



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot k, \quad bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot n, \quad ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 = mnk \cdot 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$$

$a^2 b^2 c^2$ - квадрат натур. числа, значит

$$24+28 = 2 \cdot 24 + 4 = 48 + 4 = 52$$

степени 2, 3 и 5 должны быть чётными.

У ~~24~~ и ~~52~~ степень уже чётная ~~(если не равенство mnk)~~,

а у 3 - нечёт. Значит, в mnk должно быть 3 в нечёт

степени, а у 2 и 5 - в чёт. Отсюда $\min(mnk) = 3^1 \cdot 2^0 \cdot 5^0 = 3$,

$$\text{и } \min(abc) \geq \sqrt{2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52}} = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26} \text{ (если}$$

$$mnk > 3, \text{ то } abc = \sqrt{mnk \cdot 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}} > 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

Ответ: ~~$2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$~~ Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$,

* $(\min(abc)) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ - достигается при $k=3, m=n=1$ и

Пусть $a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}, b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}, c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$

Допускаем, $mnk = 3$. Тогда $m=3, k=3$ или $n=3$, и получаем систему

1) $k=3$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_2 + x_3 = 14 \\ x_3 + x_1 = 16 \end{cases}$ ~~не подходит~~ $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 12$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 14 \\ y_2 + y_3 = 21 \\ y_1 + y_3 = 25 \end{cases} \Rightarrow \text{логик. } y_1 = 9, y_2 = 5, y_3 = 16$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 11 \\ z_2 + z_3 = 13 \\ z_3 + z_1 = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 11 \\ z_1 - z_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow z_1 = 13, z_2 = -2 \text{ - не подходит}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



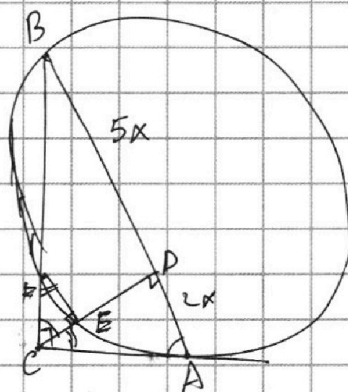
№ 2

Пусть $BD = 5x$, тогда $AD = 2x$
 $\left(\frac{AB}{BD} = 1,4 = \frac{7}{5} \Rightarrow AB = 7x, BD = 5x \right)$.

$AB \parallel EF \Rightarrow \angle CEF = 90^\circ$ ($CD \perp AB$).

$\angle BCD = \angle CAB$. Значит, $\triangle ACD \sim \triangle CFE \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AC}{CF} \right)^2. \quad (1)$$



Применим свойство о том, что высота в произв. треугольнике делит его на два подобных, а высота в прямоугольном треугольнике делит его на три подобных.

$$\frac{AC^2}{CB^2} = \frac{AD}{BD} = \frac{2}{5} \quad (2). \quad \text{Заметим угол } \angle C \text{ отн-но гипотенузы}$$

$$\text{Отр: } \angle \text{отн } C = AC^2 = CF \cdot CB \Rightarrow \frac{AC^2}{CB^2} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{2}{5}. \quad (3)$$

Поскольку $CD^2 = AD \cdot BD$, то $CD = \sqrt{10}x \Rightarrow AC^2 = AD^2 + CD^2 = 14x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{14}x \Rightarrow \sin \angle A = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} \Rightarrow \sin \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \cdot 7x = \sqrt{35}x.$$

$$(3): \frac{CF}{CB} = \frac{2}{5} \Rightarrow CF = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{35}x$$

$$(4): \frac{AC^2}{CF^2} = \frac{14x^2}{\frac{4}{25} \cdot 35x^2} = \frac{14}{\frac{4}{5} \cdot 7} = \frac{2}{\frac{4}{5}} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$$

Ответ: $\frac{5}{2}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 3

Оценка как:

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \Rightarrow 10 \arccos(\sin x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2} \\ 9\pi - 2x \geq 0, \\ 9\pi - 2x \leq 10\pi \end{cases}$$

$$\text{Для } \forall x \in (-1; 1) \text{ верно: } \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \arccos(\sin x) = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) \cdot 10 = 5\pi - 10 \arcsin(\sin x)$$

Получаем:

$$10 \arcsin(\sin x) - 2x = -4\pi$$

$$1) \text{ Если } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ то } 10 \arcsin(\sin x) = 10x, \text{ и имеем:}$$

$$10x - 2x = -4\pi, \quad 8x = -4\pi, \quad x = -\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$2) \text{ Если } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2}, \text{ то имеем: } 10 \arcsin(\sin x) = 10 \arcsin(\sin(\pi - x)) =$$

$$= 10\pi - 10x, \text{ и имеем:}$$

$$10\pi - 12x = -4\pi \Rightarrow 12x = 14\pi, \quad x = \frac{14\pi}{12} = \frac{7\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$3) \text{ Если } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{2}, \text{ то } \sin x = \sin(x - 2\pi), \text{ и получаем:}$$

$$10x - 20\pi - 2x = -4\pi; \quad 8x = 16\pi, \quad x = 2\pi \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$4) \text{ Если } \frac{5\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{2}, \text{ то } \sin x = \sin(\pi - x + 2\pi) = \sin(\pi - x), \text{ и имеем:}$$

$$30\pi - 10x - 2x = -4\pi; \quad -12x = -34\pi, \quad x = \frac{34\pi}{12} = \frac{17\pi}{6} \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$$

$$5) \text{ Если } \frac{7\pi}{2} < x \leq \frac{9\pi}{2}, \text{ то } \sin x = \sin(x - 4\pi), \text{ и:}$$

$$10x - 40\pi - 2x = -4\pi; \quad 8x = 36\pi, \quad x = \frac{36\pi}{8} = \frac{9\pi}{2} \in \left(\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$$

$$x < -\frac{\pi}{2} \text{ или } x > \frac{9\pi}{2} \text{ не годя. (см. выше)}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{9\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

Из 2-го ур-ия:

$$x^2 + y^2 = 25 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$x^2 + y^2 + 18y + 81 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

Это задает 2 окр-и с у-иemi
(0;0), (0; -9) и радиусы 5 и 2 соотв.

(см. рис.).

Если $a=0$, то $5x=b$, $x=\frac{b}{5}$ и, очевидно,

подходящее b найдется (подход.

b такое, что прямая, заданная 1-ым ур-ием пересекает обе окр-и в 2-х точках) - это $-10 < b < 10$.

Если $a \neq 0$, то из 1-го получаем

$$y = \frac{b-5x}{6a} = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} \quad (1)$$

Рассм. $a > 0$. Проведем общ. кас-ую

окр-ей (см. рис.). Прямая, зад ур-ием

(1) проходит ч/з т. $(0; \frac{b}{6a})$ и $(\frac{b}{5}; 0)$. Если эта прямая совп.

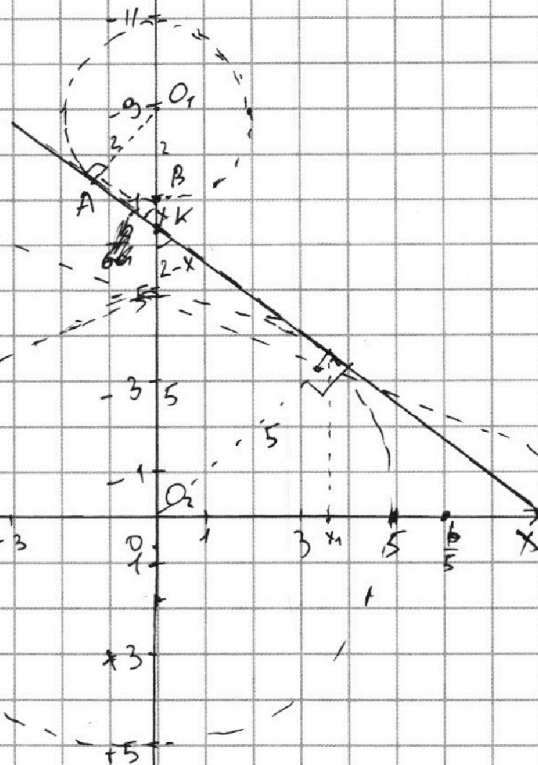
с кас-ой, то линия удовлетворяет 2. Если угол между прямой и

осью x меньше угла такого же угла y кас-ой, то решений не

более 2-х (прямая не пересекет малую окр-ю)

Если $\frac{b}{5} \in (0; x_1)$, где x_1 - абсцисса кас-ой и оси x , то

эта прямая должна пересечь обе окр-и в 2-х точках.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$1) \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \text{ — ОДЗ ур-ва 1-го.}$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_{11} \frac{1}{121} - 5.$$

$$\left(\log_{x^3} \frac{1}{121} = \frac{1}{3} \log_x \frac{1}{121} = \frac{1}{3} (-\log_x 121) = -\frac{2}{3} \log_x 11 \right) = -\frac{2}{3} \log_{11} \frac{1}{\log_{11} x}$$

$$\text{Пусть } a = \log_{11} x.$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \quad | \cdot 3a \neq 0$$

$$3a^5 - 18 = -2 - 15a; \quad 3a^5 + 15a - 16 = 0$$

$$2) \log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{\frac{1}{2}y} 11 = \log_{\left(\frac{1}{2}y\right)^3} (11^{-13}) - 5 \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y \neq 2 \end{cases} \text{ — ОДЗ ур-ва}$$

$$\text{Пусть } b = \log_{11} \left(\frac{1}{2}y\right).$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5 \quad | \cdot 3b \neq 0; \quad 3b^5 + 3 + 15b + 13 = 0$$

$$\left(\log_{\left(\frac{1}{2}y\right)^3} (11^{-13}) = -13 \cdot \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}y} (11) = -13 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} \left(\frac{1}{2}y\right)} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{b} \right)$$

$$3b^5 + 15b + 16 = 0$$

Имеем:

$$\begin{cases} 3a^5 + 15a - 16 = 0 \\ 3b^5 + 15b + 16 = 0 \end{cases}$$

— найдем все возм. $a+b$ (ведь $a+b = \log_{11} \left(\frac{xy}{2}\right)$)

Пусть $f(t) = 3t^5 + 15t$. $f'(t) = 15t^4 + 15 > 0$ при $\forall t$, значит оба ур-ва

получ. системы имеют не более 1-го реш-я (ведь система имеет вид $\begin{cases} f(a) = 16 \\ f(b) = -16 \end{cases}$). При этом заметим, что $f\left(\frac{1}{t}\right) = -f(t)$, т.е. $f(t)$ —

неч. ф-ция, а значения из $f(a) = 16, f(b) = -16$ следуют $a = -b$,

а значит ед. знач-е $a+b$ — это 0, и соотв. ед. знач-е $\frac{xy}{2}$ — это 1 (и $xy = 2$). Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 (по формул.)

$$S_{BB_1C} = \frac{1}{2} CM \cdot BB_1 = \frac{1}{2} S_{ABC} \Rightarrow BB_1 \cdot CM = 180 \quad (CM \perp BB_1)$$

Аналогично, $CC_1 \cdot BM = 180 \Rightarrow CC_1 \cdot BB_1 = \frac{180^2}{BM \cdot CM}$.

$$\frac{BM}{CM} = \frac{1}{2} = \frac{S_{BMC}}{S_{BMC}} \Rightarrow S_{BMC} = 2S_{B_1MC}, S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{BB_1C} = \frac{1}{3} S_{BAC} =$$

$$= 60. S_{BMC} = \frac{1}{2} CM \cdot BM \Rightarrow CM \cdot BM = 120 \Rightarrow CC_1 \cdot BB_1 =$$

$$= \frac{180^2}{120} = \frac{180 \cdot 180}{120} = 180 \cdot \frac{18}{12} = 180 \cdot \frac{3}{2} = 270.$$

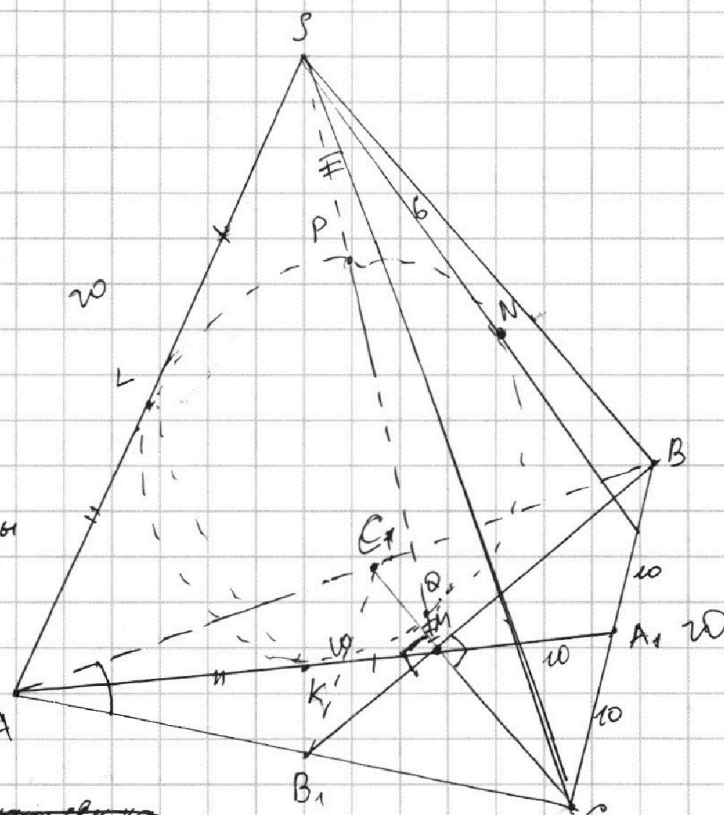
$$AA_1 = 30, CC_1 \cdot BB_1 = 270 \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 27 \cdot 3 \cdot 100 = 8100.$$

Ответ: а) 8100

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N7
a) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$



Рассм. сечение сферы
пл-ью (ASM). В этой
пл-и логичнее
окр-ть, и можем
отсюда же вывести
ст. точек S и M:

a) ~~т.к. $SQ = PQ + SP$,
 $MP = PQ + QA$~~

$MQ \cdot MP = MK^2$, $SP \cdot SQ = SL^2$; $SQ = MP$, $MQ = SP \Rightarrow MK = SL$. Как отр. кас-ых:
 $AK = AL$. Значит, $AM = AS = 20$, и $AA_1 = \frac{3}{2} AM = 30$.

Вспомог. знаящиеся ~~по-ой~~ длины медианы, получаем:

$AA_1^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} \Rightarrow 4 \cdot 30^2 + 20^2 = 2(AB^2 + AC^2)$. По т. Кос.

для $\triangle ABC$: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$, т.е.

$20^2 = 2 \cdot 30^2 + 10 \cdot 20 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC \Rightarrow 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC =$

$= 2 \cdot 30^2 - 5 \cdot 20 = 800$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = 180 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = 360$. Значит, $\cos \angle BAC = \frac{800}{360} = \frac{80}{36} =$

$= \frac{20}{9}$, $\sin \angle BAC = \frac{9}{20}$. Заметим, что $CA_1 = BA_1 = MA_1 = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$. ~~и в $\triangle BMC$~~ ($MA_1 = 10$, т.к. $MA_1 = \frac{1}{2} AM$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 4

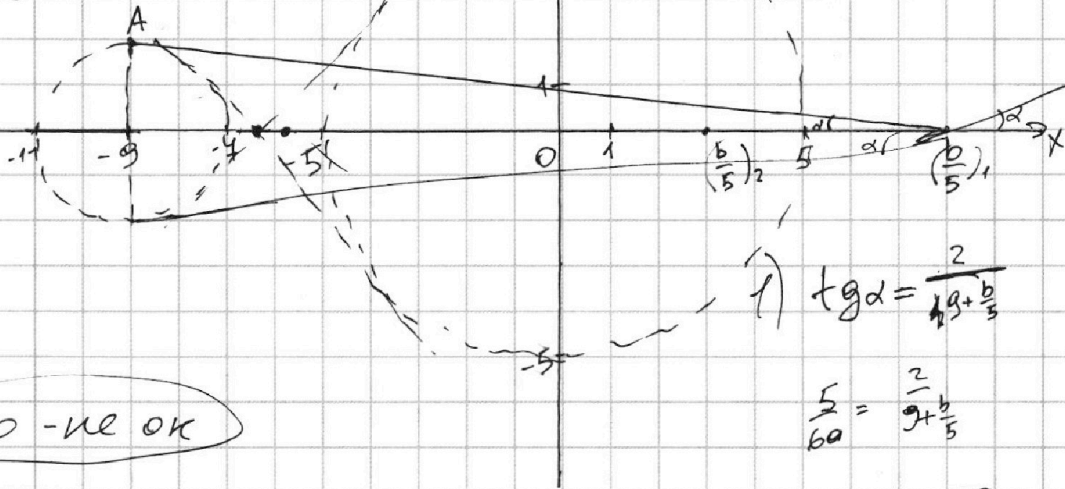
$$y = \sqrt{4-x^2} - 9$$

$$4 + (x+2)^2 = x(x+2)$$

$$8 + 4x = 2x$$

$$x = -4 \quad ???$$

$$y_1 = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1)$$



$$y_2 = \sqrt{25-x^2}$$

$$y = \sqrt{4-x^2} - 9$$

$$y = -\sqrt{25-x^2}$$

$$f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{25-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$1) \quad \tan \alpha = \frac{2}{9 + \frac{b}{5}}$$

$$\frac{5}{60} = \frac{2}{9 + \frac{b}{5}}$$

$$45 + b = 120$$

$$60y = b - 5x, \quad y = \frac{b-5x}{60} = -\frac{5}{60}x + \frac{b}{60}$$

$$1) \quad b > \frac{20}{-25} \quad -\frac{2}{9 + \frac{b}{5}} < -\frac{5}{60} < \frac{2}{9 + \frac{b}{5}}$$

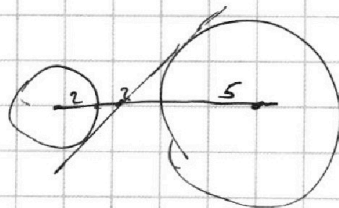
$$-2 < \frac{45+b}{60} < 2, \quad -2 < \frac{45+b}{60} < 2$$

$$45 + b > 20$$

Если $|60| \leq 10$ - не ОК

Если $|60| > 10$ - ОК

$$2) \quad -7 < \frac{b}{5} < -5$$



$$4 + (x+2)^2 = x \cdot (x+2)$$

$$4 + x^2 + 4 + 4x = x^2 + 2x$$

$$8 + 2x = 0$$

$$x = -4$$

$$25 + (7-x)^2 = (2-x)(7-x)$$

$$25 + 49 + x^2 - 14x = 14 - 9x + x^2$$

$$5x = 70, \quad x = 14$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1 (продолж.)

2) $n=3: x_1=4, x_2=2, x_3=1$

Как видно, $m+k=3$ недостаточно, возникает проблема со степенями 5. Значит, $m+k=5$. Проблема решится, если взять $n=2, k=2 (z_1=13, z_2=0, z_3=15)$

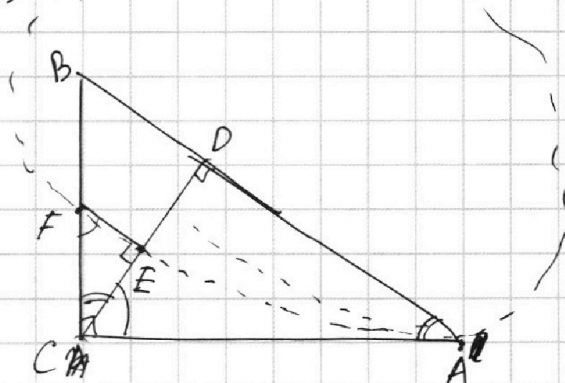
N2

$$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{AC^2}{CB^2} = \frac{2}{5}$$

$$AC^2 = CF \cdot CB \quad | : CB^2$$

$$\frac{AC^2}{CB^2} = \frac{CF}{CB} = \frac{2}{5}$$



$$CD^2 = 10x^2$$

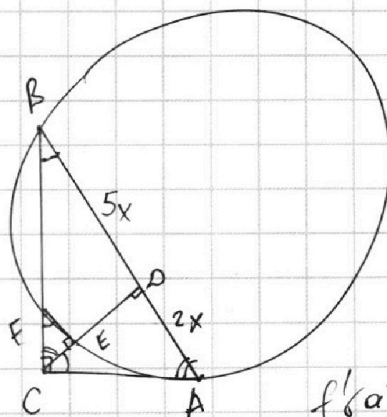
$$AC^2 = 14x^2$$

$$CD = \sqrt{10}x$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}} \Rightarrow BC = 7x \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}} = \sqrt{35} \cdot x$$



$$f(a) = 15a^4 + 15$$

N4

$$2: x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \Leftrightarrow (y+9)^2 - 4 + x^2 = 0 \Leftrightarrow (y+9)^2 + \frac{x^2}{4} = 0$$

$$y = \pm\sqrt{4-x^2} - 9$$

$$a = \frac{1}{3} : \frac{1}{3^4} + 5$$

$$a = \frac{1}{3^2}$$

$$a+b = \log_{11} \left(\frac{xy}{2} \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}, b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}, c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ y_1 + y_2 = 14 \\ z_1 + z_2 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + x_3 = 16 \\ x_2 + x_3 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - x_2 \\ x_2 + (6 - x_2) + x_3 = 14 \\ x_2 + x_3 = 14 \end{cases}$$

$$x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 2$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 14 \\ y_1 + y_3 = 25 \\ y_2 + y_3 = 21 \end{cases}$$

$$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}, bc = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{13}, ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$x_1 + x_2 = 6$$

$$y_1 = 4, y_2 = 10, y_3 = 8, y_2 = 6, y_3 = 15$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = 4 \\ y_1 + y_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow 2y_1 = 18$$

$$y_1 = 9, y_2 = 5, y_3 = 16$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 11 \\ z_1 + z_3 = 28 \\ z_2 + z_3 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 11 \\ z_1 - z_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z_1 = 11 + 15 = 26 \\ z_1 = 13 \end{cases}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{11}, b = 2^{12} \cdot 3^5 \cdot 5$$

$$a = 2^4$$

$$a: 2^4, b: 2^2, c: 2^{12}$$

$$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}, bc = 2^{14} \cdot 3^{24} \cdot 5^{13}$$

$$a: 3^8, b: 3^5, c: 3^{17}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28}$$

$$a: 5^1, b: 5^0, c: 5^{13}$$

$$a: 2^4, b: 2^2, c: 2^{12}$$

$$\begin{cases} z_2 + z_3 = 15 \\ z_1 + z_2 = 13 \\ z_1 + z_3 = 28 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z_3 - z_1 = 2 \\ z_3 + z_1 = 28 \end{cases} \Rightarrow z_3 = 15$$

$$z_1 = 13$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_3 - z_1 = 4 \\ z_3 + z_1 = 28 \end{cases} \Rightarrow z_3 = 16$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 13 \\ z_2 + z_3 = 13 \\ z_1 + z_3 = 28 \end{cases} \Rightarrow z_2 = z_3$$

$$\begin{cases} z_3 - z_1 = 2 \\ z_1 + z_3 = 28 \end{cases} \Rightarrow z_3 = 15, z_1 = 13, z_2 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N6

1) $x_2 > x_1, y_2 > y_1$

$y_2 - y_1 = a, a, b \in \mathbb{N}$

$x_2 - x_1 = b$

$6b + a = 48$

$a = 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48$

- $(0; 8), (6; 7), (12; 6), (18; 5), (24; 4), (30; 3), (36; 2), (42; 1), (48; 0)$

$(0; 8): y_2 = y_1$

$x_2 - x_1 = 8$

$92 \cdot C_{18}^{10} \cdot C_{18}^{10}$

~~$(6; 7): C_{92}^6 \cdot C_{18}^7$~~

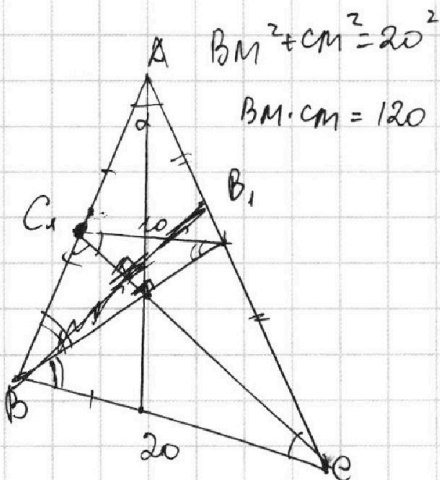
~~$(12; 6): C_{92}^{12} \cdot C_{18}^6$~~

$C_{92}^{10} \cdot C_{18}^{10} + C_{92}^6 \cdot C_{18}^7 + C_{92}^{12} \cdot C_{18}^6$

$BB_1 \cdot CC_1 = \frac{180^2}{BM \cdot CM}$

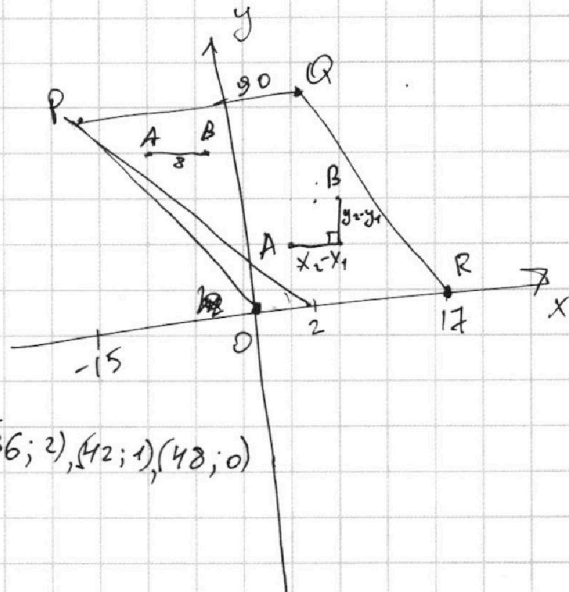
$BM \cdot CM$

$m^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$



$S_{BCC_1} = \frac{1}{2} BM \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \cdot 180$
 $BM \cdot CC_1 = 180$

~~BB_1~~



$a = 2^4$

$b = 2^2$

$c = 2^{12}$

$a = 5^{12}$

$c = 5^{16}$

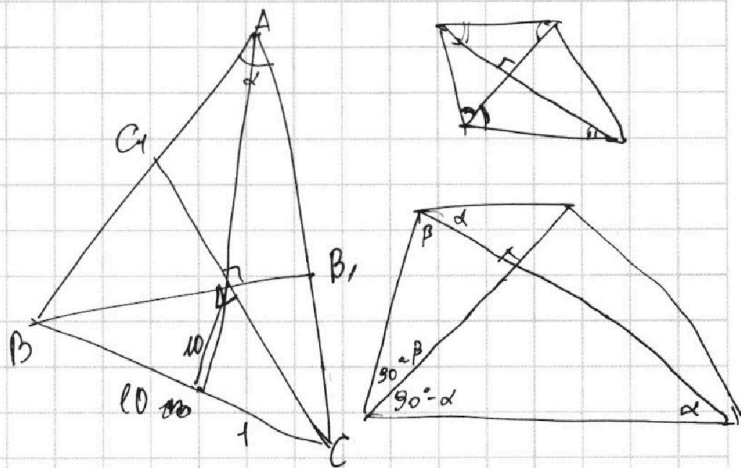
$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$

~~17~~

- 1 2 3 4 5 6



~~BB_1~~

$S_{B_1B_1C} = \frac{1}{2} CM \cdot BB_1 = \frac{1}{2} S_{ABC}$

$= \frac{1}{2} \cdot 180$

$CM \cdot BB_1 = 180$