



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1.

Т.к. $ac : 7^{39}$, то $abc : 7^{35}$ ~~или~~ abc

Обозначим за a_2, b_2, c_2 степени вхождения 2
в a, b и c соответственно. Тогда $ab : 2^{15} \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 15$
 $bc : 2^{17} \Rightarrow b_2 + c_2 \geq 17$; $ac : 2^{23} \Rightarrow a_2 + c_2 \geq 23$

Произведение чисел делится на множитель в степени суммы
вхождений этого множителя в ^{числа} множители произведения \Rightarrow
 $\Rightarrow abc : 2^{a_2 + b_2 + c_2}$

Сложим 3 пер-ва, полученные выше: $2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 55$

Т.к. числа натуральные, степень вхождения тоже натуральная
или 0 $\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 28 \Rightarrow abc : 2^{28}$

$abc : 7^{39}$
 $abc : 2^{28} \Rightarrow abc : 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$
т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$

7 и 2 взаимно просты

Приведем пример где $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$: $a = 2^{10} \cdot 7^{11}$
 $b = 2^5 \cdot 7^{18}$
 $c = 2^{13} \cdot 7^{28}$

$ab = 2^{15} \cdot 7^{29}$; $2^{15} \cdot 7^{29}$
 $\Rightarrow bc = 2^{18} \cdot 7^{28}$; $2^{17} \cdot 7^{18}$
 $ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$; $2^{23} \cdot 7^{39}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2. ~~4~~

$\frac{a}{b}$ - несократима $\Rightarrow \text{НОД}(a; b) = 1$

Сократить можно на $\text{НОД}(a+b; a^2 - 7ab + b^2) \Rightarrow$ по алгоритму

Евклида $\text{НОД}(a+b; a^2 - 7ab + b^2) = \text{НОД}(a+b; a^2 - 7ab + b^2 - a(a+b)(a-b))$

$= \text{НОД}(a+b; 9b^2)$

Т.к. $\text{НОД}(a; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; 9b^2) = \text{НОД}(a+b; 9) \leq 9$

Приведем пример для $m=9$: $a=4$, $b=5$

$$\frac{4+5}{16-140+25} = -\frac{9}{99} = -\frac{1}{11}$$

Ответ: 9

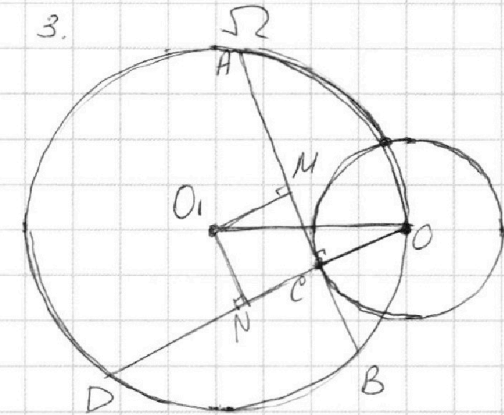
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $AC = 17x \Rightarrow CB = 7x$
 т.к. AB - касательная $\omega \Rightarrow O_1C \perp AB$
 M - середина $AB \Rightarrow O_1M \perp AB$
 $MB = 12x \Rightarrow MC = 5x$

D - пересечение O_1C и Ω
 N - середина $OD \Rightarrow O_1N \perp OD$
 $CO \cdot CD = AC \cdot BC$
 $7 \cdot CD = 17x \cdot 7x$
 $CD = 17x^2$

$$ON = \frac{17x^2 + 7}{2}$$

$ON \perp OD \Rightarrow ON \parallel MC$, аналогично $O_1M \parallel NC \Rightarrow O_1MNC$ - параллелограмм \Rightarrow

$$\Rightarrow O_1N = MC = 5x$$

В $\triangle O_1ON$ по т. Пифагора:

$$O_1N^2 + NO^2 = O_1O^2$$

$$25x^2 + \left(\frac{17x^2 + 7}{2}\right)^2 = 13^2$$

$$100x^2 + 289x^4 + 2 \cdot 7 \cdot 17x^2 + 49 - 169 \cdot 4 = 0$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$(x^2 - 1)(289x^2 + 627) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{627}{289} < 0 \end{cases} \quad x^2 > 0 \text{ противоречие}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 < 0 \end{cases} \quad x \text{ - длина} \Rightarrow > 0$$

$$x = 1$$

$$AB = 24(17+7)x = 24x = 24$$

0+вет: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4.

Сделаем замену: $A = 3x^2 + 3x + 1$, $B = 1 - 9x$, тогда:

ОДЗ: $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

$3(x-1)^2 - 1 \geq 0$

$(x-1)^2 \geq \frac{1}{3}$

$\begin{cases} x-1 \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x-1 \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

$D = 9 - 4 \cdot 3 = -3 < 0$
 $3 > 0$

$\Rightarrow 3x^2 + 3x + 1 > 0$

$\sqrt{A+B} - \sqrt{A} = B \quad | \cdot (\sqrt{A+B} + \sqrt{A})$

$B = B(\sqrt{A+B} + \sqrt{A})$

$B(1 - \sqrt{A+B} - \sqrt{A}) = 0$

$B = 0 \Rightarrow 1 - 9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

$\sqrt{A+B} + \sqrt{A} = 1$

$\sqrt{A+B} + \sqrt{A} = 1 \quad | > 0$

$A+B+A+2\sqrt{(A+B)A} = 1$

$2\sqrt{A^2+AB} = 1-A-B \quad | -2A-B \geq 0$

$4(A^2+AB) = 1-4A-2B+4AB$

$1+B^2-4A-2B=0$

Обратная замена переменных:

$1 + 1 - 18x + 81x^2 - 12x^2 - 12x - 4 - 2 + 18x = 0$

$81x^2 - 12x^2 - 12x - 4 = 0$

$69x^2 - 12x - 4 = 0$

$D = 144 + 4 \cdot 69 \cdot 4 = 144 + 1104 = 1248$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{2 \cdot 69}$

$\frac{12 + \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} \vee 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

$12 + \sqrt{1248} \vee 2 \cdot 69 + 2 \cdot 23\sqrt{3}$

$12 + 4\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 13} \vee 2 \cdot 69 + 2 \cdot 23\sqrt{3}$

$6 + 2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 13} \vee 69 + 23\sqrt{3}$

$2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 13} - 23\sqrt{3} \vee 63$

$4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 + 23 \cdot 23 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 23 \cdot \sqrt{2 \cdot 13} \vee 63^2$

$4 \cdot 2 \cdot 13 + 23 \cdot 23 - 4 \cdot 23 \sqrt{2 \cdot 13} \vee 3 \cdot 21 \cdot 21$

$104 + 529 - 1323 < 0 < 4 \cdot 23 \sqrt{2 \cdot 13}$

$\frac{12 + \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} \vee 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

$12 + 4\sqrt{78} \vee 2 \cdot 69 - 2 \cdot 23\sqrt{6}$

$2\sqrt{78} + 23\sqrt{6} \vee 63$

$4 \cdot 78 + 23^2 \cdot 6 + 2 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 6 \cdot \sqrt{13} \vee 63^2$

$\frac{1}{9} \vee 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$
 $1 \vee 9 - 3\sqrt{3}$
 $3\sqrt{3} \vee 8$
 $27 \vee 64$
 $27 < 64 \Rightarrow \frac{1}{9} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$
 $1 - 6x^2 - 6x - 2 - 1 + 18x$
 $-6x^2 + 12x - 2 \geq 0$
 $-6(x-1)^2 + 4 \geq 0$
 $4 \geq 6(x-1)^2$
 $\frac{2}{3} \geq (x-1)^2$
 $\frac{\sqrt{6}}{3} \leq x-1 \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$
 $1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение 4

$$4 \cdot 26 + 23^2 \cdot 2 + 4 \cdot 23 \cdot 2\sqrt{13} \sqrt{3 \cdot 21^2}$$
$$104 + 1058 - 1323 \sqrt{-4 \cdot 23 \cdot 2\sqrt{13}}$$
$$-161 \sqrt{-4 \cdot 23 \cdot 2\sqrt{13}}$$

$$8 \cdot 23\sqrt{13} \sqrt{161}$$

$$8\sqrt{13} \sqrt{7}$$

$$\sqrt{13} > 1 \Rightarrow 8\sqrt{13} > 8 > 7 \Rightarrow \frac{12 + \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} > 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$12 + 24 \cdot \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$6 + 2\sqrt{78} \sqrt{69 - 23\sqrt{3}}$$

$$2\sqrt{78} + 23\sqrt{3} \sqrt{63}$$

$$2\sqrt{26} + 23 \sqrt{21\sqrt{3}}$$

$$4 \cdot 26 + 23^2 + 4 \cdot 23\sqrt{26} \sqrt{21 \cdot 3}$$

$$104 + 529 - 1323 \sqrt{-4 \cdot 23\sqrt{26}}$$

$$4 \cdot 23\sqrt{26} \sqrt{690}$$

$$46\sqrt{26} \sqrt{345}$$

$$46 \cdot 46 \cdot 26 \sqrt{345 \cdot 345} \Rightarrow \frac{12 + \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$55016 < 119025$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$6 - 2\sqrt{78} \sqrt{69 - 23\sqrt{6}}$$

$$23\sqrt{6} - 2\sqrt{78} \sqrt{63}$$

$$23 \cdot 23 \cdot 6 + 2 \cdot 2 \cdot 78 - 2 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 6\sqrt{13} \sqrt{63 \cdot 63}$$

$$2 \cdot 23 \cdot 23 + 8 \cdot 13 - 8 \cdot 23\sqrt{13} \sqrt{21 \cdot 21 \cdot 3}$$

$$1058 + 104 - 1323 < 0 < 8 \cdot 23\sqrt{13} \Rightarrow \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{9}; \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \right\}$$

\Rightarrow не подходит

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



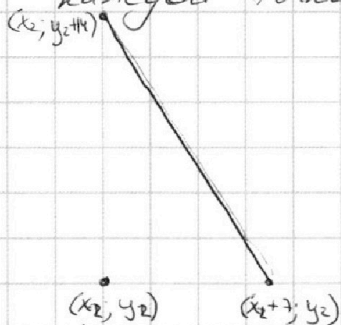
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.

Условие $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ при подстановке конкретных x_2 и y_2 даёт уравнение прямой. Также из этого можно заметить, что пары упорядочены и для каждой точки прямая располагается одинаково:

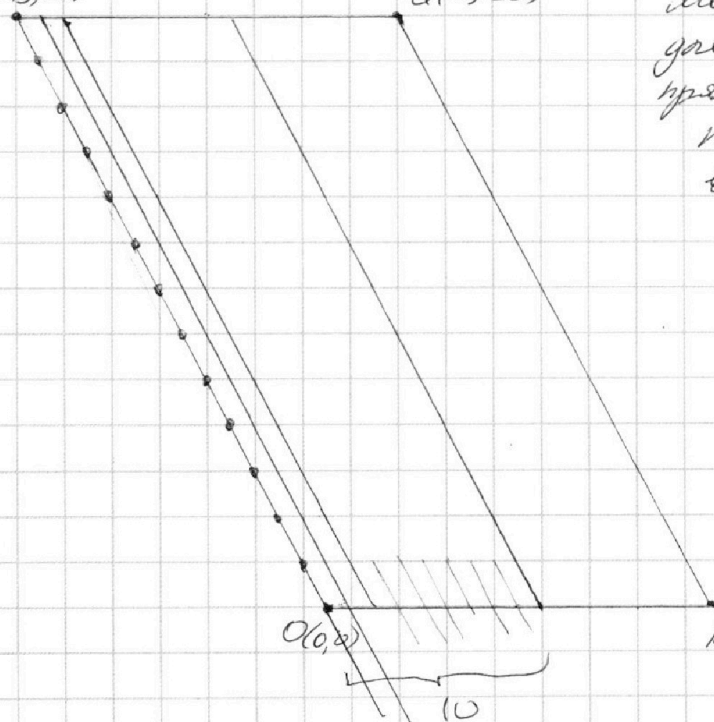


Нарисуем параллелограмм из условия с коэффициентом стороны клеточки равной 2 ед. отрезкам и для каждой точки подсчитаем количество целочисленных точек, лежащих внутри или на границе параллелограмма, также лежащих на прямой. Тогда количество пар точек будет сумма всех

подписанных чисел, т.к. пары упорядочены.

$P(-13, 26)$

$Q(3, 26)$



Можно заметить, что для точек лежащих на прямой, параллельной парной будет одинаковое кол-во точек, будем считать по прямой

Наклон прямой равен наклону боковых граней ребер сторон 4-угольника.

На каждой прямой 14 целочисленных точек, значит прямых, для кото-

рых парная прямая

проходит через параллелограмм 10 штук, значит всего пар $10 \cdot 14 \cdot 14 = 1960$

Ответ: 1960

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6.

$$\begin{cases} ax+cy-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

Второе неравенство не зависит от a и b , найдём графически его область решений:

(x^2+y^2-1) - окружность с центром в $(0;0)$ и радиусом 1 .

$(x^2+(y-12)^2-16)$ - окружность с центром $(0;12)$ и радиусом 4 .

Каждая скобка меньше или равна 0 внутри или на границе окружности, а т.к. окружности не пересекаются ($12 > 1+4$), то решением неравенства будут области внутри окружностей и их граница.

Первое уравнение это уравнение прямой. Т.к. надо 2 решения, то прямая и 2 круга имеют 2 общие точки, такое может быть только при общих касательных, их всего 4.

Из простых соотношений можно найти точки пересечения оси Oy с касательными, т.к. картинка симметрична отн-во Oy

Подобие $\Delta \Rightarrow \frac{k}{1} = \frac{k+12}{4} \Rightarrow k=4 \Rightarrow A(0; -4)$

BH - высота прямоугольного $\Delta \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow$

\Rightarrow по т. Пифагора

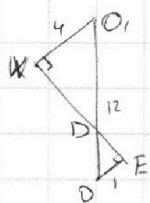
$$OH = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16-15}{16}} = \frac{1}{4} \Rightarrow B\left(\frac{\sqrt{15}}{4}; -\frac{1}{4}\right)$$

и $C\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}; -\frac{1}{4}\right)$

$$\begin{cases} a \cdot 0 - 4 - 8b = 0 \Rightarrow b = -0,5 \\ a \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{4} + 4 = 0 \Rightarrow a \sqrt{15} = -15 \end{cases}$$

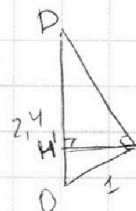
для A и C : $a = -\sqrt{15}$; $b = -0,5$

Аналогия для внутренних общих касательных:



$$\frac{O_1D}{O_2D} = \frac{4}{1} \Rightarrow D(0; 2,4)$$

$$O_1D + O_2D = 12$$



$$DE = \sqrt{24^2 - 1} = 2\sqrt{119} \Rightarrow EH' = \frac{2\sqrt{119}}{2} = \sqrt{119}$$

$$= \frac{\sqrt{119}}{1,2} = \frac{\sqrt{119}}{12}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение В

$$OH' = \sqrt{OE^2 - H'E^2} = \sqrt{1 - \frac{119}{144}} = \frac{5}{12} \Rightarrow E\left(\frac{\sqrt{119}}{12}; \frac{5}{12}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F\left(-\frac{\sqrt{119}}{12}; \frac{5}{12}\right)$$

где E и D:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + 2,4 - 8b = 0 \Rightarrow b = 0,3 \\ a \frac{\sqrt{119}}{12} + \frac{5}{12} - 2,4 = 0 \Rightarrow a = \end{cases}$$
$$a\sqrt{119} + 5 - 28,8 = 0$$
$$a\sqrt{119} = 23,8$$
$$a = 0,2\sqrt{119}$$

где F и D: $a = -0,2\sqrt{119}$

С ответом

Ответ: $\{0,2\sqrt{119}; -0,2\sqrt{119}; \sqrt{15}; -\sqrt{15}\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

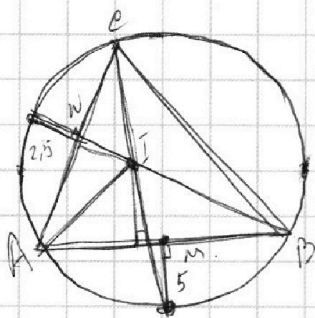
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



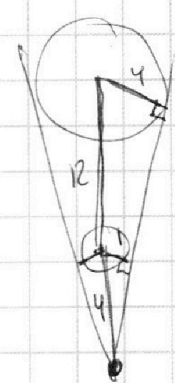
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} +13 \\ 8 \\ \hline 104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 21 \\ \hline 42 \\ 441 \\ \hline 1323 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 14 \\ \hline 68 \\ 17 \\ \hline 238 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} +1058 \\ 104 \\ \hline 1162 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1323 \\ -1162 \\ \hline 161 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +529 \\ 104 \\ \hline 633 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1323 \\ -633 \\ \hline 690 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ 4 \\ \hline 676 \\ 49 \\ \hline 627 \end{array}$$

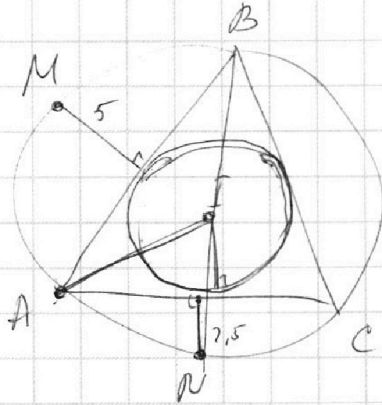
$$\begin{array}{r} 161+23 \\ 16117 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 46 \\ 46 \\ \hline 276 \\ 184 \\ \hline 2116 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 345 \\ 345 \\ \hline 1125 \\ 1380 \\ \hline 1035 \\ 119025 \end{array}$$

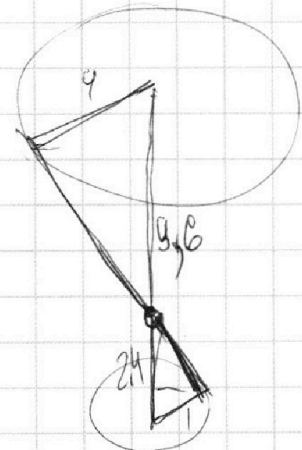
$$\begin{array}{r} \times 26 \\ 26 \\ \hline 12696 \\ +4232 \\ \hline 55016 \end{array}$$

2,4.



$$\sqrt{3} = h \cdot 4$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



$$\begin{array}{r} 2424 \\ \times 24 \\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\sqrt{4,76}$$

$$\begin{array}{r} 476 \overline{)4} \\ 4 \\ \hline 7 \\ 7 \\ \hline 36 \\ 36 \\ \hline 119 \\ 119 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{7}{36}$$

$$1,19$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ -119 \\ \hline 25 \end{array}$$

$D(0, 2,4)$

$$\frac{5}{12} - \frac{12}{5} = \frac{25-144}{60} =$$

$$\begin{array}{r} 28,8 \\ -5 \\ \hline 23,8 \end{array}$$

$$119 \cdot 2 \cdot 0,01$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a_2 + b_2 \geq 15$$

$$a_3 + b_3 \geq 11$$

$$b_2 + c_2 \geq 17$$

$$b_3 + c_3 \geq 18$$

$$c_2 + a_2 \geq 23$$

$$a_3 + c_3 \geq 39$$

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 55$$

$$2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 68$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 28$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 34$$

$$\begin{array}{r} 240 \overline{) 7} \\ -21 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$a = 2^{15} \cdot b + a + c = 23$$

$$a + b + c \geq 28$$

$$a = 2^{10}$$

$$a = 7$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$b = 2^5$$

$$b = 1$$

$$c = 2^{13}$$

$$c = 7$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 16 \\ \hline 414 \\ + 69 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$\sqrt{3:26} \quad 0.36$$

$$\sqrt{2:52} \quad 0.02$$

$$\sqrt{2:18}$$

$$\sqrt{1:44}$$

$$\sqrt{1:10}$$

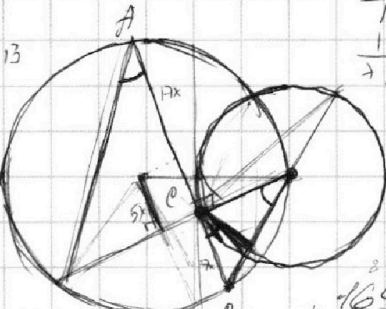
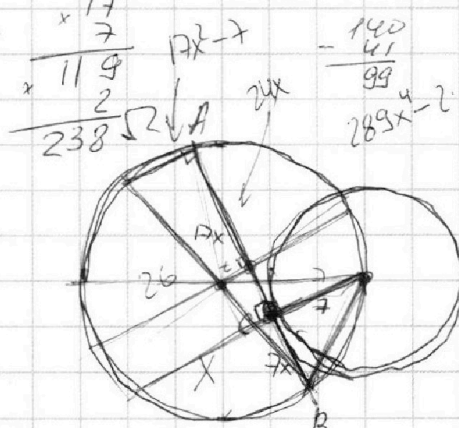
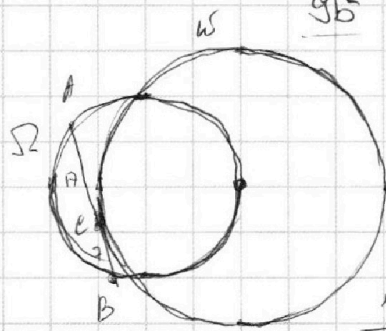
$$\frac{a}{b} \quad \frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = \text{НОД}(a+b, 9b^2) = \text{НОД}(a+b, 9)$$

$$a^2 - 7ab + b^2 \mid a+b$$

$$\begin{array}{r} a^2 + ab \\ - a^2 - 7ab \\ \hline b^2 - 8ab \\ - 8b^2 - 8ab \\ \hline 9b^2 \end{array}$$

$$\frac{4+5}{16-7 \cdot 4 \cdot 5 + 25} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$



$$(5x)^2 + \left(\frac{17x^2 + 7}{2}\right)^2 = 169$$

$$100x^2 + 289x^4 + 238x^2 + 49 = 169$$

$$388x^2 + 289x^4 + 338x^2 - 120 = 0$$

$$D = 338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 120 =$$

$$= 4(13^4 + 17^2 \cdot 120) =$$

$$x^2 = \frac{-338 \pm \sqrt{63241}}{2 \cdot 17^2}$$

$$1248 \overline{) 16}$$

$$112 \overline{) 178}$$

$$128 $$

$$128 $$

$$78 = 2 \cdot 39 = 2 \cdot 3 \cdot 13$$

$$\begin{array}{r} 338 \overline{) 2} \\ -2 \\ \hline 13 \\ -12 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 169 \\ \hline 1521 \\ + 1014 \\ \hline 28569 \\ + 34680 \\ \hline 63241 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 120 \\ \hline 5780 \\ + 289 \\ \hline 34680 \end{array}$$

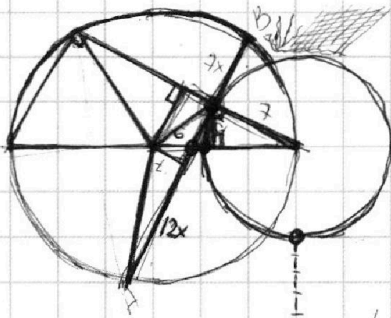
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 + 3x + 1 = A$$

$$1 - 9x = B$$

$$\sqrt{A+B} - \sqrt{A} = B$$

$$\frac{(\sqrt{A+B} - \sqrt{A})(\sqrt{A+B} + \sqrt{A})}{\sqrt{A+B} + \sqrt{A}} = \frac{B(\sqrt{A+B} + \sqrt{A})}{\sqrt{A+B} + \sqrt{A}}$$

$$(A+B-A) = B(\sqrt{A+B} + \sqrt{A})$$

$$B(1 - \sqrt{A+B} - \sqrt{A}) = 0$$

$$B = 0 \vee x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{A+B} + \sqrt{A} = 1$$

$$A+B+A+2\sqrt{AB} + \sqrt{A} = 1$$

$$2\sqrt{(A+B)A} = 1 - 2A - B$$

$$4(A+B)A = 1 + 4A^2 + B^2 - 4A - 2B + 4AB$$

$$4A^2 + 4AB = 1 + 4A^2 + B^2 - 4A - 2B + 4AB$$

$$B^2 - 4A - 2B + 1 = 0$$

$$1 - 18x + 9x^2 - 12x^2 - 12x - 4 - 2 + 18x + 1 = 0$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$144 + 4 \cdot 69 \cdot 4 = 16(9 + 69) = 16 \cdot 78 \dots$$

$$7 \cdot 17x^2 = 13^2 - 1^2$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

P

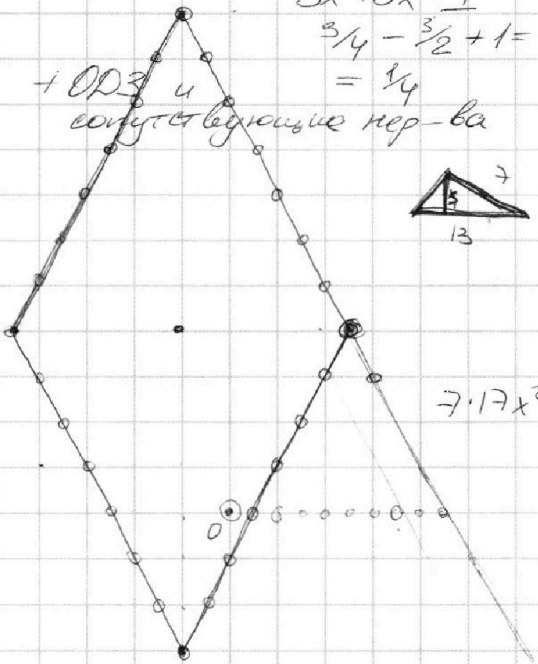
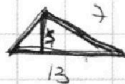
$$3x^2 - 6x + 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 1$$

$$3x^2 + 3x + 1$$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 =$$

$$= \frac{1}{4}$$

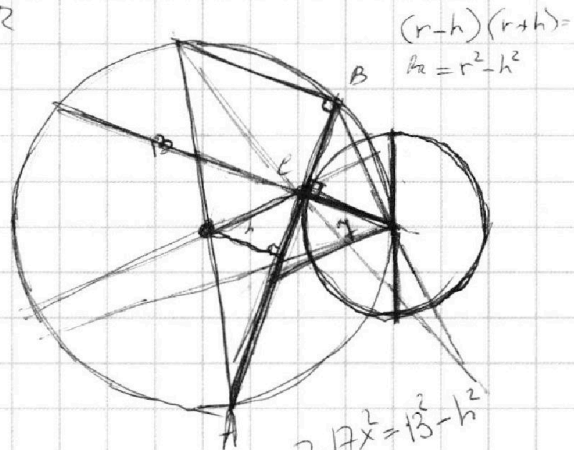
+ ODP 4
содержит вогнутые пер-ва



$$4 \cdot 7 \cdot 17x^2 = 4 \cdot 13^2 - (17x^2 - 7)^2 - 100x^2$$

$$17^2 x^4 + 6 \cdot 7 \cdot 17x^2 + 100x^2 - 4 \cdot 13^2 = 0$$

$$36 \cdot 49 \cdot 17^2 + 10^4 + 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 100 + 4 \cdot 17^2 \cdot 4 \cdot 13^2$$



$$(r-h)(r+h) =$$

$$h^2 = r^2 - h^2$$

$$\left(\frac{17x^2 - 7}{2}\right)^2 + 25x^2 = h^2$$

$$7 \cdot 17x^2 = 13^2 - \left(\frac{17x^2 - 7}{2}\right)^2 - 25x^2$$

$$\frac{17x^2}{4}$$