$, $b=\sqrt{3x^2+3x+1}$, то

$a-b=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$(a-b)(a+b-1)=0 \Rightarrow 1)\ a-b=0$ или $2)\ a+b-1=0$

1) $a-b=0 \Rightarrow 1-9x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{9}$.

$\sqrt{3\cdot\frac{1}{9^2}-6\cdot\frac{1}{9}+2}-\sqrt{3\cdot\frac{1}{9^2}+3\cdot\frac{1}{9}+1}=\sqrt{\frac{1}{27}-\frac{2}{3}+2}-\sqrt{\frac{1}{27}+\frac{1}{3}+1}=\sqrt{\frac{1}{27}+1\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{27}+1\frac{1}{3}}=0$

значит $x_1=\frac{1}{9}$ – корень уравнения

2) $a+b-1=0$.

$\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1$ (*)

$(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1})^2=1^2$

$3x^2-6x+2+2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}+3x^2+3x+1=1$

$6x^2-3x+2=-2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}$ (**)

$(6x^2-3x+2)^2=4(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)$

$36x^4-18x^3+12x^2-18x^3+9x^2-6x+12x^2-6x+4=4(9x^4-18x^3+6x^2+9x^3-18x^2+6x$
$+3x^2-6x+2)$

$36x^4-36x^3+\cancel{33}^{33}x^2-12x+4=36x^4-36x^3-36x^2+8$

$69x^2-12x-4=0$

$\frac{D}{4}=36+4\cdot69=36+276=312$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x_2 = \frac{6-\sqrt{312}}{69}$ $(\sqrt{312} \leq 18)$

$x_3 = \frac{6+\sqrt{312}}{69}$

Запишем условия, которые должны выполнятся для корней.

Во-первых, $3x^2-6x+2 \geq 0$ и $3x^2+3x+1 \geq 0$, т.к. выражения под корнем не должны быть отрицательными

$3x_2^2-6x_2+2 = \underset{\overset{\vee}{0}}{3\cdot\frac{(6-\sqrt{312})^2}{69^2}} - \underset{\overset{\vee}{0}}{6\cdot\frac{6-\sqrt{312}}{69}} + \underset{\overset{\vee}{0}}{2} \geq 0$

$3x_2^2+3x_2+1 = 3\cdot\frac{(\sqrt{312}-6)^2}{69^2} - 3\cdot\frac{\sqrt{312}-6}{69} + 1;=$

$17 < \sqrt{312} < 18$, $11 < \sqrt{312}-6 < 12$, $33 < 3(\sqrt{312}-6) < 36$,

$3\cdot\frac{\sqrt{312}-6}{69} < 1 \Rightarrow 1-3\cdot\frac{\sqrt{312}-6}{69} > 0 \Rightarrow 3x_2^2+3x_2+1 \geq 0$;

$3x_3^2-6x_3+2 = 3\cdot\frac{(6+\sqrt{312})^2}{69^2} + 2\left(-3\cdot\frac{6+\sqrt{312}}{69}+1\right);=$

$= \frac{(6+\sqrt{312})^2}{69\cdot 23} - \frac{2\cdot(6+\sqrt{312})}{23} + 2 = \frac{36+312+12\sqrt{312}-828-128\sqrt{312}+3174}{1587} =$

$= \frac{2594-116\sqrt{312}}{1587} > 0$ $\quad 2088 = 116\cdot 18 > 116\sqrt{312}$

$3x_3^2+3x_3+1 = \underset{\overset{\vee}{0}}{3x_3^2} + \underset{\overset{\vee}{0}}{3\cdot\frac{6+\sqrt{312}}{69}} + \underset{\overset{\vee}{0}}{1} > 0$

Во-вторых, я дважды возводил уравнения в квадрат, поэтому нужно проверить знаки двух сторон выражений.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*). $\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1$ – обе части больше нуля,

проверка не нужна

**) $6x^2-3x+2=-2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}$ – корень неотрицательный,

$6x^2-3x+2\le 0.$ значит, правая часть ≤ 0,

тогда и левая должна быть ≤ 0.

$6x_2^2-3x_2+2=6\cdot\frac{(\sqrt{312}-6)^2}{69^2}-3\cdot\left(\frac{6-\sqrt{312}}{69}\right)+2>0$, значит, x_2

$\quad \vee\!/ 0 \quad \vee\!/ 0 \quad \vee 0$ не является корнем.

$6x_3^2-3x_3+2=6\cdot\frac{(\sqrt{312}+6)^2}{69^2}-3\cdot\frac{(\sqrt{312}+6)}{69}+2=2\cdot\frac{(\sqrt{312}+6)^2}{69\cdot 23}-3\cdot\frac{(\sqrt{312}+6)}{69}{}^{12}$

$=\frac{624+12\sqrt{312}+72-69\sqrt{312}-414+3174}{69\cdot 23}=\frac{3452-57\sqrt{312}}{69\cdot 23}\Leftrightarrow$

$57\sqrt{312}<57\cdot 18=1026$

$\Leftrightarrow\frac{3452-1026}{69\cdot 23}>0\Rightarrow x_3$ не является корнем

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

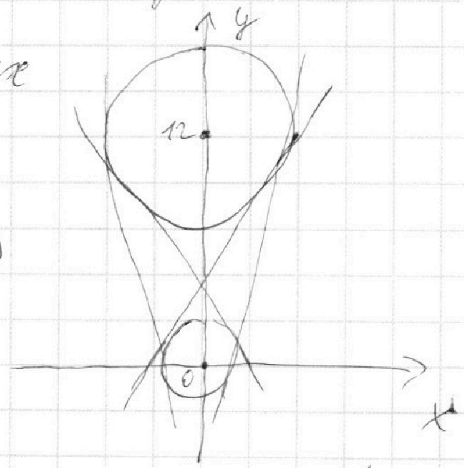
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

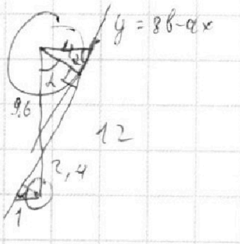
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6 (чистовик!!!)

$x^2+y^2-1=0$ – окружность с центром $(0,0)$ и радиусом 1,
$x^2+y^2-1<0$, если $(x;y)$ внутри окружности, $x^2+y^2-1=0$, если на окружности, и $x^2+y^2-1>0$, если вне окружности.
Аналогично $x^2+(y-12)^2-16$ – окр. с центром $(0;12)$ и радиусом 4. Эти две окружности не пересекаются. Значит $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0$, если точка $(x;y)$ лежит на одной из окружностей либо внутри одной из окружностей.
$ax+y-8b=0 \Rightarrow y=8b-ax$ – прямая. Если у прямой и круга есть 2 общих точки, то у них бесконечно много других общих точек. Значит, прямая $y=8b-ax$ должна касаться обеих окружностей. Таких прямых может быть всего 4, у которых есть 2 симметричные пары (с противопол. наклоном)





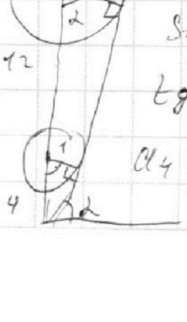
~~sinα =~~

$\cos\alpha = \frac{4}{9,6} = \frac{5}{12}$,

$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \sqrt{\frac{144-25}{144}} = \frac{\sqrt{119}}{12}$

$a_1 = tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{119}}{5}$

$a_2 = -\frac{\sqrt{119}}{5}$



$\cos\alpha = \frac{1}{4}$,

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

$tg\alpha = \sqrt{15} = a_3$,

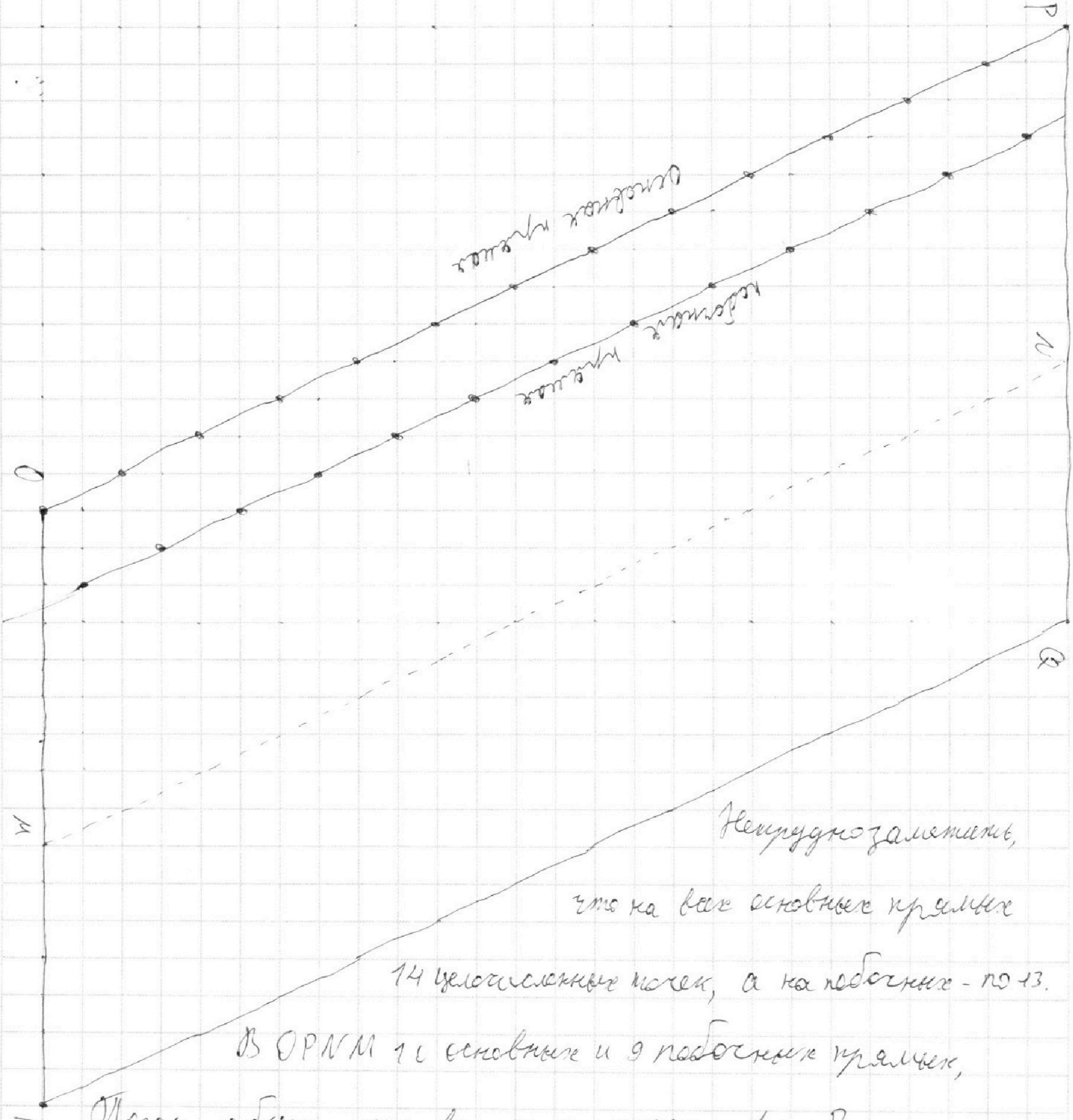
$a_4 = -\sqrt{15}$

Ответ: $\pm\frac{\sqrt{119}}{5};\ \pm\sqrt{15}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Нетрудно заметить, что на всех основных прямых 14 целочисленных точек, а на побочных — по 13.

В OPNM 10 основных и 9 побочных прямых,

Тогда общее кол-во пар точек A и B —

$14 \cdot 10 \cdot 14 + 13 \cdot 9 \cdot 13 = 1960 + 1521 = 3481$

Ответ: 3481

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

Зафиксируем точку $A(x_1; y_1)$. Тогда точки $B(x_2; y_2)$ соответствуют условию $2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$;

$y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 - 2x_2$ — уравнение прямой с наклоном -2.

Найдём на этой прямой точку с координатой y_1.

$y_1 = 14 + 2x_1 + y_1 - 2x_2$

$2x = 14 + 2x_1 \Rightarrow x = 7 + x_1$. Тогда выбранной точке $A(x_1; y_1)$ подходят точки B, которые лежат на прямой, проходящей через точку $(x_1 + 7; y_1)$, и наклоном -2.

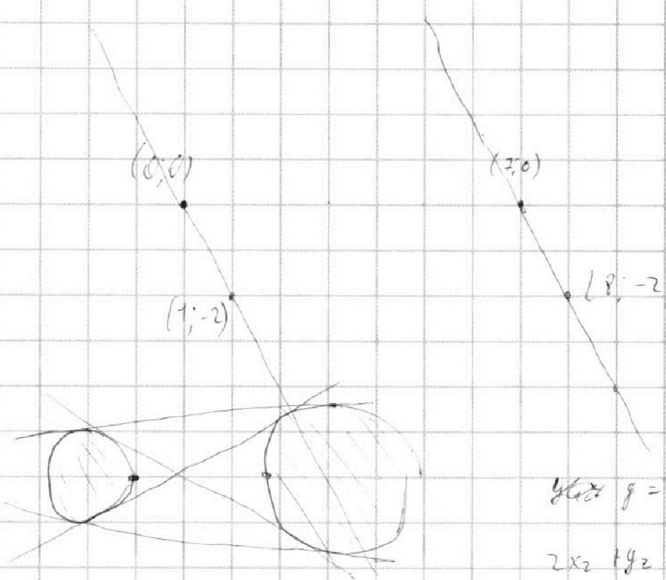
Если мы построим параллелограмм OPQR (на след. странице), то заметим, что его боковые стороны имеют наклон -2, а основания параллельны. Если мы выберем любую точку A в параллелограмме OPNM (NM на 7 клеток левее QR), то мы найдём соответствующую ей прямую точек B. Также заметим, что есть 2 вида прямых с наклоном -2 и целочисленными точками: „основные", у которых есть целые точки на основаниях, и „побочные", у которых нет целых точек на основании. Точке A, лежащей на основной прямой, соответствуют точки B на другой основной прямой, аналогично с побочными.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$y = -2x + b$

$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$

$y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 - 2x_2$

$y_2 = 2(7 + x_1) + y_1 - 2x_2$

$0 = 2(7 + x_1) + y_1 - 2x_2$

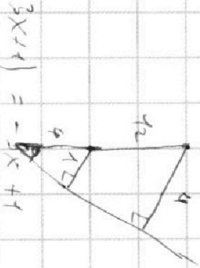
$2x_2 = 2(7 + x_1) + y_1$

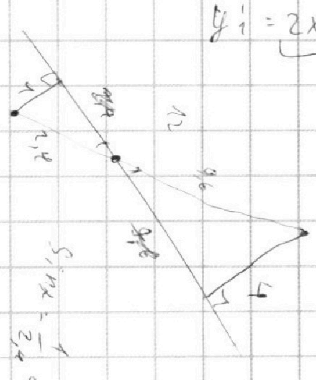
$(0; 14 + 2x_1 + y_1)$

$14 + 2x_1 + y_1 = 14 + 2x_1' + y_1'$

$2x_1 + y_1 = 2x_1' + y_1'$

$y_1' = 2x_1 + y_1 - 2x_1'$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$, $bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$, $ac = k_3 \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$

$ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$

$c^2 = \frac{(abc)^2}{(ab)^2} = \frac{k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}}{k_1^2 \cdot 2^{30} \cdot 7^{22}} = \frac{k_2 k_3}{k_1} \cdot 2^{25} \cdot 7^{40}$

$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$, $b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$, $c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$

$y_2 = C - 2x_2$

$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 15$ $\quad \alpha_1 \geq 15 - \alpha_2$ $\quad \beta_1 + \beta_2 \geq 11$

$y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 - 2x_2$

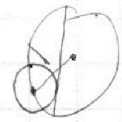
$y_2 = 2(7 + x_1) + y_1 - 2x_2$

$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 17$ $\quad \alpha_3 \geq 17 - \alpha_2$ $\quad \beta_2 + \beta_3 \geq 18$

$\alpha_3 + \alpha_1 \geq 23$ $\quad \beta_1 + \beta_3 \geq 39$

$7 + x_1 = x_2$

$\boxed{\alpha_1 = 10, \quad \alpha_3 = 13, \quad \alpha_2 = 5}$



$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 68$

$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 55$

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{55}{2} = 27{,}5$

$\boxed{\beta_1 = 20, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 19}$

$12x \cdot 7x = 7^2$

$12 \cdot x^2 = 1$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$

$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$ $\quad \frac{(a+b)^2 - 9ab}{a+b}$ $\quad \frac{(a+b)^2}{a+b} - \boxed{\frac{9ab}{|a+b|}}$

$a+b$

$a = 2R \sin\frac{\gamma}{2}$

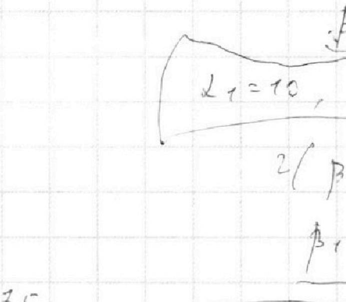
$\frac{a}{\sin\frac{\gamma}{2}} = 2R \quad \frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

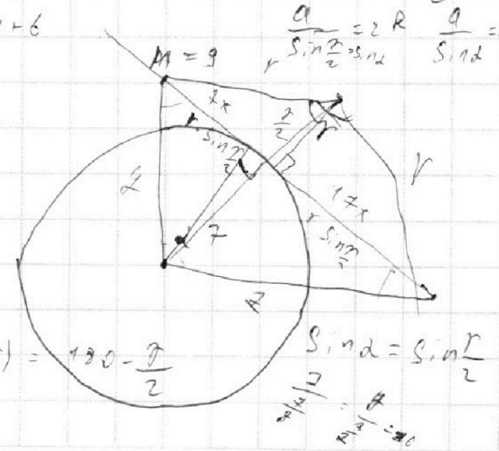
$a + b = km$

$yz = 21 \cdot 7$

$yz \cdot \sin\alpha = 2 \cdot 24x$

$76 = \frac{24x}{\sin\alpha} = \frac{yz}{7}$





$\alpha = \frac{1}{2}(360 - \gamma) = 180 - \frac{\gamma}{2}$

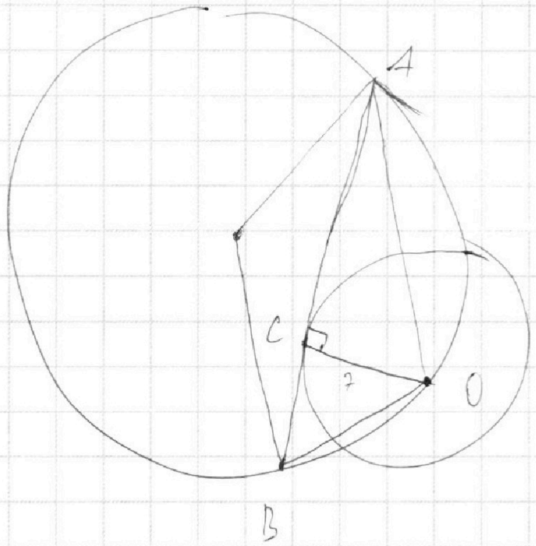
$\sin\alpha = \sin\frac{\gamma}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



69
4
276

138

17
17
119
17
189

18
18
144
18
324

$\frac{D}{4} = 9 - \cancel{6} = \cancel{4}\sqrt{3}$

$x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

$x_2 - \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

$D = 9 - 12$

$x^2 + x + \frac{1}{7}$

$(x^2 + 0{,}5\cancel{x})^2 + \dots$

69
6
414

138
3
414

$312 = 4 \cdot 78 = 4 \cdot 2 \cdot 39 = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$

78
78
156
312

$\frac{3 \cdot 12^2}{69^2} - 3 \cdot \frac{11}{69} + 1$

$\frac{3 \cdot 11^2}{69^2} - 3 \cdot \frac{12}{69} + 1$

(23)

$\frac{144}{23 \cdot 69} - \frac{11}{69} + 1$

69
23
207
138
1581

138
69
207

116
18
928
116
2088

$\frac{144 - 253}{23 \cdot 69} + 1$

69
12
138
69
828

3174
828
2246
348
2594

1581
3174

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3174
414
2760
624
3380
72
3452

57 ~~18~~
18
456
57
1026