



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1

$$\left. \begin{aligned} ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &: 2^{12} \cdot 7^{17} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 : 2^{14} \cdot 2^{12} \cdot 2^{20} \cdot 7^{10} \cdot 7^{12} \cdot 7^{37} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{51} \cdot 7^{64}, \text{ но т.к. } (abc)^2 \text{ - квадрат натур. числа } = 1$$

\Rightarrow степени простых делят в $a^2 b^2 c^2$ должна быть четной \Rightarrow

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{52} \cdot 7^{64} \Rightarrow (abc)^2 : 2^{26} \cdot 7^{32} \Rightarrow abc : 2^{13} \cdot 7^{16}$$

~~т.к. не пара в т.к. делимость, но~~

~~XXXX~~ - степени простых a, b, c - совпадают. Т.к. ~~натур. число~~ ~~т.к. делимость~~ ~~т.к. делимость~~ ~~т.к. делимость~~

Поскольку

$$\begin{cases} x+y \geq 10 \\ x+z \geq 12 \\ x+z \geq 37 \end{cases} \Rightarrow \text{т.к. } x-y \leq 10$$

$$\begin{cases} x+z \geq 12 \\ x+z \geq 37 \end{cases}$$

Пусть $y+z = n$

$x+z = m$

$x-y \leq 10$

$m-n \leq 10 \Rightarrow$ разница

увеличим разность $m-n$, для этого можно увеличить n до 27,

можно увеличить m до m , но тогда придется сбить

увеличить n , а нам требуется найти n и $abc \Rightarrow$ ~~формула~~

следует увеличить n до 27, тогда

$$\begin{cases} x+y \geq 10 \\ y+z \geq 27 \\ x+z \geq 37 \end{cases}$$

наил. комбинация

$$\text{возм. замеч. : } \begin{cases} x+y=10 \\ y+z=27 \\ x+z=37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=0 \\ z=17 \end{cases}$$

тогда $(abc)^2 : 37 \Rightarrow abc : 2^{13} \cdot 7^{16} = 1 \Rightarrow abc \geq 2^{13} \cdot 7^{16}$

Пример:

$a = 2^1 \cdot 7^{10}$

$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$

$b = 2^6$

$bc = 2^{12} \cdot 7^{17}$

$c = 2^{12} \cdot 7^{17}$

$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$

\Rightarrow пример верен

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$\frac{a}{b} - \text{красоч.} \Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}, \text{ числ. } m, \text{ на которое можно сократить}$$

числ. и знаменатель соответственно $\text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2)$,

$$\text{по алгоритму Евклида: } \text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2) = \text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2 - (a+b)(a-7b))$$

$$= \text{НОД}(a+b, -8ab), \text{ т.к. } a \text{ и } b \text{ взаимнопросты, то сумма } a+b$$

$$\text{взаимнопроста с } ab \Rightarrow \text{НОД}(a+b, -8ab) = \text{НОД}(a+b, 8) \leq 8$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2) \leq 8 \Rightarrow m \leq 8$$

Пример a и b : $a=1, b=7, \frac{1}{7}$ - красоч.

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{1+98-42} = \frac{8}{67} = \frac{1}{8}, m=8, \text{ годится согласно}$$

условию \Rightarrow пример берем.

Ответ: $m=8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

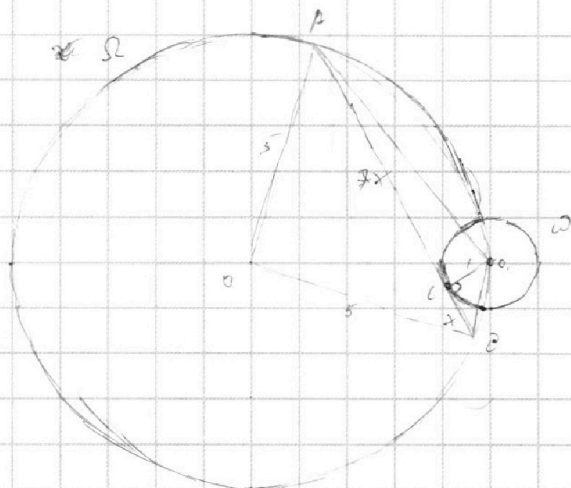
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 2x \\ CB = x \Rightarrow AB = 3x \\ C_1 - \text{центр } \omega$$



Рассм. $\triangle AOC, B$, по γ синусов:

$$\frac{3x}{\sin \angle AOB} = 5 \text{ т.к. } \delta - \text{радиус шара}$$

$$\sin \angle AOB = \sin(\angle AOC + \angle COB) =$$

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \cdot \cos \alpha, \text{ т.к.}$$

AB - нормальна к ω , C_1 - центр

касания ω к Ω ($OC_1 \perp AB$)

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{3x}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\sin \beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\cos \beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \sin \angle AOB = \frac{3x \cdot x}{\sqrt{4x^2+1} \sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{4x^2+1} \sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{x(3x+1)}{\sqrt{4x^2+1} \sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{3x}{\sin \angle AOB} = 5 \Rightarrow \frac{3x}{\frac{x(3x+1)}{\sqrt{4x^2+1} \sqrt{x^2+1}}} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \cdot \sqrt{4x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1} = 5(3x+1)$$

$$64 \cdot (4x^2+1) \cdot (x^2+1) = 25(9x^2+6x+1)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



н 5

Сделаем гомотегию с центром в точке $(0; 0)$ и
коэф. 3

$$O_1 \rightarrow (0; 0)$$

$$P \rightarrow (-4; 8)$$

$$Q \rightarrow (1; 2)$$

$$R \rightarrow (5; 0)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 7x - 2$$
$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 \geq (7x - 2)^2 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$40x^2 - 28x - 4 \leq 2x^2 + 2x + 1$$

$$S \Rightarrow 300 - 12 \cdot 47 = 300 - 564 = \text{---}$$

$$47 \cdot 12 = 420 + 94 = 564$$

$$\frac{30 \pm \sqrt{336}}{94}$$

$$336$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$S = 484 + 12 \cdot 41 = 484 + 410 \cdot 2 = \text{---}$$
$$976$$

$$\frac{30 - \sqrt{336}}{94} \rightarrow \frac{2}{7}$$

$$7(30 - \sqrt{336}) \wedge 184$$

$$210 - 184 \wedge 7 \cdot \sqrt{336}$$

$$26 \wedge 7 \cdot \sqrt{336}$$

$$\frac{22 + \sqrt{776}}{82}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



x < 4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 2x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

OD3: $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$
 $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$
 $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$
 $D < 0$
 $\alpha = -1, \beta = 1 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$
 $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$
 $(x-1)(2x-3) \geq 0$
 $x \in [0, 1] \cup [1.5, +\infty)$

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 + 40x^2 - 28x + 2x^2 + 2x + 1 + 2(2-2x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$40x^2 - 21x + 2 = 2(2x-2)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$(2x-2)(2x+1) = 2(2x-2)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x-2=0$$

$$2x-1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$x = \left(\frac{2}{2}\right) < 1$$

$$2x-1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2x^2 - 14x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$4x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 40121 + 403 \cdot 41 = 4144 + 492 = 976$$

$$x_1 = \frac{22 + \sqrt{976}}{82}$$

$$x_2 = \frac{22 - \sqrt{976}}{82} > \frac{22}{82} > \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$$

$$x < \frac{2}{2}$$

$$2 - 2x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$$

$$x \leq \frac{2}{2}$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0, 40x^2 - 28x + 4$$

$$\frac{22 + \sqrt{976}}{82} > \frac{22 + 30}{82} > \frac{52}{82} > \frac{26}{41} > \frac{2}{2}$$

$$\frac{20 + \sqrt{336}}{82} < \frac{30 + \sqrt{336}}{82}$$

$$\frac{30 + \sqrt{336}}{82} < \frac{30 + 20}{82} < \frac{50}{82}$$

$$D = 900 - 564 = 336$$

$$x \in \left[\frac{30 - \sqrt{336}}{82}, \frac{30 + \sqrt{336}}{82} \right]$$

$$\frac{22 + \sqrt{976}}{82} > \frac{22 + 30}{82} > \frac{52}{82} \Rightarrow \text{корень не подходит}$$

Все корни не подходят, принимаем OD3

Ответ: $\frac{2}{2}$



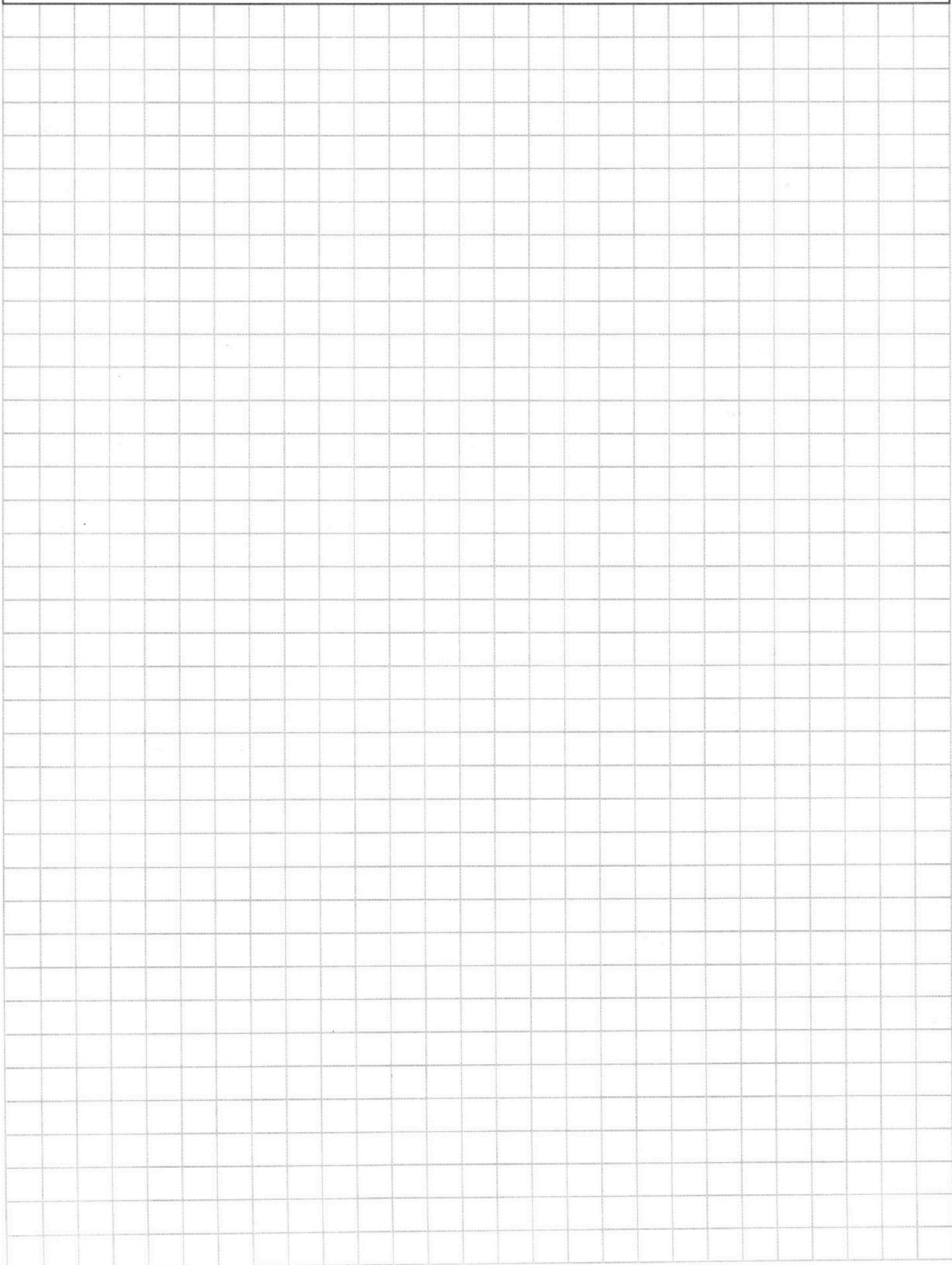
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



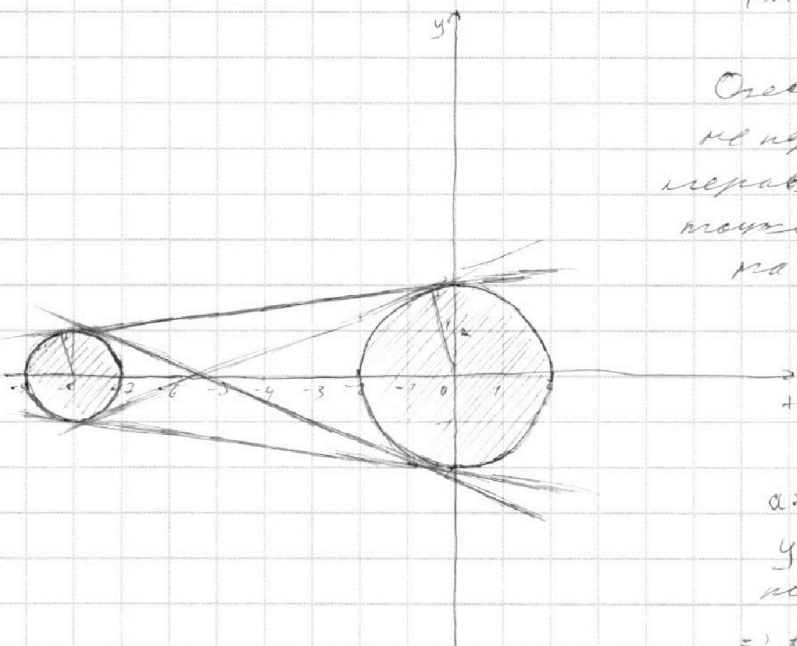
№ 6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \geq 0 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 - 4$ - ур. окружности
с центром $O(0,0)$
и радиусом $r = 2$

$(x+8)^2 + y^2 - 1$ - ур. окр. с
центром $S(-8,0)$ и $r = 1$

Очевидно окружности
не пересекаются \Rightarrow для ≥ 0
неравенства все точки
лежат внутри окр. S
на их границах



$ax - y + 10b = 0$ - ур.
прямой
 $y = ax + 10b$, в момент
подбора b любое \Rightarrow
 \Rightarrow все зависит от a

$$\begin{cases} y = ax + d \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 - x^2 = a^2 x^2 + 2dax + d^2$$

$$x^2(a^2 + 1) + 2dax + d^2 - 4 = 0$$

Всего y значений 2 (если $\Delta \geq 0$)
 $\Rightarrow y = ax + 10b$ - касательная к
окружности

$$\begin{cases} y = ax + d \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 - (x+8)^2 = a^2 x^2 + 2dax + d^2$$

\Rightarrow
 $y = ax + 10b$ - касательная к
окружности

Омечено: y и a знак, ~~для всех значений a~~

~~знак a совпадает с b~~ \Rightarrow эти a совпадают с b и c корректны

нам для любых a касательная к окружности

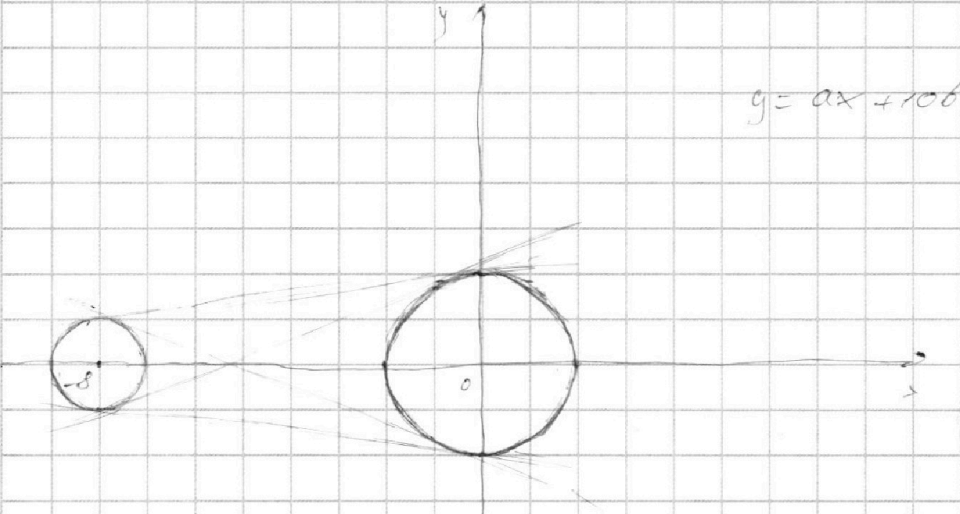
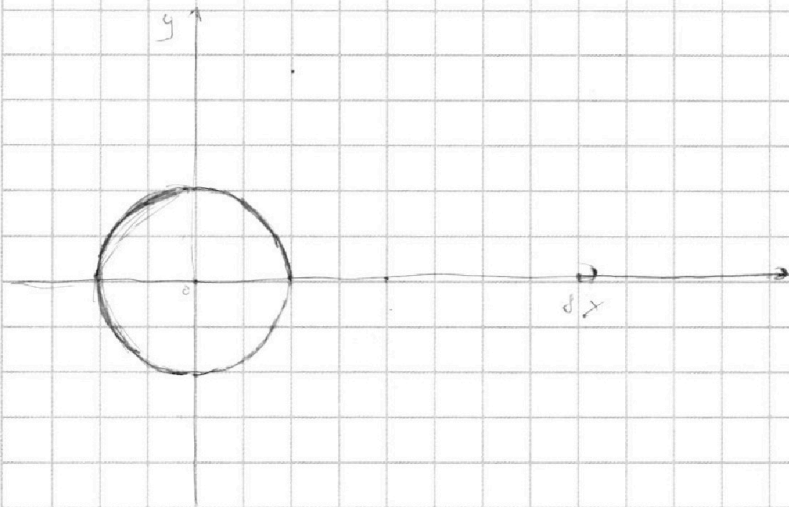
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = kx + b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

тогда $4 - x^2 = k^2 x^2 + b^2 + 2kxb$

$$\text{так } (x+8)^2 + 4 - x^2 = 1$$

$$16x + 64 + 4 = 1$$

$$x = 4 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a+b=$$

$$d = 2x_2 + y_2$$

$$2x + \Delta y = 64$$

$$2x_1 - y_1 = 12 - d$$

$$y_1 = 2x_1 - 12 + d$$

22

13

$$S = 22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41 =$$

$$121 \cdot 4 = 484$$

$$12 \cdot 41 = 492 + 12 = 504$$

973

$$\frac{22 \pm \sqrt{973}}{82}$$

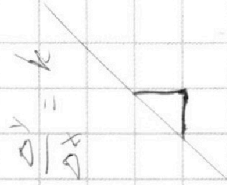
$$2 - 2x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$$

$$x \leq \frac{2}{3}$$

$$40x^2 + 4 - 28 \leq 2 \cdot 2x + 1$$

$$42x^2 - 2x + 3 \leq 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$$



5

$$x = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

$$x = \frac{30}{\sqrt{61}}$$

O(0,0)

P(-12; 24) → P(-4; 6)

A(1; 6)

R(5; 0)

$$2x_1 - 2x_2 + y_1 - y_2 = 64$$

$$\sqrt{61} \approx 7.81$$

$$4 \cdot 244 \approx 976$$

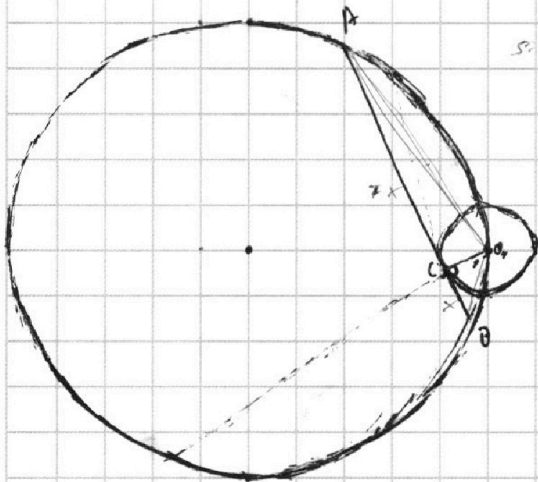
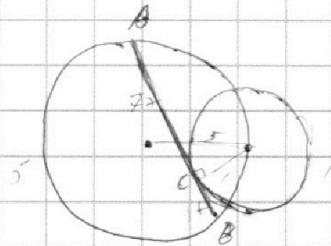
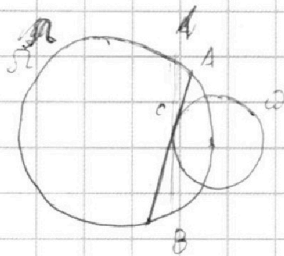
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$8x = 5 \sin \alpha d =$$

$$\sin \alpha d = \frac{8x}{5} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}$$

$$\frac{40x^2 - 21x + 2}{99x^2 - 19x} \cdot \frac{2x-3}{2x-1}$$

$$-7x+2$$

$$S_{AOP} = \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha$$

$$360 - 2\alpha$$

$$\sin(360^\circ - 2\alpha)$$

$$\sin(-2\alpha) =$$



$$\frac{8x}{\sin(4\alpha)} = 5$$

$$12 - 11(2x - 3)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

$$\text{OДЗ: } \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$x \in [1, 1.5]$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 40x^2 + 4 - 28x + 2x^2 + 2x + 1 + (2 \cdot (2 - 2x) \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$40x^2 - 21x + 2 = 2(2x - 2)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x - 2 = 0$$

$$2x - 1 = 2 \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$\frac{a}{b} = 10$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ab \approx 2^{12}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$bc: 17$$

$$ac:$$

$$\begin{cases} x+y \geq 10 \\ y+z \geq 17 \\ z+x \geq 37 \end{cases}$$

$$x+y \geq 10 \quad x-y \leq 10$$

$$\sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} \approx abc \geq \sqrt{2^{54} \cdot 7^{64}} \approx 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x+y=14 \\ y+z=18 \\ z+x=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z-x=6 \\ x=8 \\ y=6 \\ z=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=10 \\ y+z=17 \\ x+z=37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z-x=7 \\ z=21 \\ y=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y \geq 10 \\ y \leq 10-x \\ x+y \geq 20 \\ y-x \geq -10 \\ 2y \geq 0 \end{cases}$$

$$(a+b; a^2 - 6ab + b^2)$$

$$(a+b; -8ab)$$

$$+8ab \quad | \quad a+b$$

$$+8ab + -\frac{8ab^2}{ab}$$

$$a=1$$

$$b=2$$

$$\frac{8}{1+49-6 \cdot 2} = \frac{8}{2} = 1$$

$$y = ax + b$$