МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $a, b, c \in N$

$$\begin{cases} ab \vdots 2^{15} \cdot 7^{11} & (1) \\ bc \vdots 2^{17} \cdot 7^{18} & (2) \\ ac \vdots 2^{23} \cdot 7^{39} & (3) \end{cases}$$

Перемножим (1) и (2):

$ab^2c \vdots 2^{32} \cdot 7^{29}$.

С другой стороны, $ac \vdots 2^{23} \cdot 7^{39}$,

~~$ab^2c \vdots 2^{23} \cdot 7^{39}$~~.

$7^{39} > 7^{29}$, значит где-то при делении должно набраться 7^{10}. Так как мы минимизируем значение произведения, ~~долж~~ 7^{10} может взяться где нам угодно.

Пусть, например, в (1):

$$\begin{cases} ab = 2^{15} \cdot 7^{21} & (4) \\ bc = 2^{17} \cdot 7^{18} & (5) \\ ac = 2^{23} \cdot 7^{39} & (6) \end{cases}$$

В данном случае мы получим минимальное произведение, которое может быть. Однако нужно проверить a, b и c на натуральность.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Перемножим (4), (5) и (6)

$a^2b^2c^2 = 2^{55}\,7^{78}$

$abc = \sqrt{2}\cdot 2^{27}\cdot 7^{39}$. Очевидно, что при перемножении натуральных чисел иррациональности появится не могло. Значит где-то не хватило двойки. Пусть, опять же, в (4). (неважно где, т.к. мы минимизируем произведение).

$$\begin{cases} ab = 2^{16}\cdot 7^{21} & (7)\\ bc = 2^{17}\cdot 7^{18} & (8)\\ ac = 2^{23}\cdot 7^{39} & (9) \end{cases}$$

$(7):(8):\ \frac{a}{c} = \frac{7^3}{2}, \Rightarrow a = \frac{7^3}{2}\cdot c$

$(9)\quad c^2\cdot\frac{7^3}{2} = 2^{23}\cdot 7^{39}$

$c^2 = 2^{24}\cdot 7^{36}$

$c = 2^{12}\cdot 7^{18}, \Rightarrow a = 2^{11}\cdot 7^{21}, b = 2^5.$

Все числа натуральные, значит они подходят.

$a\cdot b\cdot c = 2^{11+5+12}\cdot 7^{18+21} = 2^{28}\cdot 7^{39}$

Ответ: $2^{28}\cdot 7^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. НОД$(a, b) = 1$

НОД$(a+b, a^2-7ab+b^2) = m$.

По алгоритму Евклида НОД$(a+b, a^2-7ab+b^2) =$ НОД$(a+b, a^2-7ab+b^2 - (a+b)^2) =$ НОД$(a+b, -9ab) = m$.

Рассмотрим ~~ва~~ число m. Если $a \vdots m$, то $b \not\vdots m$ по условию, и наоборот, $\Rightarrow$ $a+b \not\vdots m$ и дробь несократима.

$ab \vdots m$ только в случае, если $ab = m$.

~~Но тогда $a+b \not\vdots m$ $(a+b \not\vdots ab$, т.к. тогда лишь одна из чисел~~

Если $a = b = 1$, то $m = 1$, что мало. Если одно из чисел 1, то $a+b \vdots ab$. Если же $a \neq 1$ и $b \neq 1$, то $a+b < ab$, $\Rightarrow$ $a+b \not\vdots ab$.

Остаётся 1 вариант: $9 \vdots m$. Тогда наибольшее $m = 9$.

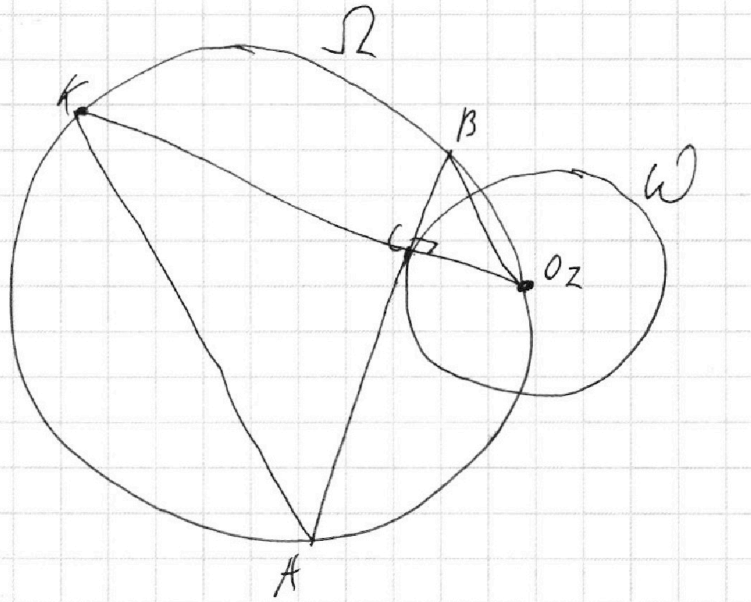
Ответ: 9.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.



$r_1 = 13$
$r_2 = 7$

$AC = 17x$, $BC = 7x$. Продлим O_2C до пересечения с Ω в т. K. По св-ву пересекающихся хорд $KC \cdot CO_2 = BC \cdot CA$

$CK \cdot 7 = 7x \cdot 17x$

$CK = 17x^2$

По т. Пифагора $BO_2 = \sqrt{O_2C^2 + BC^2} = \sqrt{49 + 49x^2} =$
$= 7\sqrt{x^2+1}$, $AK = \sqrt{CK^2 + AC^2} = \sqrt{289x^4 + 289x^2} =$
$= 17x\sqrt{x^2+1}$.

По лемме, которую я докажу в конце решения,

$4r_1^2 = AK^2 + BO_2^2$

$4 \cdot 13^2 = 289x^4 + 289x^2 + 49x^2 + 49$

$289x^4 + 338\cancel{7}x^2 - \cancel{458}\,627 = 0$

$t=x^2$, $289t^2+338t-\cancel{458}\,627=0$

$D=\cancel{643692}\ 839056=916^2$

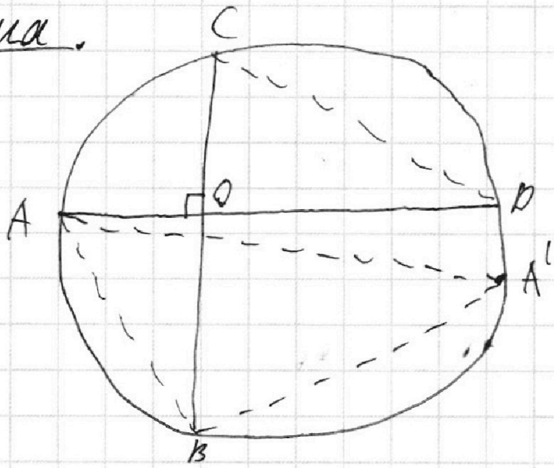
$t=\cancel{\dfrac{\sqrt{643692}-338}{578}}\ \dfrac{916-338}{578}=1\ (t>0)$

$x=\cancel{\sqrt{\dfrac{\sqrt{643692}-338}{578}}}\ 1\ (x>0)$

$AB=24x=\cancel{24\sqrt{\dfrac{\sqrt{643692}-338}{578}}}$

~~Ответ: $24\sqrt{\dfrac{\sqrt{643692}-338}{578}}$~~

Лемма.



Если $\angle AOC=90°$, то $AB^2+CD^2=4R^2$

Док-во: пусть AA' – диаметр, тогда $AA'^2=4R^2$, $\angle ABA'=90°$ как угол, опирающийся на диаметр. Тогда достаточно доказать, что $A'B=CD$ (пот. Пифагора). $\angle BAD=90°-\angle ABO=\angle CBA'$. $\angle BAD=\angle BCD$ как вписанные углы. $\angle BCD=\angle CBA'$, дуга DA' общая, $\Rightarrow \frown CD=\frown A'B$, $\Rightarrow CD=A'B$, ч.т.д.

Ответ: ~~$24\sqrt{\dfrac{\sqrt{643692}-338}{578}}$~~ 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4. $\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

Пусть $a = \sqrt{3x^2-6x+2}$, $b = \sqrt{3x^2+3x+1}$

Заметим, что $1-9x = a^2-b^2$

Тогда исходное уравнение можно переписать:

$a-b = a^2-b^2$

$a-b = (a-b)(a+b)$

$(a-b)(a+b-1)=0$

$a=b$ или $a+b=1$

$\sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1}$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1 & (1) \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $9x-1=0$

$x_1 = \frac{1}{9}$

Подставим x_1 в (2):

$3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3\cdot\frac{1}{9} + 1 \geq 0$ —

верно, поэтому $x_1 = \frac{1}{9}$ — корень

$a = 1-b$

$\sqrt{3x^2-6x+2} = 1-\sqrt{3x^2+3x+1}$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 3x^2-6x+2 = \left(1-\sqrt{3x^2+3x+1}\right)^2 & (3) \\ 1-\sqrt{3x^2+3x+1} \geq 0 & (4) \end{cases}$$

(3) $3x^2-6x+2 = 1+3x^2+3x+1 -$

$- 2\sqrt{3x^2+3x+1}$

$9x = 2\sqrt{3x^2+3x+1}$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x \geq 0 & (5) \\ 81x^2 = 4\cdot(3x^2+3x+1) & (6) \end{cases}$$

(6) $81x^2 = 12x^2+12x+4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$69x^2-12x-4=0$~~

~~$D=144+1104=1248$~~

~~$x_2=\frac{12-\sqrt{1248}}{69\cdot 2}<0 \Rightarrow$ не подходит по (5)~~

~~$x_3=\frac{12+\sqrt{1248}}{138}$~~

$a+b=1$

$\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1$

$\sqrt{3x^2-6x+2}=1-\sqrt{3x^2+3x+1}$, откуда

$1-\sqrt{3x^2+3x+1}\geq 0$

$\sqrt{3x^2+3x+1}\leq 1$

Найдём минимальное значение $3x^2+3x+1$.

$x_0=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$, $y_0=\frac{1}{4}$, поэтому $3x^2+3x+1>0$

$3x^2+3x+\cancel{1}\leq\cancel{1}$

$x(x+1)\leq 0$

$-1 \quad 0 \quad x$ $\qquad x\in[-1;0]$.

Теперь рассмотрим мин. значение $\sqrt{3x^2-6x+2}$ на промежутке $[-1;0]$. ~~хвл~~ Мин. значение $3x^2-6x+2$: при $x_0=\frac{6}{6}=1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. мин. ~~макс.~~ значение при $x_0=1$, и старший коэффициент >0, значение при $x=0$ будет ~~меньше~~ ~~значения~~ минимальным на промежутке $[-1;0]$.

$x=0$: $\sqrt{3x^2-6x+2}=\sqrt{2}$

$\sqrt{2}>1$, $b\geq 0$, $\Rightarrow a+b>1$

и корней не будет.

Ответ: $\frac{1}{9}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

6. $$\begin{cases} ax+y-8b=0 & (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 & (2) \end{cases}$$

График (2) ~~на~~ в системе ~~ox~~ XOY: круг с центром (0;0) и радиусом 1 и круг с центром (0;12) и радиусом 4. Нам подходят внутренние части кругов и их границы.

График (1) – прямая ~~за~~, наклон которой зависит от параметра a, проходящая через точку (0; 8b). Параметр b „двигает" эту точку по оси OY.

Т.к. нам нужно ровно два решения, прямая (1) не может проходить внутри окружностей. Она также не может касаться одной окружности одновременно в двух точках (это невозможно). Поэтому мы имеем дело с общими касательными окружностей. Всего их 4: две внутренних и две внешних.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Тогда $\frac{O_1E}{O_2E} = 4$, $\Rightarrow O_2E = \frac{1}{5} O_1O_2 = \frac{12}{5}$

~~Тогда координаты т. E — $(0; \frac{12}{5})$. Откуда~~

~~$8b = \frac{12}{5}$~~

~~$b = \frac{3}{10}$. Подставим в (1):~~

~~$ax + y - 8 \cdot \frac{3}{10} = 0$~~

~~$ax + y = \frac{12}{5}$~~

~~$tg\,\alpha = \frac{O_1A}{AE} = \frac{4}{AE}$.~~

~~$AE = \sqrt{O_1E^2 - O_1A^2} = \sqrt{\ldots}$~~

$tg\,\alpha = \frac{CO_2}{CE} = \frac{1}{CE}$

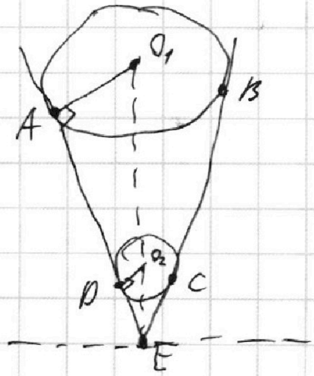
$CE = \sqrt{EO_2^2 - O_2C^2} = \sqrt{\frac{144}{25} - 1} = \frac{\sqrt{119}}{5}$

$tg\,\alpha = \frac{5}{\sqrt{119}}$,

$a_1 = tg(90 - \alpha) = ctg\,\alpha = \frac{\sqrt{119}}{5}$

$a_2 = -tg(90 - \alpha) = -\frac{\sqrt{119}}{5}$

Теперь внешнее касание:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

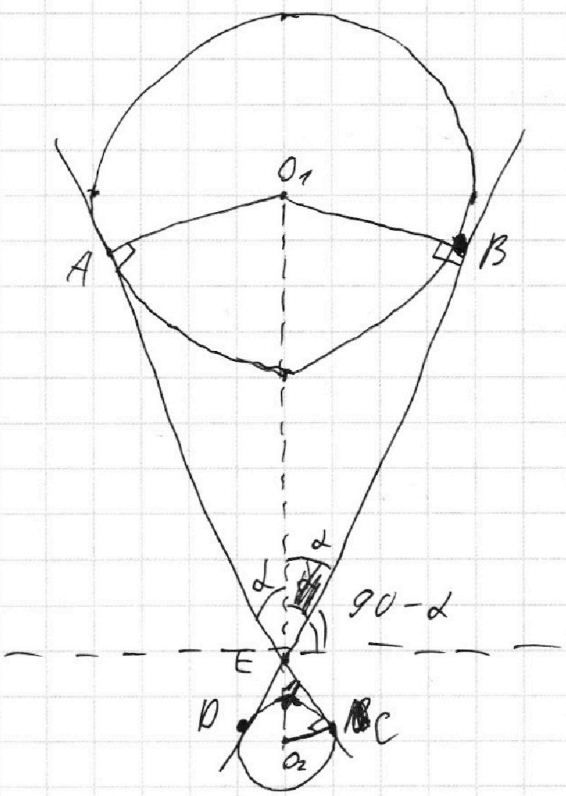
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Внутренние касательные пересекутся на оси OY, т.к. центры окружностей лежат на оси OY. Аналогично с внешними. Эти две точки и будут иметь нужную координату $(0; 8b_1)$. и $(0; 8b_2)$

Внутренние:



$\triangle O_1AE = \triangle O_1BE$

по трём сторонам

Координаты т. O_2 $(0;0)$, т. O_1 $(0; \cancel{16}\ 12)$, поэтому $O_1O_2 = \cancel{16}\ 12$. $\angle AEO_1 = \angle O_2EC$ как вертикальные,

угол между радиусом, проведённым в т. касания,

$\angle O_1AE = \angle ECO_2 = 90°$, $\Rightarrow \triangle AEO_1 \sim \triangle EO_2C$,

$k = \frac{AO_1}{CO_2} = \frac{4}{1} = 4$. ($AO_1$ и CO_2 — радиусы).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Аналогично ~~находим~~ $\Delta EO_1A \sim \Delta EO_2D$,

$k = \frac{O_1A}{O_2D} = 4$. $\frac{EO_2}{EO_1} = \frac{1}{4}$, $\Rightarrow \frac{EO_2}{O_1O_2} = \frac{1}{3}$, $\Rightarrow$

$EO_2 = \frac{O_1O_2}{3} = 4$.

$\alpha = \angle DEO_2 = \angle CEO_2$ (EO_1 - биссектр.)

$ED = \sqrt{O_2E^2 - O_2D^2} = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}$

$tg\alpha = \frac{O_2D}{ED} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$

Аналогично $a_3 = tg(90-\alpha) = ctg\alpha = \sqrt{15}$

$a_4 = -\sqrt{15}$.

Ответ: $-\sqrt{15}$; $-\frac{\sqrt{119}}{5}$; $\frac{\sqrt{119}}{5}$; $\sqrt{15}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1. $a, b, c \in N$

$ab \vdots 2^{15} 7^{11}$ $\qquad ab = 2^{16} 7^{11}$

$bc \vdots 2^{17} 7^{18}$ $\qquad b =$ $\quad bc = 2^{17} 7^{11}$

$c = 2^{12} 7^{23}$

$ac \vdots 2^{23} 7^{39}$ $\qquad a = 2^{11} \cdot 7^{16}$ $\quad ac = 2^{23} 7^{39}$

$a^2 = 2^{22} 7^{32}$ $\quad c = 2a \cdot 7^7$

$\begin{cases} ab = 2^{15} 7^{11} \\ bc = 2^{17} 7^{18} \\ ac = 2^{23} 7^{39} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\frac{c}{a} = 2^2 7^7$

$c = a \cdot 2^2 \cdot 7^7$

$a^2 \cdot 2^2 \cdot 7^7 = 2^{\overset{21}{23}} \cdot 7^{\overset{32}{39}}$

$a = \sqrt{2} \cdot 2^{10} \cdot 7^{16}$ $\qquad a^2 - 7ab + b^2$

2. $НОД(a, b) = 1$

$a^2 - 7ab + b^2 - (a+b)^2 =$
$= a^2 - 7ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2 =$
$= -9ab$

~~$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$~~

$НОД(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = m$

$НОД(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = НОД(a+b, -9ab) =$

$= НОД(9ab, a+b,$

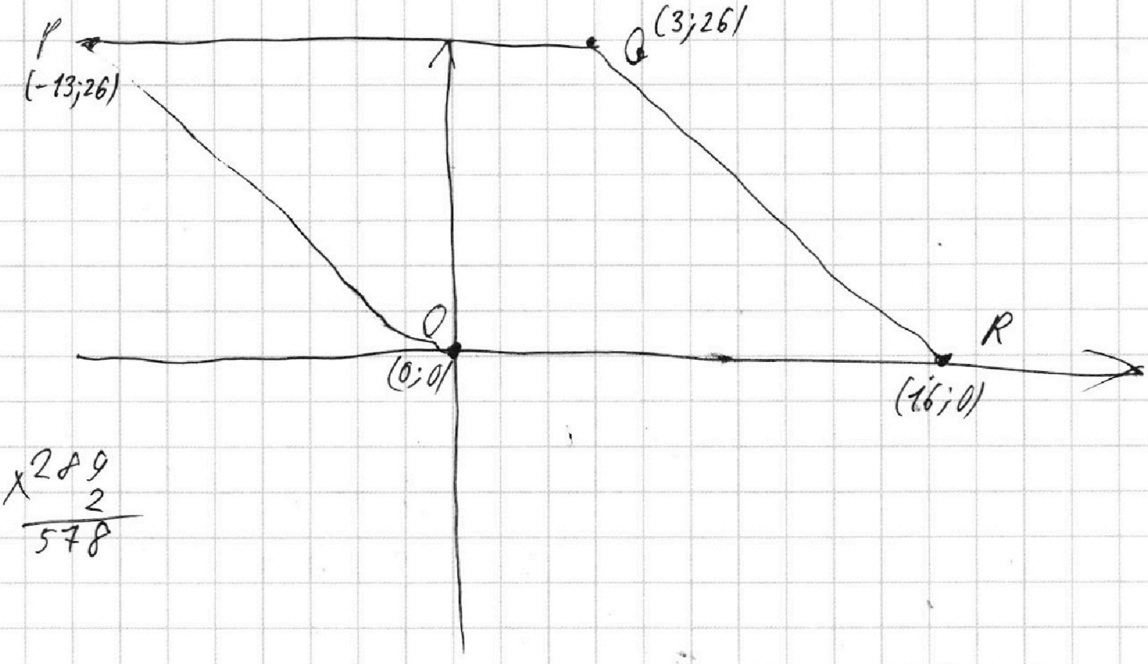
$\frac{a+b}{-9ab} = \frac{-1}{9b} + \frac{-1}{9a}$

$НОД(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = НОД(a+b,$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} \times\ 289 \\ 2 \\ \hline 578 \end{array}$$

процесс. $2(x_2-x_1)+y_2-y_1$

P

x_1-1: $+2$ x_1+1: -2 y_1-1: $+1$ y_1+1: -1

max: $2\cdot(16+13)-26=2\cdot 29-26=58-26=32$

$$\begin{array}{r} \times\ 69 \\ 16 \\ \hline 414 \\ 69\ \\ \hline 1104 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times\ 35 \\ 35 \\ \hline 175 \\ 105\ \\ \hline 1225 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times\ 69 \\ 2 \\ \hline 138 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times\ 338 \\ 338 \\ \hline 2704 \\ 1014\ \\ 1014\ \ \\ \hline 114244 \\ +\ 529448 \\ \hline 643692 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 289 \\ 4 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 1156 \\ 458 \\ \hline 9248 \\ 5780\ \\ 4624\ \ \\ \hline 529448 \end{array}$$

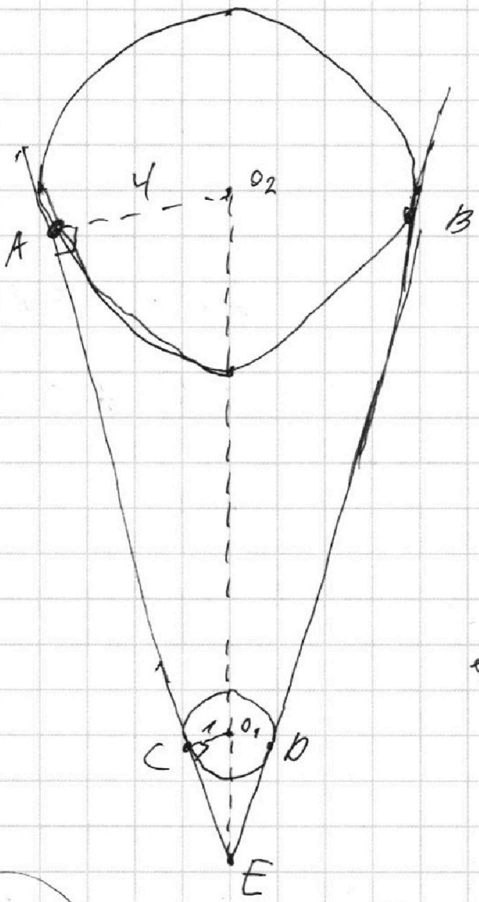
$$x^2=\sqrt{\frac{\sqrt{643692}-338}{578}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\frac{EO_1}{EO_2}=\frac{1}{4}$$

$$EO_2=4EO_1$$

$$EO_2-EO_1=3EO_1=O_1O_2=$$

$$=12$$

$$\underline{EO_1=4}$$

$$\underline{-4}$$

$$\begin{array}{r} 507 \\ -\ 49 \\ \hline 458 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times\ 3 \\ \hline 507 \end{array}$$

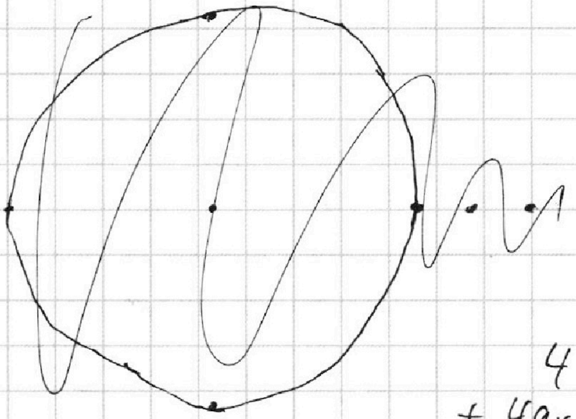
$$289t^2+238t-458=0$$

$$-4;\ \frac{12}{5}$$

3.

МФТИ

$$\begin{array}{r} \times\ 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ +\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$



$EC\cdot r_2 = BC\cdot AC$

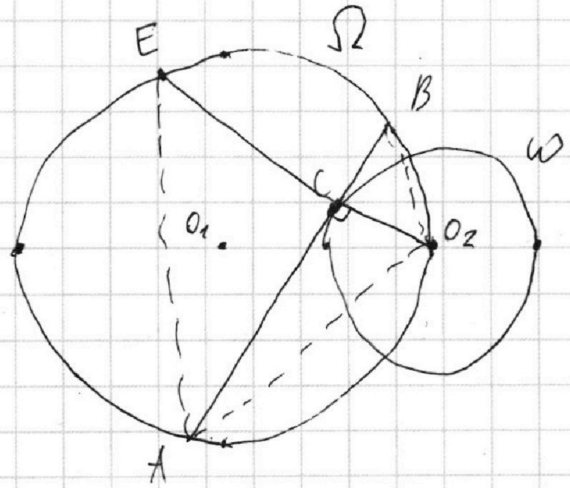
$EC\cdot 7 = 7x\cdot 17x$

$EC = 17x^2$

$AE^2 = 289x^4 + 289x^2$

$4r_1^2 = AE^2 + BO_2^2 = 289x^4 + 289x^2 + 49x^2 + 49$

$4\cdot 13^2 = 289x^4 + 338x^2 + 49$



$\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{17}{7}$

$AC = 17x$

$CB = 7x$

$x - ?,\ \overset{\frown}{AB} - ?$

~~O_2~~ $r_1 = 13 \quad r_2 = 7$

$BO_2^2 - r_2^2 = 49x^2$

$BO_2^2 - 49 = 49x^2$

$BO_2^2 = 49(x^2+1)$

$BO_2 = 7\sqrt{x^2+1}$

$AO_2^2 - r_2^2 = 17^2x^2$

$AO_2^2 - 49 = 289x^2$

$AO_2 = \sqrt{289x^2+49}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ax + y = 8b$

$y = 8b - ax$

$y = -ax + 8b$

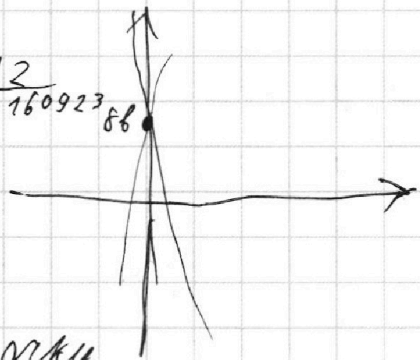
$a \neq 0$

найдётся в 2 реш.

643692 | 2
321846 | 2
160923

643692 | 2
321846 | 2
160923

8b



двигаем точку по оси OY.

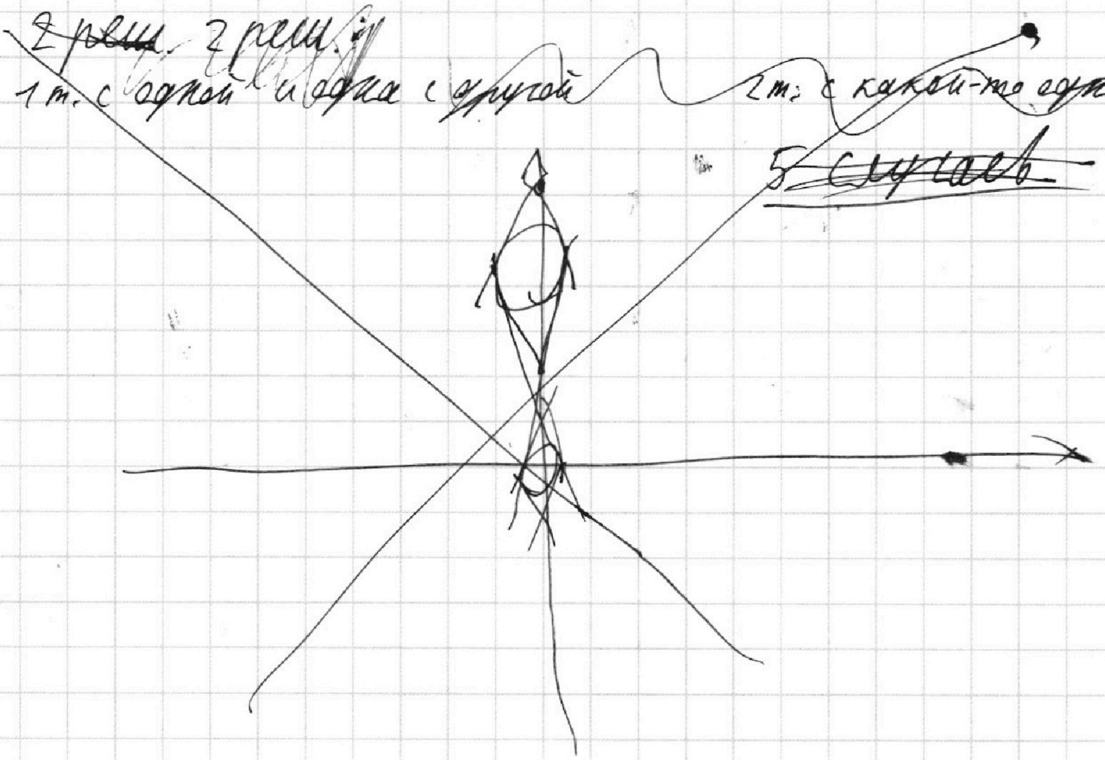
точка не в и не на окружности

~~2 реш.~~ 2 реш.

1т. с одной и одна с другой

2т. с какой-то одной

~~5 случаев~~

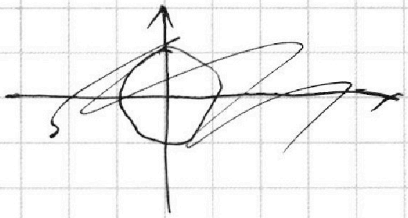


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

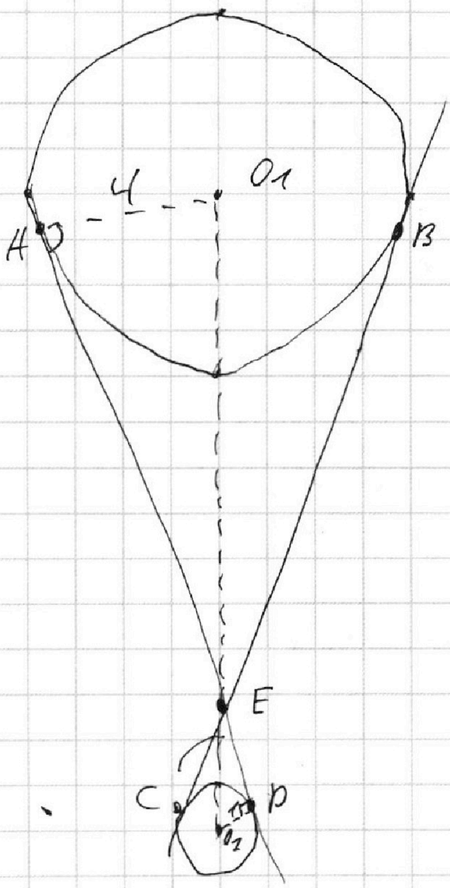
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



прямая, имеющая 2 общие точки не может проходить внутри окружностей, => касается. одну окр. нельзя два раза коснуться => касается обеих => общая касательная 2-х окружностей. (либо внутр., либо внешн.



$O_1O_2 = 12$

$O_2E - ?$

$\Delta O_1AE \sim \Delta O_2DE$

$k = 4$

$\frac{O_1E}{O_2E} = 4$

$O_1E = 4O_2E$

$O_1E + O_2E = 5O_2E = 12$

$O_2E = \frac{12}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

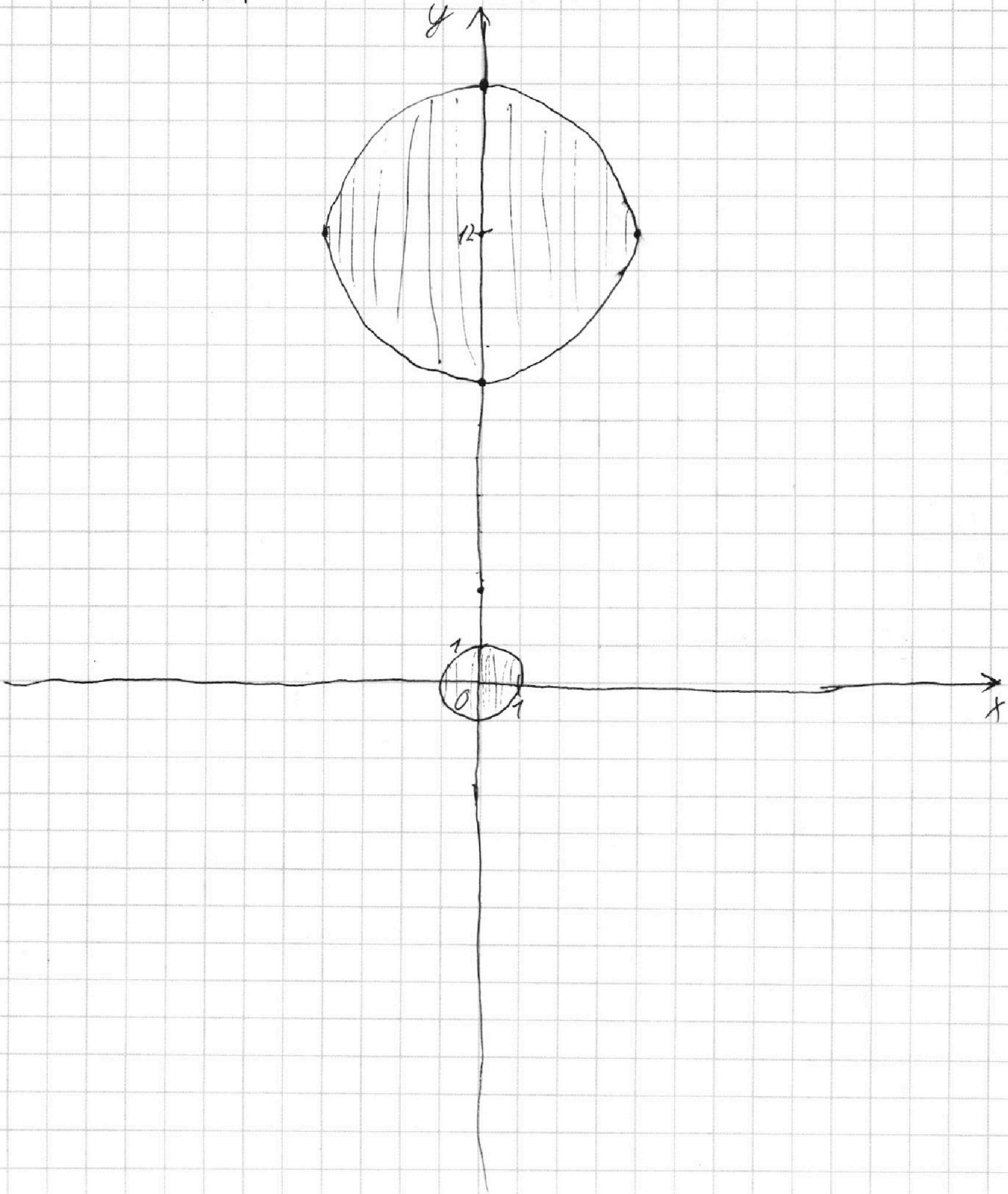
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

6. $\begin{cases} ax + y - 8b = 0 & (1) \\ \underbrace{(x^2+y^2-1)}_{r=1}\underbrace{(x^2+(y-12)^2-16)}_{r=4} \le 0 & (2) \end{cases}$

2 реш.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [X] 3 [X] 4 [X] 5 [X] 6 [X] 7 [X]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4. $\underbrace{\sqrt{3x^2-6x+2}}_{a} - \underbrace{\sqrt{3x^2+3x+1}}_{b} = 1-9x$

$a^2-b^2 = -9x+1 = 1-9x$

$\cancel{\sqrt{a} - \sqrt{b} = a-b}$

$a-b = a^2-b^2$

$a-b = (a-b)(a+b)$

$(a-b)(a+b-1) = 0$

$a=b$

$\sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1}$

$3x^2-6x+2 \geq 0$

$D = 36-24 = 12$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} =$

$= 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1$

$-9x+1=0$

$9x-1=0$

$\boxed{x=\frac{1}{9}}$

$1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$+ \quad - \quad +$

$\frac{1}{9} \quad 1-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad 1+\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{9} \vee 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} \vee \frac{8}{9}$

$\sqrt{3} \vee \frac{8}{3}$

$3 \vee \frac{64}{9}$

$27 \vee 64$

$\vee = <$

$a+b=1$

$a = 1-b$

$1-b \geq 0$

$1 \geq \sqrt{3x^2+3x+1}$

$\cancel{1} \geq 3x^2+3x+\cancel{1}$

$x^2+x \leq 0$

$x(x+1) \leq 0$

$-1 \quad 0 \quad 1$

$\sqrt{3x^2-6x+2} \quad + \sqrt{3x^2+3x+1}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~№ $a, b, c \in N$~~

$ab \vdots 2^{15} 7^{11}$

$bc \vdots 2^{17} 7^{18}$

$ac \vdots 2^{23} 7^{39}$

~~Т.к. нам нужно минимальное значение $a \cdot b \cdot c$, попробуем найти минимальные a, b, c.~~

Для минимальности

$ab = 2^{15} 7^{11}$

$bc = 2^{17} 7^{18}$

$c = 2^{8} \cdot 7^{7} \cdot a$

$ab^2c \vdots 2^{32} \cdot 7^{29}$

$\cancel{a} \, ac \vdots 2^{23} 7^{39}$ нужно докинуть минимум 7^{10}

$ab = 2^{15} \cdot 7^{21}$

$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$ — не получ. + ещё 2

$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$

$$\begin{cases} ab = 2^{16} \cdot 7^{21} \\ bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \end{cases}$$

$\frac{a}{c} = \frac{7^3}{2}$

$a = \frac{c \cdot 7^3}{2}$

$c^2 \cdot \frac{7^3}{2} = 2^{24} \cdot 7^{36}$

$b = 2^5 \quad a = 2^{11} \cdot 7^{21} \quad c = 2^{12} \cdot 7^{18}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\times\begin{array}{r}169\\ 4\\ \hline 676\end{array}\qquad -\begin{array}{r}676\\ 49\\ \hline 627\end{array}$$

$p = 114244 + 1156 \cdot 627 =$

$= 839056$

$$\times\begin{array}{r}1156\\ 627\\ \hline 8092\\ 2312\\ 6936\\ \hline 724812\end{array}\qquad +\begin{array}{r}724812\\ 114244\\ \hline 839056\end{array}\qquad \times\begin{array}{r}906\\ 906\\ \hline 5436\\ 8154\\ \hline 820836\end{array}$$

$$\times\begin{array}{r}916\\ 916\\ \hline 5496\\ 916\\ 8244\\ \hline 839056\end{array}\qquad \times\begin{array}{r}914\\ 914\\ \hline 3656\\ 914\\ 8226\\ \hline 835396\end{array}\qquad -\begin{array}{r}916\\ 338\\ \hline 578\end{array}$$