



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Произведения чисел a^m, b^m, c^m и a^m равно:

$(a^m \cdot b^m \cdot c^m) = a^m b^m c^m = (abc)^m$ и оно может делиться
на произведения a^m, b^m и c^m .

$$(abc)^2 = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot 2^{16} \cdot 3^5 \cdot 5^{22} \cdot 3^6 \cdot 5^8 \cdot 5^2$$

Тогда $\min(abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$, но в квадратах
степени ~~для натуральных чисел~~ степеней
простых множителей обязательно четные,
значит в $(abc)^2$ не может входить 3, но т.к.
оно делится на него делимая 3 в нем
как минимум в 60 степеней, значит
 $\min(abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52}$, а $\min(abc) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

Доказательство, найденное при

Но a, b, c и a^m, b^m, c^m значим в

a, b, c с теми входим минимум в 28 степеней

т.е. $\min(abc) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$, достигается при

$$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Поша по теореме Пифагора в $\triangle ACD$:

$$(2x)^2 + (\sqrt{10}x - \sqrt{14}t)^2 = (\sqrt{14}x - 7t)^2$$

t выражается через x , а наименьшая площадь и все находится

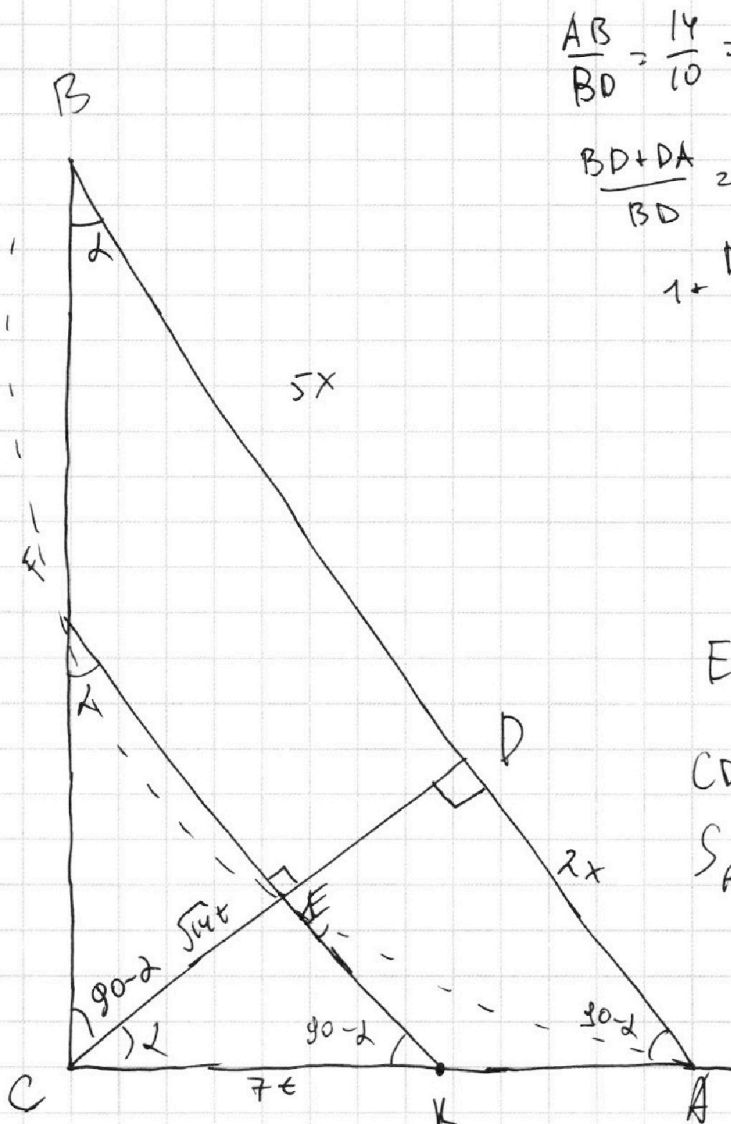
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{BD} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{BD+DA}{BD} = \frac{7}{5}$$

$$1 + \frac{DA}{BD} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{DA}{BD} = \frac{2}{5}$$

$$DA = 2x$$

$$BD = 5x$$

$$EF \parallel AB \Rightarrow CD \perp EF$$

$$CD = \sqrt{BD \cdot AD} = \sqrt{10}x$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD^2 = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{10}x = \sqrt{10}x^2$$

Продлим FE до пересечения с AC, перпендикулярная
по теореме о касательной и секущей:

$$AK^2 = KE \cdot KF$$

$$CE^2 = KE \cdot EF \text{ (из прямоугольного } \triangle CFK \text{)}$$

$$\frac{AK^2}{CE^2} = \frac{KF}{EF} = \frac{AB}{BD} = \frac{7}{5} \text{ (т.к. } \triangle ABC \sim \triangle CFK \text{ (FK} \parallel AB \text{))}$$

$$AC^2 = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = \sqrt{14}x, \quad \frac{CK}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{\sqrt{14}}$$

$CK = 7t$
 $CE = \sqrt{14}t$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$\arccos(y)$ принимает значения от 0 до π , следовательно
также $10 \arccos(\sin x)$ принимает значения
от 0 до 10π . Значит и правая часть
функции имеет от 0 до 10π :

$$0 \leq 8\pi - 2x \leq 10\pi; \quad -8\pi \leq -2x \leq \pi; \quad 4,5\pi \geq x \geq -\frac{\pi}{2}.$$

Зная что $\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2}$ преобразуем уравнение:

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 8\pi - 2x; \quad 5\pi - \arcsin(\sin x) = 8\pi - 2x$$

$$10 \arcsin(\sin x) = 2x - 4\pi$$

$$1) x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ тогда } \arcsin(\sin x) = x;$$

$$10x = 2x - 4\pi$$

$$8x = -4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \checkmark$$

$$2) x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right), \text{ тогда } \arcsin(\sin x) = \pi - x$$

$$10(\pi - x) = 2x - 4\pi$$

$$10\pi - 10x = 2x - 4\pi$$

$$12x = 14\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{6} \checkmark$$

$$3) x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]; \text{ тогда } \arcsin(\sin x) = x - 2\pi$$

$$10(x - 2\pi) = 2x - 4\pi$$

$$8x = 16\pi$$

$$x = 2\pi \checkmark$$

$$4) x \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right); \text{ тогда } \arcsin(\sin x) = 3\pi - x$$

$$10(3\pi - x) = 2x - 4\pi$$

$$12x = 34\pi$$

$$x = \frac{17\pi}{6} \checkmark$$

$$5) x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right], \text{ тогда } \arcsin(\sin x) = x - 4\pi$$

$$10(x - 4\pi) = 2x - 4\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{2} \checkmark$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, 2\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{9\pi}{2}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение 1/4 (2)

Первое ур-ие задает прямую, которая может иметь с окружностью максимум 2 точки пересечения. Значит прямая может пересекать обе окружности. Преобразуем 1 ур-ие:

$$6ay = b - 5x$$

при $a=0$ ур-ие задает ^{вертикальную} ~~горизонтальную~~ прямую которая ~~не~~ может пересекать ~~обе~~ ^{обе} окружности. При $a \neq 0$:

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

Для всех таких a , при которых ~~прямая~~ не существует b , при которых прямая является ~~касательной~~ ^{касательной} *1, *2 или прямой между окружностями, не имеющей общих точек. Найдется b , что прямая пересекет обе окружности. Найдём такие c , что прямая $y = cx + d$ является касательной к обеим окружностям

$$x^2 + (cx + d)^2 = 25$$

формула имеет решение

$$x^2 + c^2x^2 + 2cxd + d^2 = 25$$

$$(c^2 + 1)x^2 + 2cdx + d^2 - 25 = 0$$

$$D_1 = c^2d^2 - (c^2 + 1)(d^2 - 25) = 0$$

$$x^2 + (cx + d + 9)^2 = 4$$

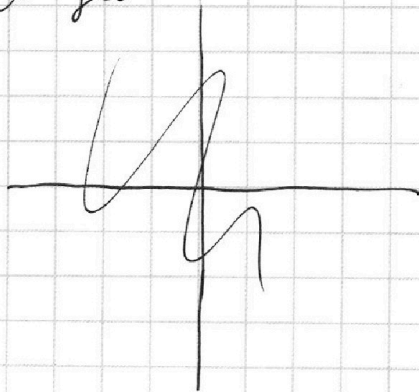
формула имеет решение

$$x^2 + c^2x^2 + d^2 + 81 + 2cxd + 18cx + d^2 + 18d = 4$$

$$(c^2 + 1)x^2 + (2cd + 18c)x + 18d + 77 = 0$$

$$D_2 = (cd + 9c)^2 - (c^2 + 1)(d^2 + 18d + 77) = 0$$

Найдём такие c которые существуют:



см. см. лист

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4 (1)

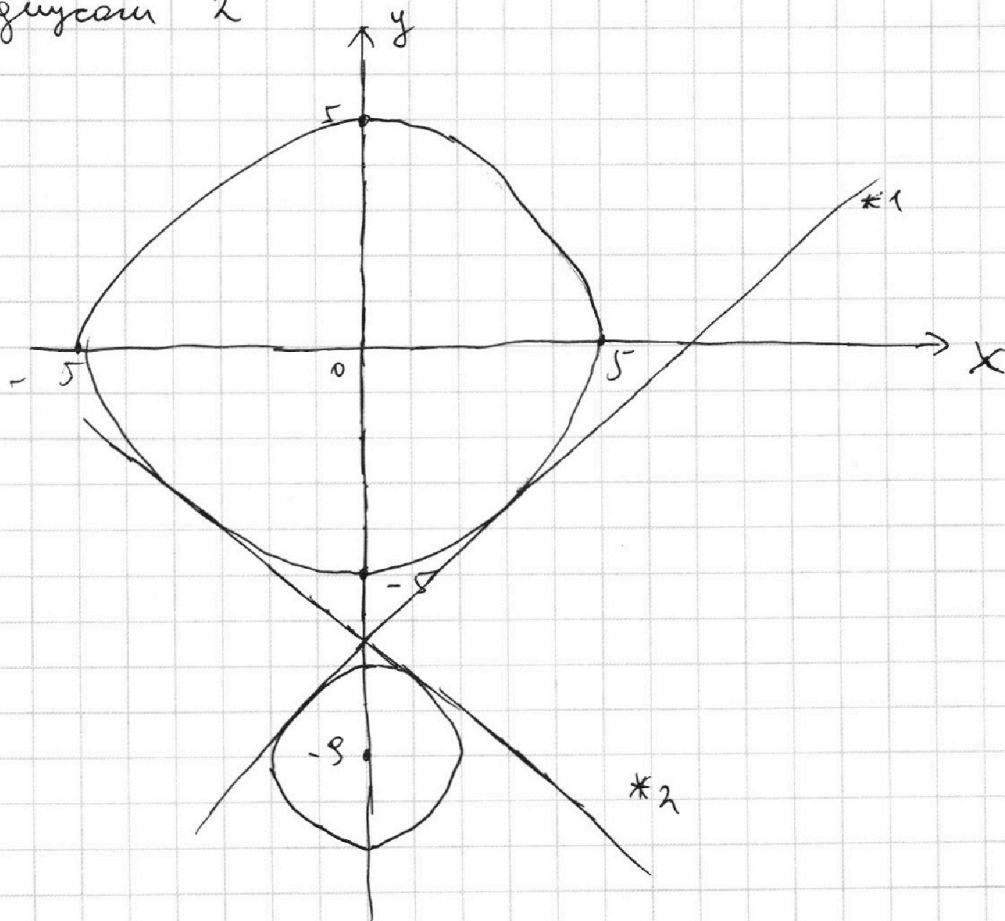
$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 (1) \\ x^2 + y^2 = 25 (2) \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (3): x^2 + y^2 + 18y + 77 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 81 &= 9 \\ x^2 + (y + 9)^2 &= 9 \end{aligned}$$

(2) - окружность с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 5

(3) - окружность с центром в точке $(0; -9)$ и радиусом 3



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

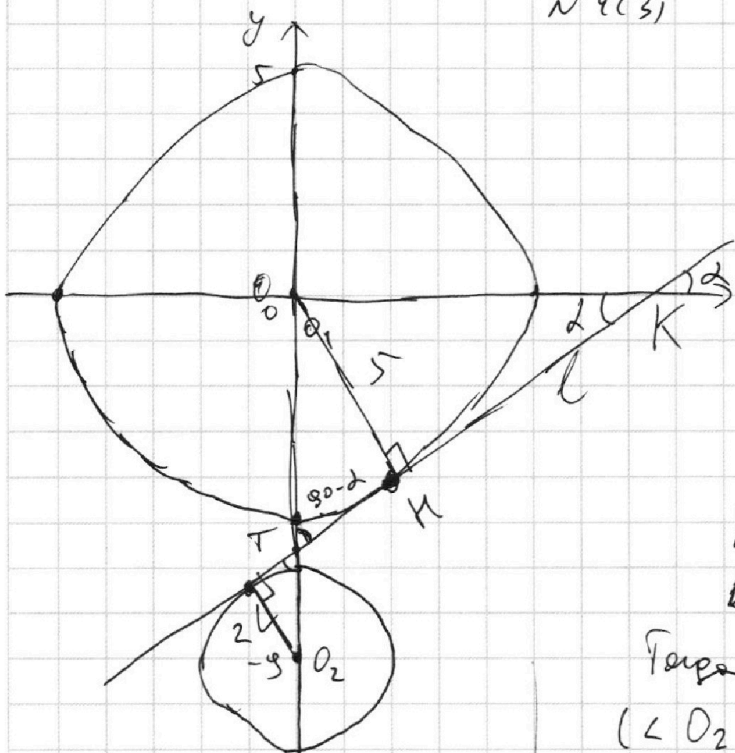
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4(3)



l - общая касат.

L и K - точки касания

центр 1 окружности O_1 ,
2 окружности O_2

$O_2L \perp l, O_1K \perp l$

\Downarrow
 $O_2L \parallel O_1K$

Пучок точек пересечения

k, l и ось $x \equiv T$

Треугольники $\triangle O_2LT \sim \triangle O_1TK$

($\angle O_2LT = 90^\circ, \angle TKO_1 = 90^\circ$,
 $\angle LTO_2 = \angle O_1TK$ (вершины касания))

$O_1O_2 = 8$, Пучок $O_1T = x$, тогда

$O_2T = 8 - x$. По теореме Пифагора $O_2T = 2$ (радиус)

По подобию: $O_1K = 5$ (радиус)

$$\frac{5}{2} = \frac{x}{8-x}; \quad -5x + 45 = 2x$$

$$x = \frac{45}{7}$$

$\operatorname{tg} \alpha = c$, тогда $\angle O_1KT =$
 $= d$ (верт.), $\angle O_1TK =$
 $= 90 - d$

$\operatorname{tg} d = c \operatorname{tg}(90 - d)$, значит
мысли $\operatorname{ctg}(\angle O_1TK)$

Итак по т. Пифагора в $\triangle O_1TK$:

$$TK^2 = O_1T^2 - O_1K^2 = \frac{45^2}{49} - 25 = \frac{45^2 - 25 \cdot 49}{49} = \frac{25 \cdot 81 - 25 \cdot 49}{49} = \frac{25 \cdot 32}{49}$$

$$TK = \frac{20\sqrt{2}}{7}, \quad \operatorname{ctg} \angle O_1TK = \frac{20\sqrt{2}}{7} : 5 = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Аналогично найдем угол касания

прямой * 2 Очевидно, в силу симметрии

пр. д. ось ординат касательной

оси y , прямая * 2 имеет угол наклона $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

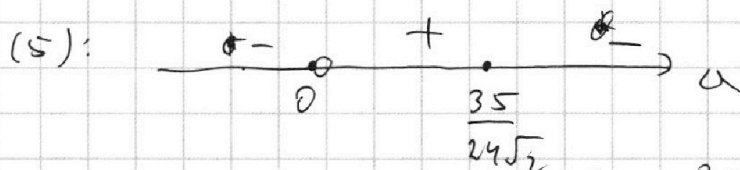
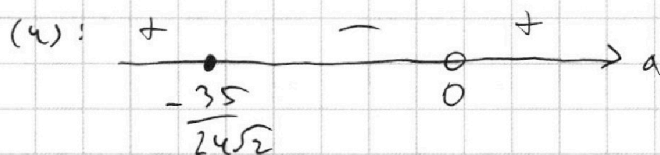
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4(4)

Знакомим или незнакомим все ~~кроме~~ a ,
кроме $-\frac{4\sqrt{2}}{7} \leq -\frac{5}{6a} \leq \frac{4\sqrt{2}}{7}$; $-4\sqrt{2} \leq -\frac{35}{6a} \leq 4\sqrt{2}$

$$\begin{cases} -\frac{35}{a} \leq 24\sqrt{2} \\ -\frac{35}{a} \geq -24\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} \frac{35}{a} \geq -24\sqrt{2}; & \frac{35+24\sqrt{2}a}{a} \geq 0 \quad (4) \\ \frac{35}{a} \leq 24\sqrt{2}; & \frac{35-24\sqrt{2}a}{a} \leq 0 \quad (5) \end{cases}$$



Дальше решение $(0; \frac{35}{24\sqrt{2}}]$, $a \neq 0$ помним
Итак, знакомим все кроме этого т.е.
Ответ: $(-\infty; 0) \cup (\frac{35}{24\sqrt{2}}; +\infty)$

Общее решение: $(-\infty; -\frac{35}{24\sqrt{2}}] \cup [\frac{35}{24\sqrt{2}}; +\infty)$

Подходим все кроме этого ~~кроме~~.

Ответ: ~~$(-\infty; 0) \cup (\frac{35}{24\sqrt{2}}; +\infty)$~~
 $(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5(2)

Знаем, возможно только $xt=1$, т.е. $xy=2$

Контроль зрения, что при $xt=1$ ~~тогда~~ $t = \frac{1}{x}$

$$(2) \text{ превращается } \rightarrow \log_{11}^4\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{16}{3} \log_x(11) - 5;$$

$$\log_{11}^4\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\text{при этом (1)} \rightarrow \log_{11}^4(x) = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\text{т.е. } \log_{11}^4(x) = \log_{11}^4\left(\frac{1}{x}\right), \text{ откуда}$$

$$\left[\log_{11} x = \log_{11}\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow \text{имеет только решения } t = \pm 1, \text{ которые не годятся.} \right.$$

$$\left. \log_{11}^4 x = -\log_{11}^4\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow \log_{11} x = \log_{11} x \text{ верно} \right.$$

~~тогда~~ при любых $x > 0$, ~~тогда~~.

Значит xt действительно может быть равно 1 и ничего больше

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Первое уравнение: $\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \frac{1}{3} \log_x \left(\frac{1}{121} \right) - 5$

$$\log_{11}^4 x = 6 \log_x 11 - \frac{2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5 \quad (1)$$

Второе уравнение ($0,5y=t$): $\log_{11}^4 t + \log_t 11 = \log_t (11^{13}) - 5$

Уз (1): левая часть > 0 ($= 0$ при $x=1$, но при $x=1$ $\log_x 11$ не определен)

$$\log_{11}^4 t = -\frac{13}{3} \log_t 11 - \log_t 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 t = -\frac{16}{3} \log_t 11 - 5 \quad (2)$$

Тогда правая часть может быть больше нуля
 Тогда $\log_x 11$ обязательно > 0

Уз (2): левая часть > 0 ($= 0$ при $t=1$, но при $t=1$ $\log_t 11$ не определен). Тогда правая часть тоже > 0 , тогда $-\frac{16}{3} \log_t 11 > 0$

Сделаем замены $\log_t 11 < 0$

$$a = \log_{11} x > 0$$

$$b = \log_{11} t < 0$$

и вычтем из (1) (2), получим:

$$a^4 - b^4 = \frac{16}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = \frac{16}{3} \left(\frac{a+b}{ab} \right)$$

$$(a-b)(a+b)(a^2 + b^2) = \frac{16(a+b)}{3ab}$$

1) $a+b=0$, $a=-b$; $\log_{11} x + \log_{11} t = 0$, $\log_{11}(xt) = 0$, $xt=1$

2) $a+b \neq 0$. $(a-b)(a^2 + b^2) = \frac{16}{3ab}$ правая часть < 0

При этом $a-b > 0$, т.к. $a > 0$, $b < 0$, $a^2 + b^2$ также > 0 , значит левая часть > 0 , значит левая часть > 0 , правая часть < 0 , т.к. a и b разных знаков, значит равенство невозможно.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

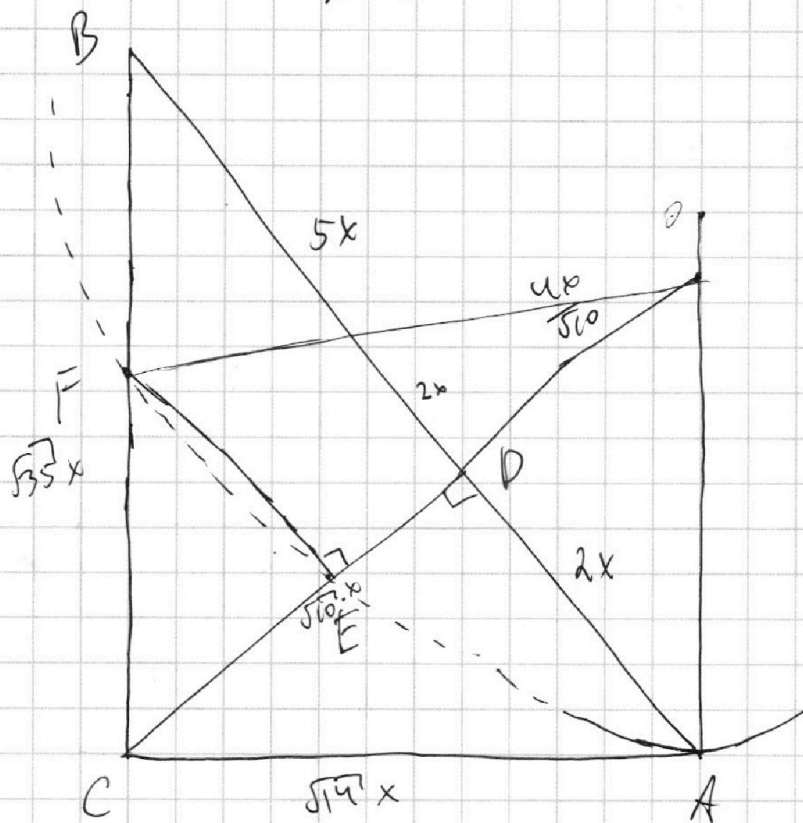
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2



$$10x^2$$

$$4x^2$$

$$\sqrt{10}x \cdot t = 4x^2$$

$$\sqrt{10}t = 4x$$

$$x = \frac{4x}{\sqrt{10}}$$

$$0,5y = t$$

$$-\frac{2}{3} + 6 = \frac{10}{3} \Rightarrow \log_{11}^4 t + \log_t 11 = \frac{1}{3} \log_t (11^{-13}) - 5$$

$$\log \log_{11}^4 t + \log_{t \frac{11}{14}} 11 = -\frac{13}{3} \log_t 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5 \quad \log_{11}^4 t = -\frac{16}{3} \log_t 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 x + \log_{11}^4 t = -10$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \frac{1}{3} \log \frac{1}{11} - 5$$

$$\log_{11}^4 x = -\frac{2}{3} \log_x 11 + 6 \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 t + \log_t 11 = \frac{16}{3} - 5$$

~~(0,5)~~

$$(0,5y)^3$$

$$0,125 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$(0,5y)^3$$

$$\frac{45}{7^2}$$

$$y = x - \frac{45}{7}$$

$$x^2 + \left(x - \frac{45}{7}\right)^2 =$$

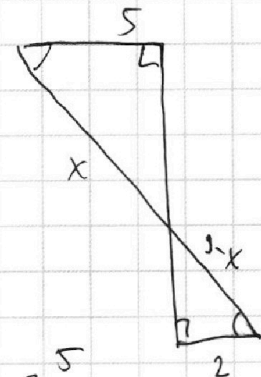
$$45 \cdot 45 = 5 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 9 = 25 \cdot 81$$

$$\frac{x}{9-x} = \frac{5}{2}$$

$$2x = -5x + 45$$

$$7x = 45$$

$$x = \frac{45}{7}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{11}^4 x - \log_{11}^4 t = \frac{16}{3} (\log_x 11 + \log_t 11) = \frac{16}{3} \left(\frac{\log_{11} x + \log_{11} t}{\log_{11} x \cdot \log_{11} t} \right)$$

$$a^4 - b^4 = \frac{16}{3} \left(\frac{a+b}{ab} \right)$$

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = \frac{16}{3} \left(\frac{a+b}{ab} \right)$$

$$(a-b)(a+b)(a^2 + b^2) = \frac{16}{3} \left(\frac{a+b}{ab} \right)$$

$$(a-b)(a^2 + b^2) = \frac{16}{3ab}$$

$$\log_{11} x + \log_{11} t = 0$$

$$\log_{11}(xt) = 0$$

$$xt = 1$$

$$x \cdot y = 1$$

$$y = 2$$

$$\log_{11}^5 x = \frac{16}{3} - 5 \log_{11} x$$

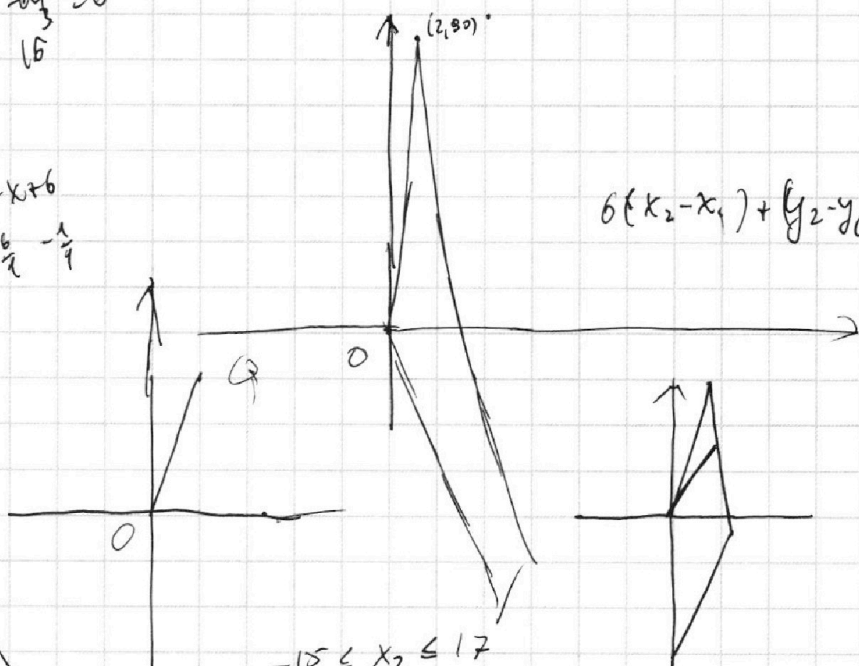
$$3 \log_{11}^5 x + 15 \log_{11} x = \frac{16}{3} \cdot 3 = 16$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0 \quad x^2 + 7x + 6$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

$$t = \frac{2}{3}$$

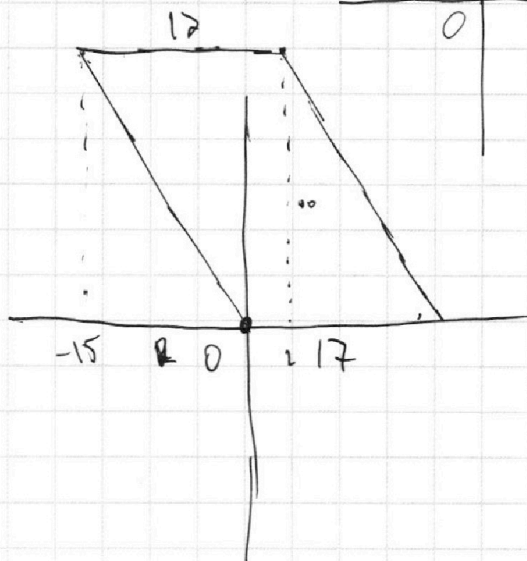


$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 18$$

$$-15 \leq x_2 \leq 17$$

$$-15 \leq x_1 \leq 17$$

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 30$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $\log_{11}^4 x = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5$ $x \neq -1$ $t = 0,5y$ $\log_x 11 > 0$
 2) $\log_{11}^4 t = -\frac{16}{3} \log_t 11 - 5$ $x < 1$ $\log_t 11 < 0$
 $x \neq -1$ $x t = 1$ $x = \frac{1}{t}$

$a^4 - b^4 = \frac{16}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ $x > 1$ $a > 0$ $b < 0$ $x \Leftrightarrow t = \frac{1}{x}$ $a = -b$
 $(a-b)(a+b)(a^2+b^2) = \frac{16(a+b)}{ab}$ $\log_{11} t x = -\log_{11} b$

$(a-b)(a^2+b^2) = \frac{16}{ab}$ $ab = z$ $x t = 1$

$ab(a-b)(a^2+b^2) = 16$ $a-b = t$ $x = \frac{1}{t}$
 $ab = z$

$t z (t^2 + 2z) = 16$

$t z = 2$ $z = \frac{2}{t}$ $z = 2$ $t = 1$
 $t^2 + 2z = 8$ $\frac{2}{t} = 8$ $\frac{2}{t} = v$
 $z = \frac{2}{t}$ $\frac{2}{t^2} + \frac{4}{t} = 8$ $v^2 + 2v = 8$
 $t^2 + \frac{4}{t} = 8$ $v^2 + 2v - 8 = 0$
 $t^3 - 8t + 4 = 0$ $v = -4$ $v = 2$

$t z = 2$ $z = \frac{2}{t}$
 $t^2 + 2z = 8$

$\log_{11}^4 x = \log_{11}^4 \frac{1}{x}$
 $\log_{11} x = -\log_{11} \frac{1}{x}$

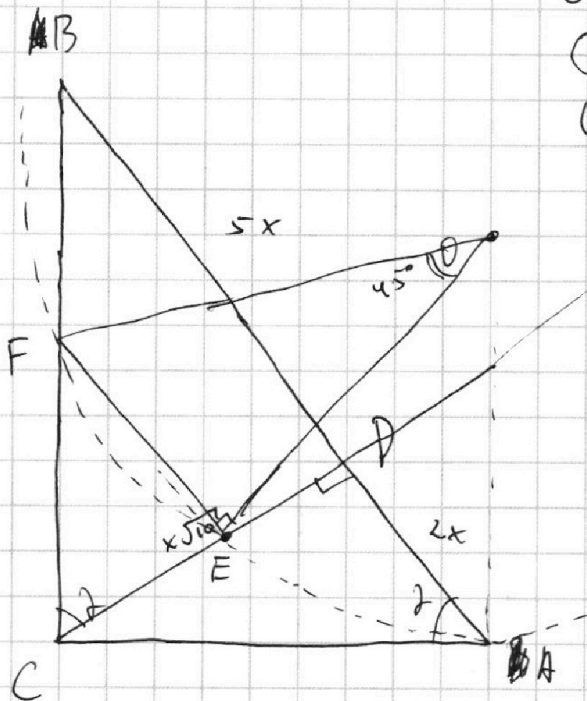
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CD^2 = BD \cdot DA$$

$$CD^2 = 10x^2$$

$$CD = x\sqrt{10}$$

11^{-2}

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \frac{1}{3} \log_x \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3 \log_{11} x} - 5$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5$$

$$3t^5 - 18 = -2 - 15t$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 18y + 81 = 4$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$

$$x = \frac{b}{5}$$

$$ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$(abc)^2: 2^{36} \cdot 3^{53} \cdot 5^{62}$$

$$a = 2^{18}$$

$$b = 2^4 \cdot 3^8$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$$

$$abc = 2^{30} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^{13}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$$

$$5x + 6ay - b = 0$$

$$6ay = -5x + b$$

$$y = -\frac{5}{6}ax + \frac{b}{6a}$$

$$-\frac{5}{6}$$

$$\log_{11}^4 x = \frac{1}{3} \log_{11}(11^{-2}) - 5$$

$$\log_{11}^4 x = -\frac{2}{3} \log_{11} 11 - 5 + 6 \log_{11} x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3. 0 \leq 8\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$1) \arcsin x \leq \pi$$

$$-8\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$8\pi \geq 2x \geq -\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 4,5\pi$$

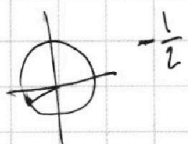


$$\arcsin(\sin(2\pi))$$

$$\arcsin(\sin 0) = 0$$

$$\arcsin(\sin(\frac{9\pi}{4})) =$$

$$= \frac{\pi}{4}$$



$$-\frac{1}{2}$$

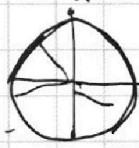
$$-\frac{10\pi}{6} \geq 2x - 4\pi$$

$$\frac{17\pi}{6} - \frac{24\pi}{6}$$



$$\frac{13\pi}{4}$$

$$2,5\pi$$



$$3\pi$$

$$\frac{10\pi}{6} \geq 2x - 4\pi$$

$$-\frac{1}{2} \geq \frac{10\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{3} = \frac{17\pi}{6} - 4\pi = \frac{17\pi}{6} - \frac{24\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$$

$$1) x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]: (\log_{11}^2 x - \log_{11}^2 t) (\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 t)$$

$$10x = 2x - 4\pi$$

$$8x = -4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$2) x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]:$$

$$10(\frac{\pi}{2} - x) = 2x - 4\pi$$

$$5\pi - 10x = 2x - 4\pi$$

$$12x = 9\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$$

$$3) x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]:$$

$$\log_{11}^4 x - \log_{11}^4 t =$$

$$= \frac{16}{3} (\log_{11} 11 + \log_{11} 11)$$

$$\frac{10\pi}{6} \geq \frac{34\pi}{6} - 4\pi$$

$$10x - 40\pi = 2x - 4\pi$$

$$8x = 36\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{2}$$

$$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3} \log_{11} 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 t = -\frac{16}{3} \log_{11} 11 - 5$$

$$t = x = 1$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot x \sqrt{10} \cdot 2x = x^2 \sqrt{10} = 5\pi$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{5}{5}$$

$$CD = x \sqrt{10}$$

$$t = 0,5y$$

$$\frac{1}{t} = x; x = t$$

