



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .
7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX=\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD:DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то  $ab$  минимум  $= 3^{14+13}$ ;  
 $bc$  минимум  $= 3^{19+17}$ ,  $ac$  минимум  $= 3^{23+42}$ .

Для минимального значения  $abc$  мы и будем рассматривать эти минимумы, поскольку при них достигается  $\min abc$  (если рассматривать не минимумы, то и  $abc$  будут больше).

Имеем:

$$\begin{aligned} ab &= 3^{14+13} & b &= \frac{3^{14+13}}{a} \\ bc &= 3^{19+17} & c &= \frac{3^{23+42}}{a} \\ ac &= 3^{23+42} \\ \frac{3^{14+13} \cdot 3^{23+42}}{a^2} &= 3^{19+17} \end{aligned}$$

$$\frac{3^{37+55}}{a^2} = 3^{19+17}$$

$$\frac{3^{18+38}}{a^2} = 1$$

$$a = 3^9 \cdot 7^{19} \text{ (без шестерки, т.к. } a \in \mathbb{N})$$

$$\text{Тогда } b = \frac{3^{14+13}}{3^9 \cdot 7^{19}} = \frac{3^5}{7^6}$$

$$c = \frac{3^{23+42}}{3^9 \cdot 7^{19}} = 3^{14} \cdot 7^{23}$$

$$abc = 3^9 \cdot 7^{19} \cdot \frac{3^5}{7^6} \cdot 3^{14} \cdot 7^{23} = 3^{9+5+14} \cdot 7^{19+23-6} =$$

$$= 3^{28} \cdot 7^{36}$$

Это минимум, т.к. все граничные значения  $ab, bc, ac$ .

Ответ:  $3^{28} \cdot 7^{36}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$ . Если дроби сократима  
на  $m$ , то  $a+b \div m$  и  $(a+b)^2-9ab \div m$

$a+b \div m \Rightarrow (a+b)^2 \div m \Rightarrow 9ab \div m$ . Поскольку  $a$  — простое  
число, то  $a$  и  $b$  — взаимно простые.

Без ограничения общности  $a \div m$  (с  $b$  взаимно просто). Тогда  
 $b \div m \Rightarrow a+b \div m \Rightarrow$  сократить не можем  $\Rightarrow$  ни  $a$ , ни  
 $b$  не могут  $\div m$ .  $9ab \div m$   
 $\{a, b \div m \Rightarrow$  макс.  $m = 1$ .

Ответ:  $m = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$$

Сначала проверим ОДЗ:  $3x^2-5x+6 \geq 0$

$$D = -47 < 0, 3 > 0 \Rightarrow \text{попадают любые } x \text{ и } y$$

$$3x^2+x+1 \geq 0$$

$$D = 1-4 \cdot 3 = -11 < 0, 3 > 0 \Rightarrow \text{попадают любые } x \text{ и } y$$

Далее рассмотрим часть уравнения на

$$\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1}$$

но для начала докажем что оно  $\neq 0$ . Если равно, то  $\begin{cases} 3x^2-5x+6=0 \\ 3x^2+x+1=0 \end{cases}$   
но у них нет корней  $\Rightarrow$  они не равны 0.

$$3x^2-5x+6 - 3x^2-x-1 = (5-6x) (\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1})$$

$$5-6x = (5-6x) (\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1})$$

Можно сократить на  $5-6x$ , если  $x \neq \frac{5}{6}$ .  
 $x = \frac{5}{6}$ .

$$\sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6} - \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1} = \sqrt{\frac{349}{36}} - \sqrt{\frac{149}{36}} =$$

$$= 0 = 5-6x \Rightarrow x = \frac{5}{6} - \text{корень}$$

$$x \neq \frac{5}{6}$$

$$\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1} = 1$$

$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$$

$$\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1} = 1$$

$$2\sqrt{3x^2+x+1} = 6x-4$$

$$\sqrt{3x^2+x+1} = 3x-2 \quad (3x-2 \geq 0)$$

$$3x^2+x+1 = 9x^2-12x+4$$

$$6x^2-13x+3=0$$

$$D = 97$$

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{97}}{12}, x_2 = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Проверим на  $3x - 2 \geq 0$  этот корень.

$$3 \cdot \frac{5 + \sqrt{97}}{12} - 2 = \frac{5 + \sqrt{97}}{4} > 0$$

$$3 \cdot \frac{5 - \sqrt{97}}{12} - 2 = \frac{5 - \sqrt{97}}{4} (\sqrt{97} > \sqrt{25}) < 0 \text{ - не корень}$$

Получается, у уравнения два корня:  $x = \frac{5}{6}$

$$\text{и } x = \frac{5 + \sqrt{97}}{4}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{5}{6}; x = \frac{5 + \sqrt{97}}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

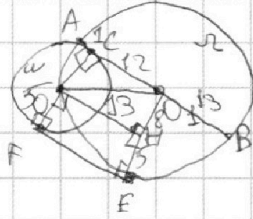
1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\Delta$  - треугольник



Найти: EF

$$AB = 1 + 25 = 26 \Rightarrow D \Rightarrow r = AO_1 = BO_1 = 13 \Rightarrow CO_1 = AO_1 - AC = 12$$

$$CO_1 = r = 13$$

В прямоугольном  $\triangle OCO_1$ :

$$OC^2 = 169 - 144 = 25$$

$$OC = r_1 = 5$$

Из центра  $O$  опустим перпендикуляр  $OH$  на  $O_1E$ .  $OH \parallel FE \Rightarrow$  по теореме Пифагора  $OF = HE = 5$ .

$$O_1E = 13 \Rightarrow O_1H = 8$$

В прямоугольном  $\triangle O_1OH$ :

$$OH^2 = 169 - 64 = 105$$

$$OH = 5\sqrt{5}$$

$$OH^2 = 169 - 64 = 105$$

$$OH = \sqrt{105}$$

$\angle FOH$

$$\angle FOH = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$$

$OH \parallel FE$

$FO \parallel HE$

Все углы в четырехугольнике

$O_1HFE$  - прямые

$\Rightarrow O_1HFE$  - прямоугольник  $\Rightarrow FE = OH = \sqrt{105}$

Ответ:  $\sqrt{105}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \frac{25z^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} &= \frac{(5z-y)(5z+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3z(5z+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} \\ &= \frac{3z(3z+y+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 2(5z-y)y}{y^2 + 3z^2} \\ &= \frac{8z^2 + 10z - 2y^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{6z^2 + 2y^2 + 10z - 4y^2}{y^2 + 3z^2} \\ &= 2 + \frac{10z - 4y^2}{y^2 + 3z^2} = 2 + \frac{6z + 2y - 4y^2}{y^2 + 3z^2} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x$  км/ч — скорость велосипедиста,  $y$  км/ч — скорость мотоциклиста,  $S$  км — расстояние между А и В  
т.к. мотоциклист приезжает раньше, то  $y > x$

$$\begin{cases} \frac{S}{y} - \frac{S}{x} = -1 \Rightarrow \frac{Sx - Sy}{xy} = -1 & (1) \\ \frac{Sx}{y} - \frac{Sy}{x} = -49 \Rightarrow \frac{Sx^2 - Sy^2}{xy} = -49 & (2) \\ \frac{S}{y+7} - \frac{S}{x+7} = -0,6 \end{cases}$$

$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{Sx^2 - Sy^2}{Sx - Sy} = \frac{S(x-y)(x+y)}{S(x-y)} = x+y = 49$$

$y = 49 - x$

$$\begin{cases} \frac{S}{y} - \frac{S}{49-y} = -1 \Rightarrow S \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{49-y} \right) = -1 & (3) \\ \frac{Sx}{y} - \frac{Sy}{49-y} = -49 \Rightarrow S \left( \frac{49-y}{y} - \frac{y}{49-y} \right) = -49 \\ \frac{S}{y+7} - \frac{S}{56-y} = -0,6 \Rightarrow S \left( \frac{1}{y+7} - \frac{1}{56-y} \right) = -0,6 & (4) \end{cases}$$

$$\frac{(4)}{(3)} = \frac{\frac{1}{y+7} - \frac{1}{56-y}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{49-y}} = 0,6$$

$$\frac{49-2y}{49y-y^2+392} = 0,6$$

$$\frac{49-2y}{49y-y^2} = 0,6$$

$$\frac{49y-y^2}{49y-y^2+392} = 0,6$$

$$29,4y - 0,6y^2 + 235,2 = 49y - y^2 \quad | -10$$

$$294y - 6y^2 + 2352 = 490y - 10y^2$$

$$4y^2 - 196y + 2352 = 0$$

$$y^2 - 49y + 588 = 0$$

$$D = \frac{2401 - 2352}{49+49} = 49 = 7^2$$

$$y_1 = \frac{49+7}{2} = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \Rightarrow x = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

$$y_2 = \frac{49-7}{2} = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \Rightarrow x = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

$$\frac{S}{28} - \frac{S}{21} = -1$$

$$\frac{-S}{84} = -1$$

$S = 84$  км      Ответ: 84 км



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

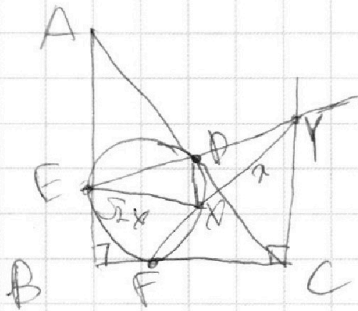
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3z(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$= \frac{15xz + 3yz - z^2}{25x^2 - 6yz + 3z^2}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$$



AD:DC = ?

$$\frac{8y}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{8y + x}{xy} = \frac{15}{z}$$

$$8xz + xz = 15xy$$

~~8xz + xz = 15xy~~

$$\frac{8}{z} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$(5x-y)(5x+y) - z^2 =$$

$$= 3z(5x+y) - z^2$$

$$3z(5x-y)$$

$$\frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{3z(5x+y) - z^2} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{3z(5x+y) - z^2}$$

$$= \frac{15xz + 3yz - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$\frac{15xz + 3yz - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{15xz + 3yz - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} =$$

$$\frac{15xz + 15xz + 9z^2 - z^2}{25x^2 - 30xz + 9z^2} =$$

=

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b$  - взаимно простые

$$a+b = m$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = m$$

$$(a+b) = m$$

$$(a+b)^2 - 4ab = m$$

~~4ab~~

$$4ab = m - (a+b)^2 \quad m =$$

$$\Rightarrow 4ab = m$$

$ab$  - взаимно простые

$$4 \neq m \Rightarrow m = 13$$



8 9

$$x = \frac{3z + y}{5}$$

$$\frac{25x^2 - 25z^2 - 30xz - 9z^2 - 7}{25x^2 + 30xz + 9z^2 + 3z^2} = \frac{-30xz - 10z^2}{25x^2 + 30xz + 12z^2}$$

$$5x - y = 3z$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = ? \text{ найти.}$$

$$\frac{40x + \frac{5x}{y} + \frac{8}{x} - \frac{15}{z} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3z(3z+2y) - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$\frac{40x + \frac{5x}{y} + \frac{8}{x} - \frac{15}{z} = \frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2}$$

$$25x^2 - 10xy + y^2 = 9z^2$$

$$\frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} = \frac{8}{y} = \frac{15}{z} - \frac{8}{x} = \frac{15z - 8x}{xz}$$

$$y = 5x - 3z$$

$$5x - y = 3z$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{(5x-y)^2 - 2y^2 + 10xy - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{9z^2 + 10xy - 2y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$= \frac{8z^2 + 10xy - 2y^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 10xy - 2y^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 10xy - 2y^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{10xy - 4y^2}{y^2 + 3z^2} = 2 + \frac{10xy - 4y^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$5x = 3z + y$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x_{max} = 0,6$ ,  $y_{max} = 0,6$

$\frac{S}{y} + 1 = \frac{S}{x}$

$2 \cdot \frac{S}{y} = y \cdot \frac{S}{x} - 49$

$\frac{S}{y+7} + 0,6 = \frac{S}{x+7}$

$S \left( \frac{1}{y+7} - \frac{1}{x+7} \right) = 0,6$

$S \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x-y} \right)$

$\frac{56y - y - 7}{(y+7)(56-y)} = 0,6$

$\frac{49 - y = 0,6y}{y(49-y)}$

$\frac{49 - 2y}{56y - y^2 + 392 - 7y} = 0,6$

$\frac{S}{y} - \frac{S}{49-y} = 1$

$\frac{S(49-y) - S_y}{y \cdot 49-y} = -49$

$\frac{S}{y+7} - \frac{S}{56-y} = -0,6$

$\frac{49y - y^2}{49y - y^2 + 392} = 0,6$

$28,4y - 0,6y^2 + 235,2 =$

$= 49y - y^2$

$294y - 0,6y^2 + 235,2 =$

$= 490y - 10y^2$

$4y^2 - 186y + 235,2 = 0$

$D = 494 + 588$

$D = 2108 - 235,2 =$

$\frac{S}{y} - \frac{S}{x} = -1$

$\frac{Sx}{xy} - \frac{Sy}{xy} = -49$

$\frac{S}{y+7} - \frac{S}{x+7} = -0,6$

$S \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) = -49$

$\frac{Sx - Sy}{xy} = -1$

$\frac{Sx^2 - Sy^2}{xy} = -49$

$\frac{Sx^2 - Sy^2}{Sx - Sy} = 49$

$S(x+y)(x-y) = 49$

$x+y = 49$

$x = 49 - y$

$S \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) = 1$

$\frac{588y}{2}$

$\frac{392 \cdot 6}{235,2}$

$\frac{235,2 \cdot 4}{588}$

$S \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{49-y} \right) = -1$

$S \left( \frac{49-y}{y} - \frac{y}{49-y} \right) = -49$

$S \left( \frac{1}{y+7} - \frac{1}{56-y} \right) = -0,6$

$\frac{49-y}{y} \cdot \frac{49-y}{49-y} = 49$

$\frac{2408 - 98y + y^2 - y^2}{y(49-y)} = 49$

$\frac{49-y-y}{y(49-y)}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

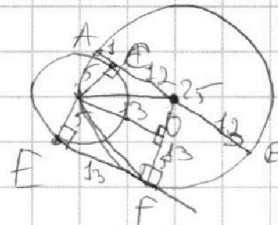
- 1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

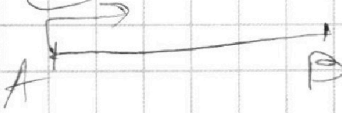


$ab: 3^{14} \cdot 3$   
 $bc: 3^{19} \cdot 3^4 \cdot 3^7 \cdot 3^4 \cdot \min abc - ?$   
 $ac: 3^{23} \cdot 3^7 \cdot 3^9 \cdot 3^8 \cdot 3^6$



$a = 3^5 \cdot 7^4$   
 $b = 3^4 \cdot 7^{25}$   
 $c = 3^9 \cdot 7^{29}$

$\frac{1}{x} = 2$   
 $\frac{1}{x} = -49$   
 $\frac{1}{x} = -0,6$   
 $\frac{1}{x} = -1$   
 $\frac{1}{x} = -49$   
 $\frac{1}{x} = -0,6$



$x_{route} = 0,6$   
 $y_{route} = 2,1$

$a^2 b^2 c^2 = 3^{19} \cdot 7^{17}$   
 $abc = 3^{12} \cdot 7^{13}$   
 $b = \frac{3^{23} \cdot 7^{42}}{a}$   
 $c = \frac{3^{23} \cdot 7^{42}}{a}$

$y - x = -1$   
 $y = x - 1$   
 $\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+4} = -0,6$

$\frac{1}{y} + 1 = \frac{1}{x}$   
 $x \cdot \frac{1}{y} = y \cdot \frac{1}{x} - 49$   
 $\frac{1}{y+9} + 0,6 = \frac{1}{x+7}$

$\frac{3^{37} \cdot 7^{55}}{a^2} = 3^{19} \cdot 7^{17}$   
 $\frac{3^{18} \cdot 7^{38}}{a^2} = 1$   
 $a = 3^9 \cdot 7^{19} \Rightarrow b = \frac{3^{23} \cdot 7^{42}}{3^9 \cdot 7^{19}} = 3^{14} \cdot 7^{23}$   
 $c = \frac{3^{23} \cdot 7^{42}}{3^9 \cdot 7^{19}} = 3^{14} \cdot 7^{23}$   
 $abc = 3^9 \cdot 7^{19} \cdot 3^{14} \cdot 7^{23} \cdot 3^{14} \cdot 7^{23}$   
 $= 3^{9+14+14} \cdot 7^{19+23+23} = 3^{37} \cdot 7^{65}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*Черновик*

$ab = 3^{14} \cdot 7^{13}$      $bc = 3^{19} \cdot 7^{17}$

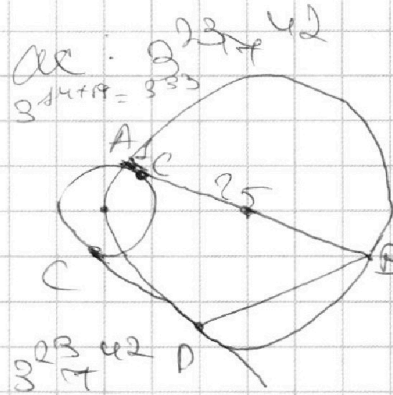
~~$a^2 b^2 c^2 = 3^{56} \cdot 7^{72}$~~

~~$abc = 3^{28} \cdot 7^{36}$~~

$ab \min = 3^{14} \cdot 7^{13}$

$bc \min = 3^{19} \cdot 7^{17}$

$ac \min = 3^{23} \cdot 7^{42}$



~~$a = 3^{27} \cdot 7^2$      $b = 3^{12} \cdot 7^{11}$      $c = 3^{11}$~~

~~$a = 3^{14} \cdot 7^{13}$~~

~~$b = 3^{19} \cdot 7^{17}$~~

~~$c = 3^{23} \cdot 7^{42}$~~

$a^2 + 2ab + b^2 - 11ab = (a+b)^2 - 11ab$

$3x^2 - 5x + 6 \geq 0$

$D = 25 - 24 \cdot 3 = -47$

$3x^2 + x + 1 \geq 0$

$D = 1 - 4 \cdot 3 = -11$

~~$x = \frac{1}{6}$~~

~~$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1$~~

~~$3x^2 - 5x + 6 = 2$~~

~~$(3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1) = 5 - 6x \left( \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} \right)$~~

$3 \cdot \frac{25}{36} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6 = \frac{75}{36} - \frac{25}{6} + 6 = \frac{75 - 150 + 216}{36} = \frac{141}{36}$

$3 \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1 = \frac{75 + 30 + 36}{36} = \frac{141}{36}$



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

Начала проверим ОДЗ:  $3x^2 - 5x + 6 \geq 0$  у параболы ветви вверх  
 $D = 25 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = -47 < 0 \Rightarrow$   $\Rightarrow$  подходит

$3x^2 + x + 1 \geq 0$  у параболы ветви вверх (а>0)  $\Rightarrow$  подходит  
 $D = 1 - 4 \cdot 3 = -11 < 0 \Rightarrow$  подходит

ОДЗ:  $x \in (-\infty; +\infty)$

Далее обе части уравнения на  $\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1}$ ,  
но для начала докажем, что оно  $\neq 0$ . Если равно,  
то  $\begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 = 0 \\ 3x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$  но мы уже доказали, что у  
этих парабол ветви вверх и  $D < 0 \Rightarrow$  они не равны, т.к. нет  
нулей.

$$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

$$5 - 6x = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

Можно сократить на  $5 - 6x$ , но для начала проверим  
сводится ли корнем  $x = \frac{5}{6}$  (т.е. может ли быть  $5 - 6x = 0$ ).

$$\begin{aligned} \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6} - \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1} &= \sqrt{\frac{75}{36} - \frac{25 \cdot 216}{6 + 36}} - \\ &= \sqrt{\frac{75}{36} + \frac{80}{36} - \frac{36}{36}} = \sqrt{\frac{75}{36} - \frac{150 \cdot 216}{36 + 36}} - \sqrt{\frac{75}{36} + \frac{30 \cdot 216}{36 + 36}} = \\ &= \sqrt{\frac{141}{36}} - \sqrt{\frac{141}{36}} = 0 = 5 - 6x \text{ при } x = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Т.е.  $x = \frac{5}{6}$  является корнем уравнения.

При  $x \neq \frac{5}{6}$ :

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1$$

Тогда составим систему:

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3x^2 + x + 1} &= 6x - 4 \\ \sqrt{3x^2 + x + 1} &= 3x - 2 \quad (3x - 2 \geq 0) \end{aligned}$$

$$3x^2 + x + 1 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$6x^2 - 13x + 3 = 0 \quad D = 169 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 97$$

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{97}}{12} \quad x_2 = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Нужно проверить эти корни на  $x \geq 2$

$$3. \frac{13 + \sqrt{97}}{124} - 2 = \frac{13 + \sqrt{97} - 8}{4} = \frac{5 + \sqrt{97}}{4} > 0 \quad \checkmark$$

$$3. \frac{13 - \sqrt{97}}{124} - 2 = \frac{13 - \sqrt{97} - 8}{4} = \frac{5 - \sqrt{97}}{4} \quad (\sqrt{97} > 5) \Rightarrow \frac{5 - \sqrt{97}}{4} < 0$$

Получается, у уравнения два корня:  $x = \frac{5}{6}$  и  $x =$   
 $= \frac{5 + \sqrt{97}}{4}$

Ответ:  $x = \frac{5}{6}$ ;  $x = \frac{5 + \sqrt{97}}{4}$