



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

$$ab = k \cdot 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$bc = l \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}, \quad l \in \mathbb{N}$$

$$ac = m \cdot 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$(abc)^2 = klm \cdot 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$$

Т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $\sqrt{klm \cdot 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}} \in \mathbb{N}$

$$2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26} \sqrt{3klm}$$

Т.к. данные числа a, b, c удовл. данным

условиям, то при данном наборе любого числа на натуральное те же условия будут выполняться.

Т.к. $\sqrt{3klm} \in \mathbb{N}$, то наим. значение равно 3 (напр. при $k=3, l=1, m=1$)

2-м: $a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}$

$$b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}$$

$$c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$$

Если $k=3, l=1, m=1$:

$$a_2 + b_2 + c_2 = 6$$

$$b_2 + c_2 = 14$$

$$a_2^2 + c_2^2 = 16$$

$$a_3 + b_3 = 14$$

$$b_3 + c_3 = 21$$

$$a_3 + c_3 = 25$$

$$a_5 + b_5 = 11 \quad (1)$$

$$b_5 + c_5 = 13 \quad (2)$$

$$a_5 + c_5 = 28 \quad (3)$$

$$c_2 - a_2 = 8$$

$$c_3 - a_3 = 7$$

$$c_5 - a_5 = 2 \quad (1)$$

$$a_2 + c_2 = 16$$

$$a_3 + c_3 = 25$$

$$a_5 + c_5 = 28 \quad (2)$$

$$2c_2 = 24$$

$$2c_3 = 32$$

$$2c_5 = 30 \quad (3)$$

$$c_2 = 12$$

$$c_3 = 16$$

$$c_5 = 15$$

$$a_2 = 4 \quad \checkmark$$

$$a_3 = 9 \quad \checkmark$$

$$a_5 = 13 \quad \times$$

$$b_2 = 2$$

$$b_3 = 5$$

$$b_5 = -2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $v_5 = -2$, т.к. $v_5 \geq 0$, то полученная система неверна.

Рассмотрим при каких k, l, m она будет приведена к:

Из (1), (2) и (3) получаем, что либо

~~либо~~ 1) $a_5 + v_5$ - нечет $v_5 + c_5$ - нечет $a_5 + c_5$ - чет

2) $a_5 + v_5$ - чет $v_5 + c_5$ - нечет $a_5 + c_5$ - нечет

3) $a_5 + v_5$ - нечет $v_5 + c_5$ - чет $a_5 + c_5$ - нечет

Понятно, что при добавл. ~~к~~ к любому ур-ю

из (1), (2), (3) единственн. ур-е

не имеет решений (из вышесказанного).

$$a_5 + v_5 = 12 \quad v_5 + c_5 = 13 \quad a_5 + c_5 = 29$$

$$c_5 - a_5 = 1$$

$$a_5 = 14$$

$$v_5 = -2$$

неверно

$$2c_5 = 30$$

$$c_5 = 15$$

$$a_5 + v_5 = 11 \quad v_5 + c_5 = 14 \quad a_5 + c_5 = 29$$

$$c_5 - a_5 = \del{13} 3$$

$$2c_5 = 32$$

$$a_5 = 13$$

$$v_5 = -2 \quad \text{неверно.}$$

$$c_5 = 16$$

След. шаг: добавим седьматер. и единичств.:

это решение:

$$a_5 + v_5 = 13 \quad v_5 + c_5 = 15 \quad a_5 + c_5 = 28$$

$$a_5 = 13 \quad c_5 = 15 \quad v_5 = 0$$

т.е. при $k=3 \cdot 5^2$, $l=5^2$, $m=1$ есть реш., т.е. то, что $\sqrt{3k+1}$ - целое число

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и ~~это~~ ~~выраж~~ ~~оно~~ ~~минимально~~, что следует
из алгоритма подбора коэффициентов.

тогда мин. значение $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Ответ: $(abc)_{\min} = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

задача ~ 3

$$10 \cdot \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$[0; 10\pi] \Rightarrow [0; 10\pi]$$

$$\begin{cases} 9\pi - 2x \geq 0 \\ 9\pi - 2x \leq 10\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{9\pi}{2} \\ x \geq -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$10 \cdot \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 9\pi - 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x \geq -\frac{9\pi}{2} \\ -x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1) $\frac{\pi}{2} - x \in [0; \pi]$: \leftarrow

$$10 \cdot (\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$-4\pi = 8x$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{неог. } +$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x \leq \pi \\ \frac{\pi}{2} - x \geq -4\pi \end{cases}$$

2) $\frac{\pi}{2} - x \in [-\pi; 0]$: \leftarrow

$$10 \cdot \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 10 \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = 10 \cdot (x - \frac{\pi}{2})$$

$$10(x - \frac{\pi}{2}) = 9\pi - 2x$$

$$10x - 5\pi = 9\pi - 2x$$

$$6x = 14\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{3} \quad \text{неог. } \checkmark$$

3) $\frac{\pi}{2} - x \in [-2\pi; -\pi]$

$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \arccos(\cos(\frac{5\pi}{2} - x)) = \frac{5\pi}{2} - x$$

$$10(\frac{5\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$25\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$16\pi = 8x \quad x = 2\pi \quad \checkmark$$

$$\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4) \frac{\pi}{2} - x \in [-3\pi; -2\pi)$$

$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = x - \frac{\pi}{2}$$

$(2\pi; 3\pi)$

$$10(x - \frac{\pi}{2}) = 9\pi - 2x$$

$$10x - 5\pi = 9\pi - 2x$$

$$12x = 14\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{6}$$

$$\frac{3\pi}{2} - \frac{12\pi}{6} = -\frac{4\pi}{2} = -2\pi \in (-2\frac{1}{3}\pi; -2\pi) \checkmark \text{ не } x.$$

$$5) \frac{\pi}{2} - x \in [-4\pi; -3\pi)$$

$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$$

$$-5\pi = 8x$$

$$x = -\frac{5\pi}{8}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{8} = \frac{4\pi}{8} - \frac{5\pi}{8} = -\frac{\pi}{8} \in (-4\pi; -3\pi) \checkmark \text{ не } x.$$

Ответ: ~~$\frac{7\pi}{6}$~~ $\frac{7\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; 2\pi; \frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

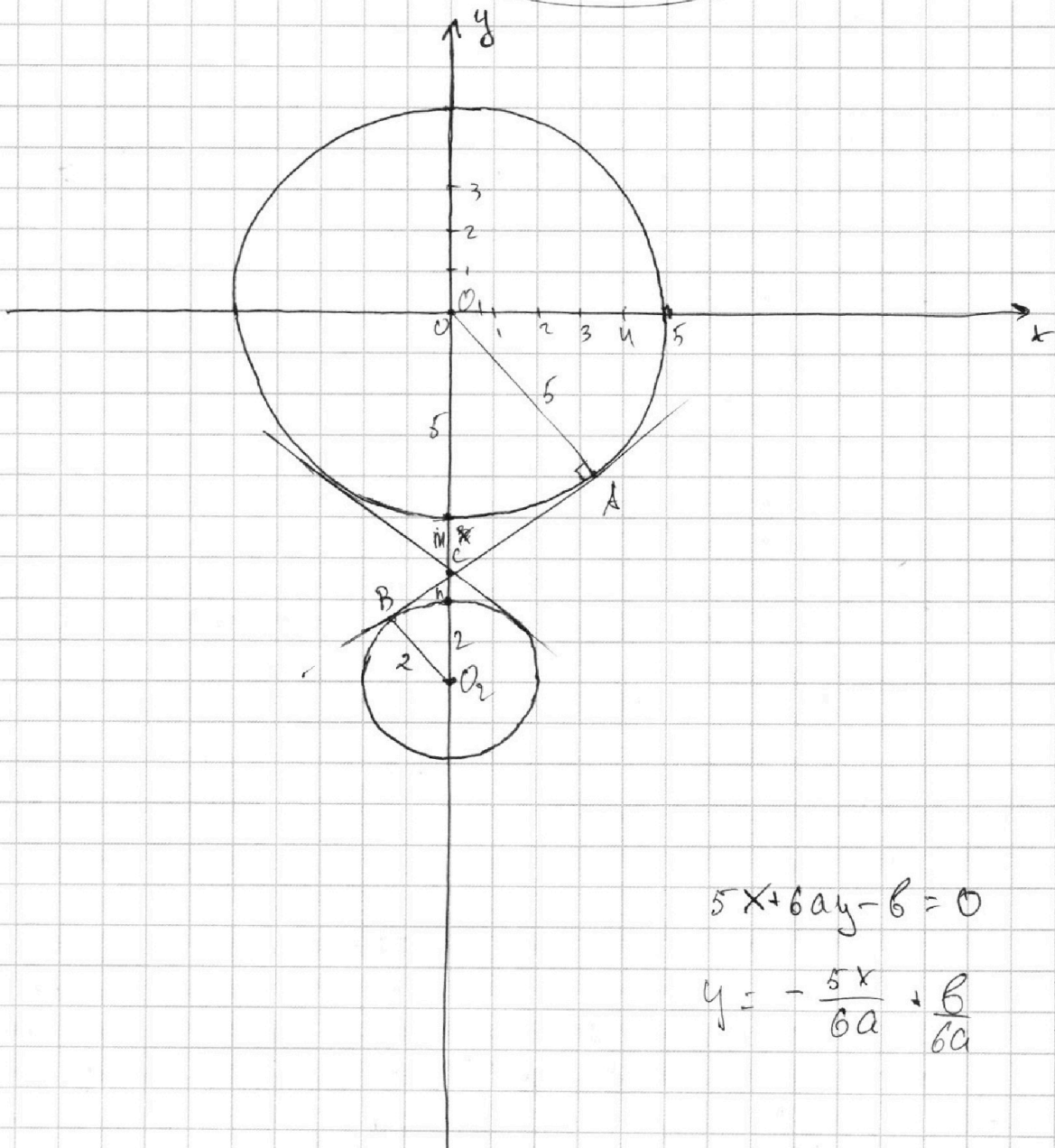


Задача 24.

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25) \cdot (x^2 + y^2 + 18y + 22) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \end{cases}$$

графическим
явл. две окр-ти



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5x + 6ay - b = 0$ — ур. е прямой.

Прямая будет ~~тогда, когда~~ если прямая
пересечет каждую из двух ок-тей два раза.

Если $a = 0$:

$$5x = b$$

$$x = \frac{b}{5}$$

~~Иногда~~ ~~бывает~~

Система имеет 4 реш. \Leftrightarrow $\begin{cases} \frac{b}{5} < 2 \\ \frac{b}{5} > -2 \end{cases} \Leftrightarrow$

\Rightarrow такое b найдется

$a = 0$ подходит

Если $a \neq 0$:

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a}$$

~~В~~ пар-р a задает угл. коэф. прямой, а
пар-р b отвечает за ее параллельность
оси OY .

Заметим, что нам нужны угл. коэф.

при которых ни при каком b не будет
касания с ~~одной~~ ~~одними~~ окружностями.

Найдем a , при к-х возможно такое касание.

Из рис. на графике: $\triangle SAO, \triangle ASB \sim \triangle O_2$ (по 3-м углам) \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{5+m}{2+n} \quad \text{и} \quad 5+m+n+2=9$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решая систему, получим

$$m+n=2 \quad m=2-n$$

$$2 + 5n = 2 + 2m$$

$$5n = 2(2-n) = 4 - 2n$$

$$7n = 4$$

~~$$n = \frac{2}{3}$$~~

$$n = \frac{4}{7}$$

$$m = 2 - \frac{4}{7} = \frac{10}{7}$$

Тогда $\sin \angle O_1CA = \frac{5}{5+m} = \frac{5}{5+\frac{10}{7}} = \frac{5 \cdot 7}{45} = \frac{7}{9}$

tg наклона касательной к при этом равен:

$$\begin{aligned}
 \text{tg}(90^\circ - \angle O_1CA) &= \sqrt{\frac{1}{\cos^2(90^\circ - \angle O_1CA)} - 1} = \sqrt{\frac{81}{49} - 1} = \\
 &= \sqrt{\frac{81-49}{49}} = \sqrt{\frac{32}{49}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 10 \\
 81 \\
 \hline
 49 \\
 32
 \end{array}$$

Поскольку ситуация со вторым касательной

абсолютно симметрична относительно OY, то

можно сказать, что 4 решения будут возможны

при

$$\begin{cases}
 -\frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \\
 -\frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7} \\
 \frac{1}{a} < -\frac{24\sqrt{2}}{35} \\
 \frac{1}{a} > \frac{24\sqrt{2}}{35}
 \end{cases}$$

(*)

$$\begin{cases}
 -\frac{1}{a} > \frac{24\sqrt{2}}{35} \\
 -\frac{1}{a} < -\frac{24\sqrt{2}}{35}
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 a < -\frac{35}{24\sqrt{2}} \\
 a < \frac{35}{24\sqrt{2}} \\
 a > 0
 \end{cases}$$

(причем a=0 не имеет)

Ответ: $a \in (-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) =$$

$$= -a^5 - a^4b - a^3b^2 + a^3b^2 - ab^4 + b^5$$
$$= a^5 + a^4b - a^4b - a^3b^2 + a^3b^2 + a^2b^3 - a^2b^3 - ab^4 + ab^4 + b^5$$

$$\left(\log_{11} x + \log_{11} \frac{4}{2}\right) \left(\log_{11}^4 x - \log_{11}^3 x \cdot \log_{11} \frac{4}{2} + \log_{11}^2 x \cdot \log_{11}^2 \frac{4}{2} - \log_{11} x \cdot \log_{11}^3 \frac{4}{2} + \log_{11}^4 \frac{4}{2} + 5\right) = 0$$

Запомним, что если $f(t_1) > 0$, то $t_1 > 1$

, а если $f(t_2) < 0$, то $0 < t_2 < 1$,

т.е. $f(t) \neq 0$ и $f(1) = 0$

Но тогда x , удовл (1) $x > 1$ и $\log_{11} x > 0$,

а y удовл (2) $0 < \frac{y}{2} < 1$ и $\log_{11} \frac{4}{2} < 0$, т.е.
 $\log_{11} x \cdot \log_{11} \frac{4}{2} < 0$

Но тогда:

$$\underbrace{\log_{11}^4 x}_{>0} - \underbrace{\log_{11}^3 x \cdot \log_{11} \frac{4}{2}}_{>0} + \underbrace{\log_{11}^2 x \cdot \log_{11}^2 \frac{4}{2}}_{>0} - \underbrace{\log_{11} x \cdot \log_{11}^3 \frac{4}{2}}_{>0} + \underbrace{\log_{11}^4 \frac{4}{2}}_{>0} + 5 = 0$$

не имеет решения.

В силу знания $\log_{11} x + \log_{11} \frac{4}{2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{xy}{2} = 1 \Rightarrow xy = 2$$

В силу существования и единственности

решений ур-н (1) и (2), а также в силу необходимости существования решения у ур-н (3), ~~мы~~ получим, что пр-е $xy = 2$ единственное возможное.

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6.

$$b(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad k(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$

$$(b+k)(x_2 - x_1) = 48$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

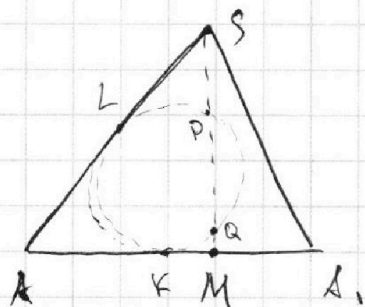
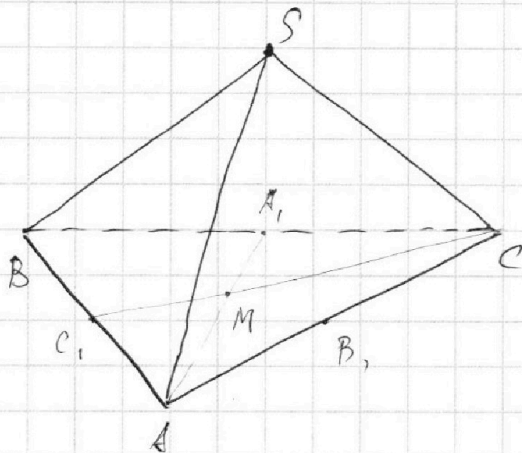
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 7





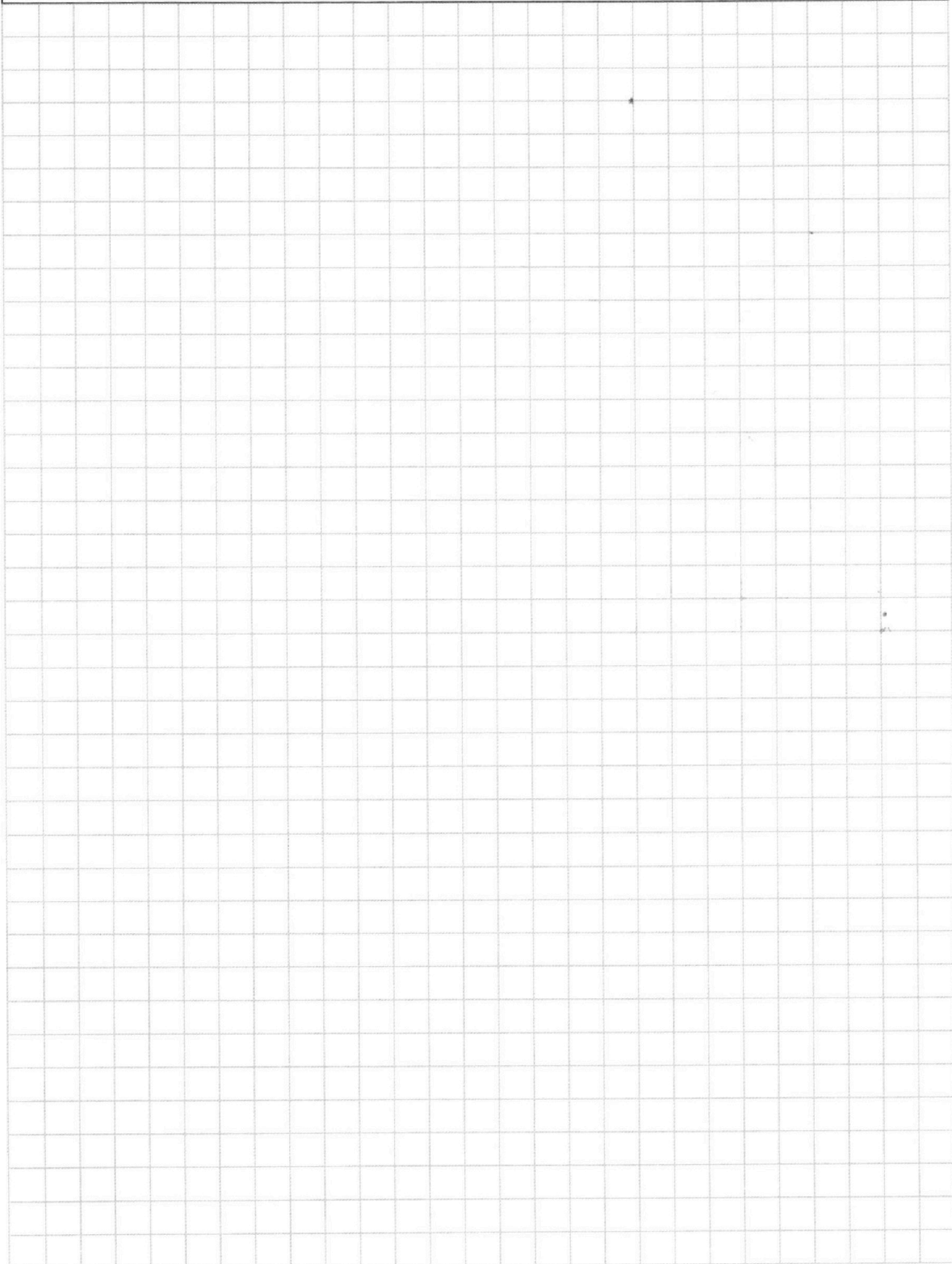
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

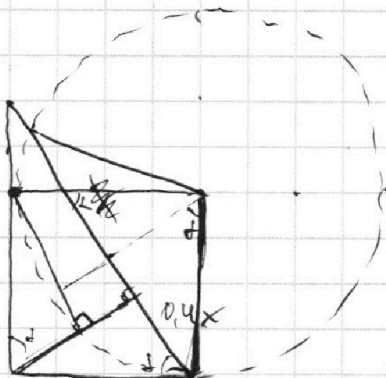
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

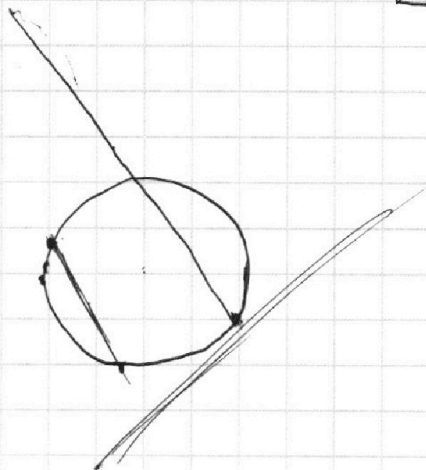
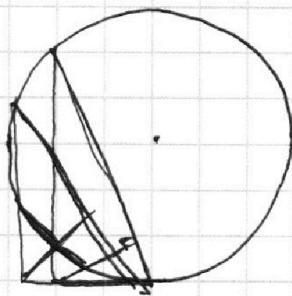
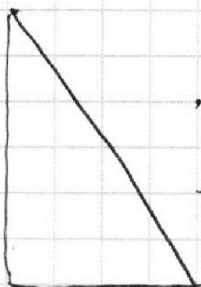


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{R}{0,4x} = \frac{x}{R}$$
$$\therefore R^2 = 0,4x^2$$
$$R = x\sqrt{0,4}$$

$$f_{gr} = \frac{R}{0,4x} = \frac{\sqrt{0,4}}{0,4} = \frac{1}{\sqrt{0,4}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{10}}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

