МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 25\right)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Перемножим ав, вс и ас и получим, что:

$$(abc)^2 \vdots 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$$

Значит (авс) точно кратно $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

Но $ac \vdots 5^{28}$, значит $abc \vdots 5^{28}$ тоже (т.к в-натур)

Следовательно $(abc) \vdots 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

При $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$

$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot$ $\qquad abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$

И при этом $ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14} \vdots 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14} \vdots 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$

$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \vdots 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 2^{28}$

Значит $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ наше значение

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

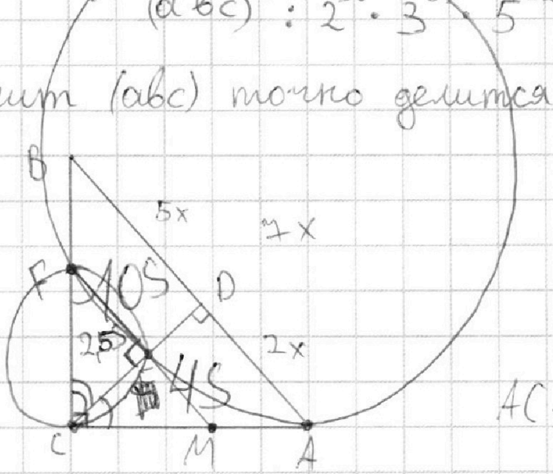
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab \vdots 2^{6}3^{13}5^{11}$, $bc \vdots 2^{14}3^{21}5^{13}$, $ac \vdots 2^{16}3^{25}5^{28}$

Перемножим ab, bc и ac и получим, что

$(abc)^2 \vdots 2^{36}\cdot 3^{59}\cdot 5^{52}$

Значит (abc) точно делится на $2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{26}$

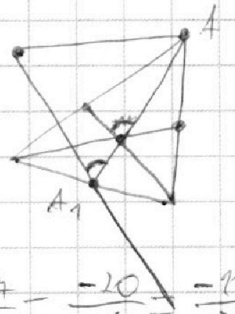


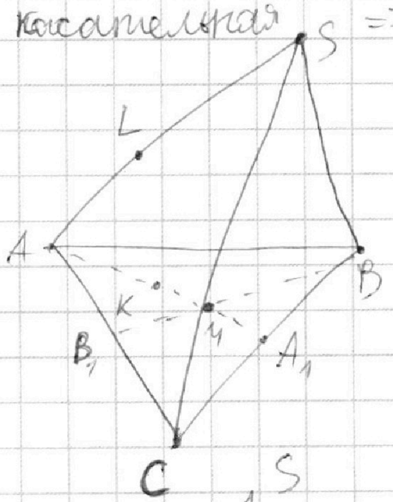
$\frac{4}{2,5} = \boxed{\frac{8}{5}}$

52×52

$2500+200+4=$
$=2704$

AC - общ. касательная

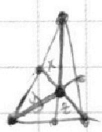




$\frac{7\pi}{6} - \frac{5}{3}\pi n \le \frac{9\pi}{2}$

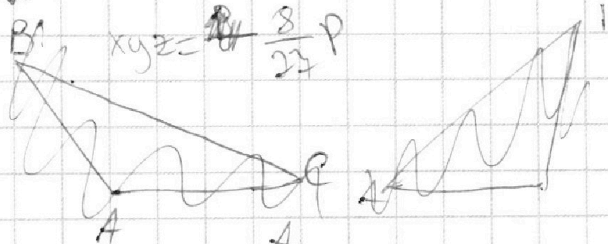
$\frac{7}{6} - \frac{5}{3} n \le \frac{9}{2}$ 13

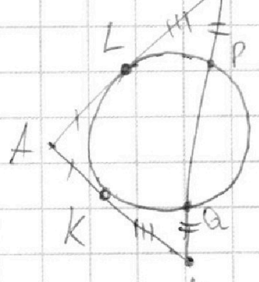
$\frac{5}{3} n \geqslant \frac{7-27}{6} = \frac{-20}{6} = \frac{-10}{3}$



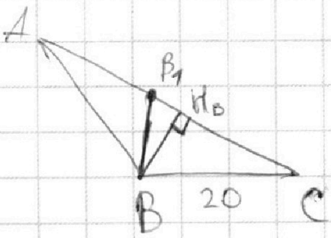
$5n \ge -10 \quad n \ge -2$

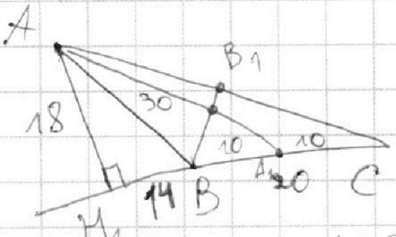
$xyz = \frac{8}{27} p$





$SP = MQ$
$\Downarrow$
$MK = LS$
$\Downarrow$
$AS = AM$
$\|$
20





$AA_1 = 30$

$H_AA_1 = 24 \Rightarrow H_AB = 14 \Rightarrow HC = 34$

$AC^2 = 18^2 + 34^2 = 4(9^2+17^2) = 4(370)$

~~4·370+400+4·30...~~

$AC = 2\sqrt{370}$

$180 = S = \frac{1}{2}\sqrt{370}\cdot h$

$AB^2 = 4(9^2+7^2) = 4(130)$

$h_2 = \frac{180}{\sqrt{370}} = \frac{18\sqrt{370}}{37}$

$AB = 2\sqrt{130}$

$520 - \frac{180^2}{370} =$
$= 520 - \frac{18^2\cdot 10}{37}$

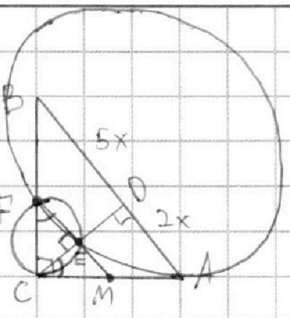
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2



Решение:

Так как CD - высота, то $CD \perp AB$
И т.к. $AB \parallel EF$, то $EF \perp CD \Rightarrow \angle FEC = 90°$

т.к. $\triangle ABC$ - прямоуг.

$\angle CFE = 90° - \angle FCE = 90° - (90° - \angle DCA) =$
$= \angle DCA$

Рассмотрим окр, описанную около $\triangle CFE$
Прямая AC - касается этой окружности в т. C, так как $\angle CFE = \angle DCA$. Значит AC - общая касательная этой окр и заданной в условии. А FE - их общая хорда $\Rightarrow$ она же радикальная ось этих окружностей.

Значит FE пересекает AC в середине (т. к. степень точки M - середины AC равна относительно этих окр, т.к касательные из нее равны, а рад. ось - ГМТ, степени которых равны отн двух окр.)

Значит EF - средняя линия $\triangle ABC$ (т.к $EF \parallel AB$ и проходит через середину AC).

Следовательно $\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle CEF}} = 4$.

Пусть $AB = 7x \Rightarrow BD = 5x \Rightarrow AD = 2x$
Тогда $\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{5}{2} \Rightarrow$ ~~$S_{\triangle BCD} = 2{,}5\, S_{\triangle ACD}$~~ $S_{\triangle ACD} = \frac{2}{5} S_{\triangle BCD}$

Значит $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{2}{5} \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{2}{5} \cdot 4 = \frac{8}{5}$

Ответ: $\frac{8}{5}$

№3

$$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

Пусть $\arccos(\sin x) = \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$

$\cos\alpha = \sin x$ (по определению)

$\cos\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$

$-2\sin\left(\frac{\alpha - x + \frac{\pi}{2}}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha + x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0$

1) $\sin\left(\frac{\alpha - x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ или 2) $\sin\left(\frac{\alpha + x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\frac{\alpha - x}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\frac{\alpha + x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $\qquad$ $\alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$ (подставим в уравнение)

$10x - 5\pi + 20\pi n = 9\pi - 2x$ $\qquad$ $5\pi - 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x$

$12x = 14\pi - 20\pi n$ $\qquad$ $8x = -4\pi + 20\pi k$

$x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi n$ $\qquad$ $x = \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2}$

Но $\alpha \in [0; \pi]$, $2x = 9\pi - 10\alpha$ (из исходн. ур-я). $-10\alpha \in [-10\pi; 0]$

$-10\alpha + 9\pi \in [-\pi; 9\pi] \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$

1) $-\frac{\pi}{2} \le \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi n \le \frac{9\pi}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{7}{6} - \frac{5}{3}n \le \frac{9}{2} \quad |\cdot 6$

$\Rightarrow -3 \le 7 - 10n \le 27 \Rightarrow n \le 1$ и $n \ge -2 \Rightarrow n = -2; -1; 0; 1$
т.к. $n \in \mathbb{Z}$

2) $-\frac{\pi}{2} \le \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2} \le \frac{9\pi}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{5}{2}k - \frac{1}{2} \le \frac{9}{2} \quad |\cdot 2$
т.к. $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow -1 \le 5k - 1 \le 9 \Rightarrow 0 \le 5k \le 10 \Rightarrow 0 \le k \le 2 \Rightarrow k = 0; 1; 2$

ОТВЕТ: $x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi n$ при $n = -2; -1; 0; 1$
$x = \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2}$ при $k = 0; 1; 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

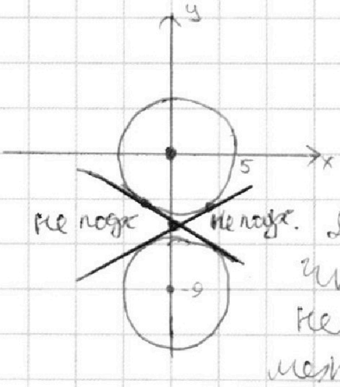
№4

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \quad (1) \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+71)=0 \quad (2) \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \text{ — окр с центром } (0;0) \text{ и } r=5 \\ x^2+(y+9)^2=14 \text{ — окр с центром } (0;-9) \text{ и } r=\sqrt{14}<4 \ (\Rightarrow \text{окр не перес}) \end{array}\right. \end{cases}$$

при $a=0$: $5x=b \Rightarrow$ можно подобр такое b, чтобы (2) имело 4 решения $\Rightarrow a=0$ подходит. При $a\neq 0$: $y=\frac{-5}{6a}x+\frac{b}{6a}$



К наклона прямой фиксирован, а уровень ее "поднятия" можно менять, изменяя b.
Проведем 2 общ внутр касат к окр. Для того чтобы сдвинуть прямую так, чтобы она пересекала каждую окр в 2-х т. необходимо, чтобы ее коэф наклона был между k наклона касательных.

Пусть касат $y=kx+l$: $\begin{cases} x^2+(kx+l)^2=25 \text{ — 1 реш} \\ x^2+(kx+l+9)^2=14 \text{ — 1 реш.} \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} x^2(1+k^2)+x\cdot 2kl+l^2-25=0 \\ x^2(1+k^2)+x\cdot 2k(l+9)+l^2+2l+37=0 \end{array}\right.$$

$D_1=4k^2l^2-4(l^2-25)(k^2+1)=0$

$D_2=4k^2(l+9)^2-4(k^2+1)((l+9)^2-14)=0$

$D_1=\cancel{4k^2l^2}-\cancel{4k^2l^2}-4l^2+100k^2+100=0$

$D_2=\cancel{4k^2(l+9)^2}-\cancel{4k^2(l+9)^2}-4(l+9)^2+56+56k^2=0$

$100k^2-4l^2+100=0 \Rightarrow k^2=\frac{l^2}{25}-1$

$56k^2-4(l+9)^2+56=0$

$\frac{56}{25}l^2-4l^2-72l-324+56=0 \Rightarrow \frac{-44}{25}l^2-72l-268$

$D=$

$l=-4,5$

Находим k_1 и k_2 (корни системы) $\Rightarrow k_1\leq\frac{-5}{6a}\leq k_2$

$k^2=$ 82

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

(1) $\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} 11^{-2} - 5$

(2) $\log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{(0{,}5y)^3} 11^{-13} - 5$

ОДЗ:
$x>0,\ x\neq 1$
$y>0,\ y\neq 2$

(1) $\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \frac{-2}{3}\log_x 11 - 5$

$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3}\log_x 11 + 5 = 0$

(2) $\log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \frac{-13}{3}\log_{0{,}5y} 11 - 5$

$\log_{11}^4 (0{,}5y) + \frac{16}{3}\log_{0{,}5y} 11 + 5 = 0$

Пусть $\log_{11} x = a$, $\log_{11}(0{,}5y) = b$, тогда получим

(1) $a^4 - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{a} + 5 = 0 \ \big|\cdot 3a \neq 0$, т.к $x \neq 1$

(2) $b^4 + \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{b} + 5 = 0 \ \big|\cdot 3b \neq 0$, т.к $0{,}5y \neq 1$

(1) $3a^5 + 15a - 16 = 0$ (2) $3b^5 + 15b + 16 = 0$

производная: производная: $(2)' = b^4 + 15b$ всегда >0

$(1)' = a^4 + 15$ всегда >0

Значит оба уравнения имеют по 1 корню (не больше 1, но т.к такие x и y есть, то ровно по 1), так как функции монотонны

$(1)+(2):\ 3(a^5+b^5) + 15(a+b) = 0$ Заметим, что $a=-b$ явл решением и т.к решение одно, то это оно и есть (если a ~~подходит~~ - корень (1), то $b=-a$ - корень (2)).

Значит $\log_{11} x = -\log_{11}(0{,}5y) \Rightarrow \log_{11}(0{,}5xy) = 0$

$\Rightarrow 0{,}5xy = 1 \Rightarrow xy = 2$. (Так как $a\neq 0$ и $b \neq 0$, то $x \neq 1$ и $y\neq 2$ и $xy=2$ получилось не при $x=1$ и $y=2$)

Ответ: $xy = 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

$6x_2-6x_1+y_2-y_1=48 \Rightarrow y_2-y_1 \vdots 6 \Rightarrow y_2=y_1+6k$

$0 \le y_1, y_2 \le 90$

Все точки внутр пар-ма ∈ прямым с наклоном $-6x$

$OP: -6x$; $RQ: -6x+102$

Пусть $A \in a$ $\quad a: y=-6x+l_1 \Rightarrow y_1=-6x_1+l_1$

$B \in b$ $\quad b: y=-6x+l_2 \Rightarrow y_2=-6x_2+l_2$

$6x_2-6x_1+y_2-y_1=6x_2-6x_1-6x_2+l_2+6x_1-l_1=48$

$\Rightarrow l_2-l_1=48 \Rightarrow \quad a: y=-6x+l_1$

$b: y=-6x+l_1+48$

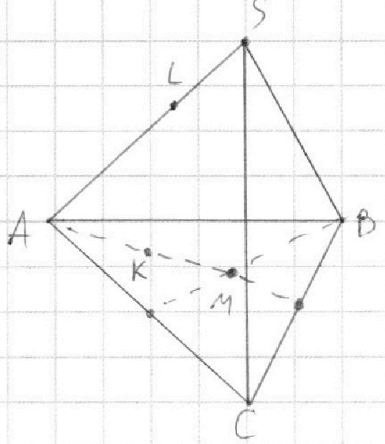
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

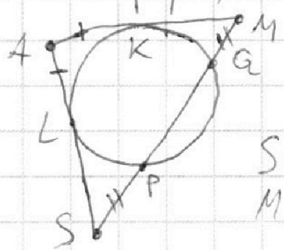
№ 7



Решение:

Рассмотрим пересеч Ω и (AMS)

Т.к Ω - сфера, то это будет окр



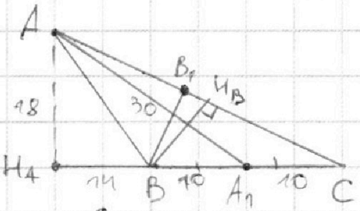
$AK = AL$ (касат из одн т.)

$SL^2 = SP \cdot SQ$ (произ-е отр секущ и касат)

$MK^2 = MQ \cdot MP$

Т.к $MQ = SP$, то $SQ = MP \Rightarrow SL = MK \Rightarrow AS = AM$ (т.к $AK = AL$) $= 20$

$AA_1 = 1{,}5\, AM = 30$, (по св-ву т. перес медиан)



$h_a = \frac{2S}{BC} = 18 \Rightarrow A_1H_A = 24$ (т. Пифаг.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle B$ - тупой $\Rightarrow H_AB = 14$, $H_AC = 34$

$\Rightarrow AB = 2\sqrt{130}$, $AC = 2\sqrt{370}$ (т. Пифаг)

$h_b = \frac{2S}{AC} = \frac{180}{\sqrt{370}} = \frac{18\sqrt{370}}{37}$, $h_c = \frac{2S}{AB} = \frac{180}{\sqrt{130}} = \frac{18\sqrt{370}}{130}$

$AB_1 = \sqrt{370}$; $AH_B = \sqrt{520 - \frac{18^2 \cdot 10}{37}} = \sqrt{\frac{520^2 - 3240}{37}} = \sqrt{\frac{270400 - 3240}{37}} =$

$=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$0 \le y_1, y_2 \le 90$ 91 в-т

$-15 \le x_1; x_2 \le 17$

33 в-та

все точки $\in$ какой-то прямой с наклоном $-6x$ и сдвигом от 0 до 102

$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

$\vdots 6 \quad y_2 - y_1 \vdots 6$

$y_2 - y_1 = 6k$

$y = -6x + l$

$0 \le l \le 102$

$y_2 = -6x_2 + l_2 \quad y_1 = -6x_1 + l_1$

$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 6x_2 - 6x_1 - 6x_2 + l_2 + 6x_1 - l_1 = 48$

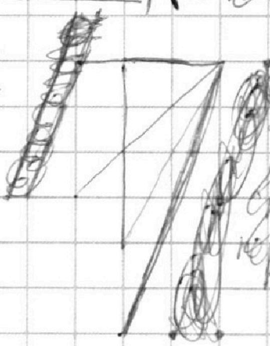
т.к. точки A, B $\in$ одн. прямой

$x_2 - x_1 + k = 8$

$k \in [0; 15]$

16 вар-тов на k

$l_2 = l_1 + 48$



$y = -6x + l$

кажд. прямая сколько точек пересекает?

$A \in y = -6x + l$

$B \in y = -6x + l + 48$

$k = 2 \quad l = 45$

$l = 4,5$

1) $\log^4_{11} x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$

2) $\log^4_{11}(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{(0{,}5y)^3}(11^{-13}) - 5$

ОДЗ: $x>0,\ x\neq 1$

$y>0,\ y\neq 2$

1) $\log^4_{11} x - \cancel{\frac{6}{\log_{11} x}} = \cancel{\log} \frac{-2}{3}\log_x 11 - 5$

$\log^4_{11} x - \frac{16}{3}\log_x 11 + 5 = 0 \qquad \log_{11} x = a$

$a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \ |\cdot 3a \neq 0$

1 2 3 4 5 6 7

$f(a)\ 3a^5 + 15a - 16 = 0$

$f'(a) = 15a^4 + 15$ всегда $\geq 15 \Rightarrow f(a)$ монотонна $\Rightarrow$ 1 корень

надо подобрать корень

2) $\log^4_{11}(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \frac{-13}{3}\log_{0{,}5y} - 5$

$\log^4_{11}(0{,}5y) + \frac{16}{3}\log_{0{,}5y} 11 + 5 = 0 \qquad \log_{11}(0{,}5y) = b$

$b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0 \ |3b \Rightarrow 3b^5 + 16 + 15b$

$f'(b) = 15b^4 + 15 \geq 15$

$3b^5 + 15b + 16 = 0$

$3a^5 + 15a - 16 = 0$

$3b^5 + 3a^5 + 15b + 15a = 0 \ |:3$

$b^5 + a^5 + 5(b+a) = 0$

$b^5 + a^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) =$

$= a^5 - \cancel{a^4b} + \cancel{a^3b^2} - \cancel{a^2b^3} + \cancel{ab^4} + \cancel{a^4b} - \cancel{a^3b^2} + \cancel{a^2b^3} - \cancel{ab^4} + b^5$

$a = -b$

$\log_{11} x = -\log_{11} 0{,}5y$

$\log_{11} x + \log_{11} 0{,}5y = 0$

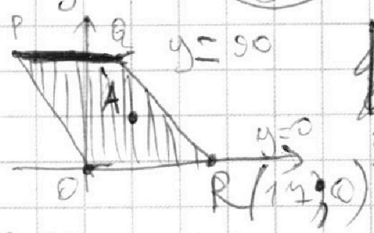
$\log_{11} 0{,}5xy = 0$

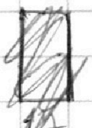
$0{,}5xy = 1 \Rightarrow xy = 2$

№6 $O(0;0),\ P(-15;90)\ \ Q(2;90)\ \ R(17,0)$

кол-во пар

$A(x_1;y_1)\quad B(x_2;y_2)\qquad x_1\,x_2\,y_1\,y_2$ целые





$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

$0 \leq y_1, y_2 \leq 90$

$OP:\ \frac{x}{-15} = \frac{y}{90}\ |\cdot 90$

$y = -6x$

$RQ:\ \frac{x-2}{15} = \frac{y-90}{-90}\ |\cdot(-90)$

$-6x + 12 = y - 90 \quad y = -6x + 102$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$ab \vdots 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

$bc \vdots 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$

$ac \vdots 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

$\Downarrow$

$a^2b^2c^2 \vdots (2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52})$

$\Downarrow$

$abc \vdots 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$, но $ac \vdots 5^{28} \Rightarrow abc$ тоже $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Теперь нужен пример $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$

$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$

$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$

$-10\alpha \in [-10\pi; 0]$

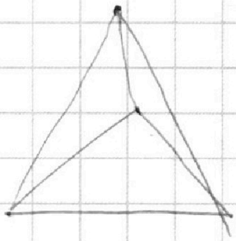
$9\pi - 10\alpha \in [-\pi; 9\pi]$

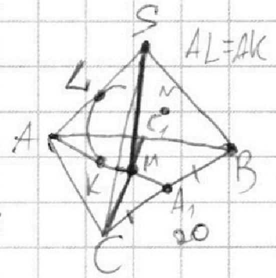
$2x = 9\pi - 10\alpha \quad x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]$

$x+y \geq 13$

$x+z \geq 28$

$2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$





№3

$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$\arccos(\sin x) = \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$

$\cos\alpha = \sin x$

$\cos\alpha - \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$

$-2\sin\left(\frac{\alpha - x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha + x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0$

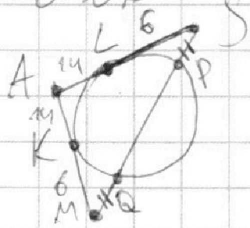
$\frac{\alpha - x}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi n \mid \cdot 2 \qquad \frac{\alpha + x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi n \mid \cdot 2$

1) $\alpha = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \qquad$ 2) $\alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n$

$10x - 5\pi + 20\pi n = 9\pi - 2x \qquad 5\pi - 10x + 20\pi n = 9\pi - 2x$

$12x = 14\pi - 20\pi n \qquad 8x = 20\pi n - 4\pi$

$x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi n \qquad x = \frac{5}{2}\pi n - \frac{\pi}{2}$



$SL^2 = SP \cdot SQ$

$MK^2 = MQ \cdot MP$

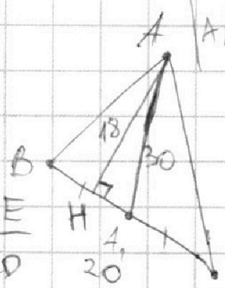
$SL^2 = MK^2$ отк

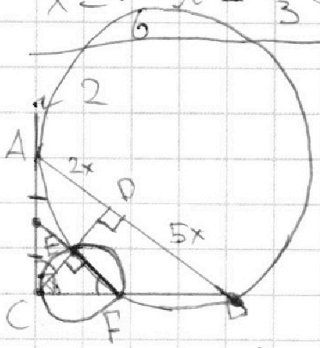
$SL = MK$

$S_{ABC} = 180 \quad SA = BC = 20$

$SA = AM = 20$

$AA_1 = 30$





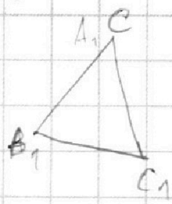
$\frac{S_\triangle ACD}{S_\triangle CEF}$ – ? Хочу найти $\frac{CE}{CD}$

$\frac{AB}{BD} = \frac{4}{5}$

$\frac{CE}{CD} = \frac{1}{2}$

$\frac{5}{2} S_{ACD} = S_{BCD}$

$\frac{S_{ACB}}{S_{CEF}} = \frac{4}{1} = \frac{5}{2} \cdot 4 = 10$



1) $x =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

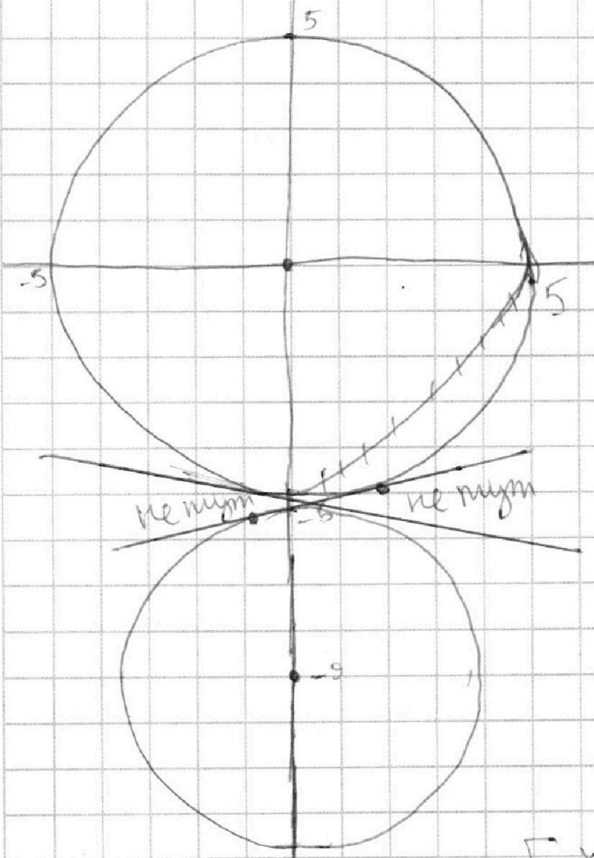
$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+72)=0 \end{cases}$ Хреш для кажд $a\ \exists b$: хреш

$\Updownarrow$

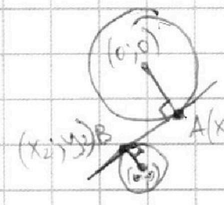
$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \quad \text{- центр } (0;0)\ r=5 \\ x^2+(y+9)^2=14 \quad \text{- центр } (0;-9)\ r=\sqrt{14}<4 \end{array}\right. \end{cases}$

$6ay=b-5x$ (при $a=0$: подходит $5x=b$ ~~...~~

при $a\neq 0$ $y=\dfrac{b-5x}{6a}=\dfrac{-5}{6a}x+\dfrac{b}{6a}$ - прямая



прямая должна иметь козф. наклона между касат. Надо найти козф наклона этих касательных!!!



$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$

$\dfrac{x-x_1}{-x_1}=\dfrac{y-y_1}{-y_1}$ $\quad x_1^2+y_1^2=25$

$\dfrac{x-x_2}{-x_2}=\dfrac{y-y_2}{-9-y_2}$ $\quad x_2^2+(y_2+9)^2=14$

$y=kx+l$ $\quad \begin{cases} x^2+y^2=25 & 1р. \\ x^2+(y+9)^2=14 & 1р. \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} x^2+(kx+l)^2=25 \quad 1р \\ x^2+(kx+(9+l))^2=14 \quad 1р \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} (1+k^2)x^2+2kxl+l^2-25=0 \\ x^2(1+k^2)+2kx(l+9)+l^2+2l+77=0 \end{array}\right.$ $\quad D_1=4k^2l^2-4(l^2-25)(k^2+1)=0$ $\quad k^2=\dfrac{l^2}{25}+1$