МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω.

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\dfrac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B, а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже мотоциклиста ~~велосипедиста~~. Найдите расстояние между A и B.

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC, проходящую через вершину C, в точке Y; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω. Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1.

Ответ: ~~$3^{17} \cdot 7^{33}$~~ $3^{25} \cdot 7^{38}$

Решение:

Предположим, что какое-то из чисел a, b или c кратно простому p, при этом $p \neq 3$ и $p \neq 7$. Поделим число a, b или c (которое кратно p) на p. Тогда, на делимость на 3 и на 7 чисел ab, bc и ac наше действие не влияет. Будем повторять это действие до тех пор, пока ~~будут~~ найдется такое простое число p, что $p \neq 3$ и $p \neq 7$, при этом какое-то из чисел a, b или c кратно p. Нетрудно видеть, что такими операциями мы ~~...~~ не влияем на делимость чисел ab, bc и ac на 3 и 7; ~~...~~ причем число abc мы можем только уменьшить с помощью таких операций.

По итогу, у нас останется три числа a, b, c, каждое из которых ~~не имеет простого множителя в разложении на простые множители, отличного от 3 и 7.~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 продолжение

не кратно никакому простому числу, отличному от 3 и 7.

Тогда $a=3^{a_1}\cdot 7^{b_1}$; $b=3^{a_2}\cdot 7^{b_2}$; $c=3^{a_3}\cdot 7^{b_3}$, где числа $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ — целые неотрицательные.

Тогда $ab=3^{a_1+a_2}\cdot 7^{b_1+b_2}$; $ac=3^{a_1+a_3}\cdot 7^{b_1+b_3}$; $bc=3^{a_2+a_3}\cdot 7^{b_2+b_3}$;
$abc=3^{a_1+a_2+a_3}\cdot 7^{b_1+b_2+b_3}$

Так как $ab \vdots (3^{11}\cdot 7^{11})$; $ac \vdots (3^{21}\cdot 7^{38})$; $bc \vdots (3^{18}\cdot 7^{16})$,

то получаем систему:

система (1) $\begin{cases} a_1+a_2 \geq 11 \\ a_1+a_3 \geq 21 \\ a_2+a_3 \geq 18 \\ b_1+b_2 \geq 11 \\ b_1+b_3 \geq 38 \\ b_2+b_3 \geq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+a_2+a_1+a_3+a_2+a_3 \geq 11+21+18 \\ b_1+b_2+b_1+b_3+b_2+b_3 \geq 11+38+16 \end{cases} \Rightarrow$

~~Так как $abc = 3^{a_1+a_2+a_3}\cdot 7^{b_1+b_2+b_3}$, что~~

$\Rightarrow \begin{cases} 2(a_1+a_2+a_3) \geq 50 \\ 2(b_1+b_2+b_3) \geq 65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+a_2+a_3 \geq 25 \\ b_1+b_2+b_3 \geq 32{,}5 \end{cases} \Rightarrow$

т.к. $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ — целые и неотрицательные $\Rightarrow$ $\begin{cases} a_1+a_2+a_3 \geq 25 \\ b_1+b_2+b_3 \geq 33. \end{cases}$

$\Downarrow$

$abc \geq 3^{25}\cdot 7^{33}$. Но т.к. b_1, b_2, b_3 — целые и неотрицательные, и т.к. $b_1+b_3 \geq 38$, то и $b_1+b_2+b_3 \geq 38 \Rightarrow abc \geq 3^{25}\cdot 7^{38}$

Пример: $a_1=7$; $a_2=4$; $a_3=14$; $b_1=19$; $b_2=0$; $b_3=19$.

Как видно, ~~числа~~ эти числа удовлетворяют системе (1) и $a_1+a_2+a_3 \geq 25$ и $b_1+b_2+b_3 \geq 38$. Как видно, $a=3^7\cdot 7^{19}$; $b=3^4$; $c=3^{14}\cdot 7^{19}$ и $abc=3^{25}\cdot 7^{38}$.

пример верен $\Rightarrow$ минимальное значение abc равно $3^{25}\cdot 7^{38}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2 продолжение

$m \le 10$

Пример на $m=10$: $a=7$; $b=3$, дробь $\frac{a}{b}$ – несократима

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{10}{49-8\cdot 21+9} = \frac{10}{58-168} = \frac{10}{-110} \Rightarrow$$ числитель

и знаменатель дроби $\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$ можно сократить

на $m=10$.

$\Downarrow$

Ответ: $m=10$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2 пусть $c \vdots d$, если $|c| \vdots |d|$, числа c и d – целые, $d \neq 0$

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

Если и числитель, и знаменатель кратны m, $m \in \mathbb{N}$, то:

$$\begin{cases}(a+b) \vdots m\\(a^2-8ab+b^2) \vdots m.\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a+b) \vdots m\\(a^2+2ab+b^2-10ab) \vdots m.\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a+b) \vdots m\\((a+b)^2-10ab) \vdots m\end{cases}$$

т.к. $(a+b) \vdots m$, то и $(a+b)^2 \vdots m$.

$$\begin{cases}(a+b) \vdots m\\(-10ab) \vdots m\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a+b) \vdots m\\10ab \vdots m.\end{cases}$$

Если НОД$(a;m)=X$, причём $X \neq 1$, то т.к. $(a+b) \vdots m$ и $m \vdots X$, ~~то~~ X – натуральное, ~~то~~ и $a \vdots X$, то $b \vdots X \Rightarrow$ ~~(a;b)~~ НОД$(a;b) \geq X$, X – натуральное, $X \neq 1$. $\Rightarrow$ дробь $\frac{a}{b}$ сократима, что неверно по условию. $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ НОД$(a;m)=X$, $X=1$.

Аналогично НОД$(b;m)=1$.

т.к. НОД$(a;m)=1$ и НОД$(b,m)=1$ и $(10ab) \vdots m$

$10 \vdots m$

$m \leq 10$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

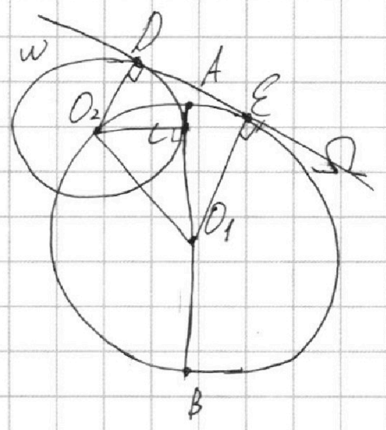
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4. $\triangle XYZ$ – треугольник XYZ.

Дано:
Ω; w,
центр w лежит на Ω, AB – диаметр Ω, касающийся w в точке C;
$AC = 1$; $BC = 16$.
DE – общая касательная к w и Ω*
DE = ?

* DE касается w в точке D, Ω в точке E.



Пусть R – радиус Ω, r – радиус w; O_1 – центр Ω, O_2 – центр w, $O_2 \in \Omega$.

$$\begin{cases} AC = 1 \\ AB = 2R \\ BC = 16 \end{cases} \Rightarrow \quad AB = AC + BC = 2R = 17 \Rightarrow R = 8{,}5.$$

т.к. AB касается w в точке C, то $O_2C \perp AB$.

Тогда, $\triangle O_1O_2C$ – прямоугольный, где $O_1O_2 = R$ – гипотенуза, $O_2C = r$ – катет и CO_1 ~~= R~~ – катет.

$CO_1 = O_1A - AC = R - 1 = 7{,}5$.

$O_2C^2 + CO_1^2 = O_1O_2^2$ по Теореме Пифагора

$O_2C = \sqrt{O_1O_2^2 - CO_1^2}$

$O_2C = \sqrt{8{,}5^2 - 7{,}5^2}$

$O_2C = \sqrt{16} \Rightarrow O_2C = 4 \Rightarrow r = 4.$

Докажем, что если X – длина общей внешней касательной двух окружностей ~~то~~ с радиусами R и r ~~то~~ и расстоянием между центрами, равным y, равно $\sqrt{y^2 - (R-r)^2}$:

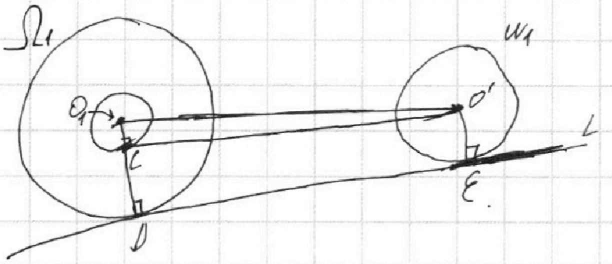
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 продолжение



У Ω_1 радус R, у w_1 радиус r_1.

У Ω_1 - центр O, у w_1 - центр O'

l - общая касательная

$l \cap \Omega_1 = \{D\}$; $l \cap w_1 = \{E\}$

Пусть w_2 - окружность с центром O_1 и радиусом $R-r$. Проведём касательную a из O' к w_2 так, чтобы a пересекала O_1D. (см. рисунок). Пусть $w_2 \cap a = \{C\} \Rightarrow O_1C = R-r$

Параллельно перенесём a на вектор $\overrightarrow{O'E}$. Тогда, т.к $|\overrightarrow{O'E}| = r$ и $O_1C = R-r$, то прямая a', полученная параллельным переносом ~~из~~ из a на вектор $\overrightarrow{O'E}$, касается и Ω_1 и w_1 (это следует из ~~п~~ построения общей касательной для двух окружностей, у которых не совпадают центры). Тогда, $O'C \parallel DE$. Также $DE = O'C$, и $C \in O_1D$, также из ~~задачи~~ построения общей касательной для двух неконцентрических окружностей.

Т.к. $DE \parallel O'C$ и $DE \perp O_1D$, то $O'C \perp O_1C$, т.к. $C \in O_1D$.

Тогда треугольник $O'CO_1$ - прямоугольный с прямым углом ~~$\angle O_1CO'$~~ $\angle O_1CO'$. Тогда, по теореме Пифагора $O'C^2 + O_1C^2 = (O_1O')^2 \Rightarrow O'C = \sqrt{(O_1O')^2 - (O_1C)^2}$, т.к. $O_1O' = y$ и $O_1C = R-r$, то $O'C = \sqrt{y^2 - (R-r)^2}$. Что и требовалось доказать.

Тогда, для окружностей Ω и w из задачи, т.к. они неконцентрические,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 продолжение 2

верно, что $DE = \sqrt{O_1O_2^2 - (R-r)^2}$.

Т.к. $R = 8,5$, $r = 1$, а $O_1O_2 = R$, то $DE = \sqrt{8,5^2 - (8,5-1)^2}$

$DE = \sqrt{8,5^2 - 7,5^2}$

$DE = \sqrt{1 \cdot 16}$

$DE = \sqrt{16}$

$DE = 4$

Ответ: 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5 продолжение

если $y = -\frac{z}{4}$:

$$\frac{2yz}{-yz-6y^2} = \frac{-2\cdot\frac{z^2}{4}}{\frac{z^2}{4}-6\cdot\frac{z^2}{16}} = \frac{-\frac{z^2}{2}}{\frac{z^2}{4}-\frac{3z^2}{8}} = \frac{-\frac{z^2}{2}}{\frac{2z^2}{8}-\frac{3z^2}{8}} = \frac{\frac{-z^2}{2}}{\frac{-z^2}{8}} =$$

$$= +\frac{8}{2} = 4$$

т.к. $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2} = \frac{2yz}{-yz-6y^2}$ по (*), то $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2} = 4$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2} = 0{,}4 \\ \frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2} = 4 \end{array}\right.$$

Очевидно тогда, что наибольшим возможным значением выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ является 4.

Пример: $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=4 \end{cases}$

Тогда $3x+2y=z$, т.к. $3\cdot2-2\cdot1 = 6-2=4$, т.е. $3x+2y=z$.

Также, ~~$\frac{3}{x}=\frac{3}{2}, \frac{1}{y}=-1, \frac{2}{z}=\frac{1}{2}$~~ $\frac{3}{x}=\frac{3}{2}$; $\frac{1}{y}=-1$; $\frac{2}{z}=\frac{1}{2}$. ~~Для~~ Тогда выполняется равенство $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$ (т.к. $\frac{3}{2}+(-1)=\frac{1}{2}$).

~~3)~~ При $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=4 \end{cases}$, $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2} = \frac{3\cdot2^2-4\cdot(-1)^2-4^2}{2^2-6\cdot(-1)^2} = \frac{12-4-16}{4-6} = \cancel{\frac{-8}{-2}} =$

$= \frac{12-20}{4-6} = \frac{-8}{-2} = 4$, $\Rightarrow$ пример верен, т.к. числа 2; −1; 4 – ненулевые действительные, равенства $3x+2y=z$ и $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$ выполняются и ~~$\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$~~ $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2} = 4$.

Ответ: 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5.

$3x+2y=z$ (1) и $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$. (2)

Обозначения: $a \overset{\text{по}(x)}{=} b$ - означает, что $a=b$ по утверждению (x).

$\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z} \Rightarrow \frac{3}{x}=\frac{2}{z}-\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{3}{x}=\frac{2y-z}{yz}$.

$\Rightarrow \frac{3}{x}=\frac{-3x}{yz} \Rightarrow -x^2=yz$ (3)

$3x+2y=z \Rightarrow 3x=z-2y$

Из (1): $x=\frac{z-2y}{3} \Rightarrow x^2=\left(\frac{z-2y}{3}\right)^2$ (4)

~~Из (2):~~

Из (3) и (4): $-\left(\frac{z-2y}{3}\right)^2=yz$.

$\frac{-(4y^2+z^2-4yz)}{9}=yz$.

$-4y^2-z^2+4yz=9yz$

$-4y^2-z^2=5yz$ (5)

$\Updownarrow$

$4y^2+z^2+5yz=0$.

$\Updownarrow$

$(4y+z)(y+z)=0$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} y=-z \\ y=-\frac{z}{4} \end{array}\right.$ (6)

$\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2} \overset{\text{по}(3)\text{ и }(5)}{=} \frac{-3yz+5yz}{x^2-6y^2} \overset{\text{по}(3)}{=} \frac{2yz}{-yz-6y^2}$ (7).

по (6), $\left[\begin{array}{l} y=-z \\ y=-\frac{z}{4} \end{array}\right.$

если $y=-z$:

$\frac{2yz}{-yz-6y^2}=\frac{-2y^2}{y^2-6y^2}=\frac{-2}{1-6}=\frac{-2}{-5}=\frac{2}{5}=0{,}4$

т.к. $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}=\frac{2yz}{-yz-6y^2}$ по (7), то $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}=0{,}4$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 продолжение

Из (8) и (6): $\begin{cases} v_1 v_2 = 540 \\ v_1 + v_2 = 48 \end{cases}$ $\Leftarrow$

$\begin{cases} v_1 = 48 - v_2 \\ (48 - v_2) v_2 = 540 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 48 - v_2 \\ -v_2^2 + 48 v_2 - 540 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 48 - v_2 \\ v_2^2 - 48 v_2 + 540 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 48 - v_2 \\ v_2^2 - 48 v_2 + 540 = 0 \end{cases}$

решим уравнение $v_2^2 - 48 v_2 + 540 = 0$ ($\mathcal{D}$-дискриминант)

$\mathcal{D} = 48^2 - 540 \cdot 4 = 2304 - 2160 = 144 = 12^2$

$\left[\begin{array}{l} v_2 = \frac{\sqrt{\mathcal{D}} + 48}{2} \\ v_2 = \frac{-\sqrt{\mathcal{D}} + 48}{2} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} v_2 = \frac{12 + 48}{2} \\ v_2 = \frac{-12 + 48}{2} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} v_2 = 30 \\ v_2 = 18 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} v_2 = 30 \\ v_1 = 48 - v_2 \end{cases} \\ \begin{cases} v_2 = 18 \\ v_1 = 48 - v_2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} v_2 = 30 \\ v_1 = 18 \end{cases} \\ \begin{cases} v_2 = 18 \\ v_1 = 30 \end{cases} \end{array}\right.$

Так как мотоциклист изначально пришёл раньше велосипедиста, а стартовали они одинаково, то $v_1 > v_2$

$\begin{cases} v_1 = 30 \\ v_2 = 18 \end{cases}$

по (5), $2 = S \cdot \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} \Rightarrow S = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 - v_2}$ км $\Rightarrow S = \frac{2 \cdot 30 \cdot 18}{30 - 18}$ км $\Rightarrow$

$\Rightarrow S = \frac{2 \cdot 540}{12}$ км $\Rightarrow S = \frac{540}{6}$ км $\Rightarrow S = \frac{270}{3}$ км $\Rightarrow S = 90$ км.

Ответ: 90 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ч. - час, км/ч - километры в час; км. - километр.

№6. Пусть S км. - путь из A в B, V_1 км/ч - скорость мотоциклиста, V_2 км/ч - скорость велосипедиста. (изначальные)

Тогда мотоциклист ехал $\frac{S}{V_1}$ часов, а велосипедист - $\frac{S}{V_2}$ ч.

Тогда, по условию, $\frac{S}{V_1} = \frac{S}{V_2} - 2$ (всё в часах)

Если мотоциклист ехал бы время, за которое велосипедист проехал весь путь S, то ~~он уже~~ мотоциклист проехал бы $\frac{S}{V_2} \cdot V_1$ км. Если бы велосипедист ехал время, затраченное мотоциклистом на путь S, то велосипедист проехал бы $\frac{S}{V_1} \cdot V_2$ км. Тогда, по условию, $\frac{S}{V_1} \cdot V_2 + 96 = \frac{S}{V_2} \cdot V_1$ (всё в км.)

Если бы каждый увеличил скорость на 6 км/ч, то мотоциклист бы ехал $\frac{S}{V_1+6}$ часов, а велосипедист - $\frac{S}{V_2+6}$ ч. По условию, $\frac{S}{V_1+6} = \frac{S}{V_2+6} - 1{,}25$ ~~часа~~ (всё в ч.).

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{S}{V_1} = \frac{S}{V_2} - 2 & (1) \\ \frac{S}{V_1+6} = \frac{S}{V_2+6} - 1{,}25 & (2) \\ \frac{S}{V_2} \cdot V_1 = \frac{S}{V_1} \cdot V_2 + 96. & (3) \end{cases}$$

Из (3) следует, что $96 = S \cdot \frac{V_1^2 - V_2^2}{V_1 V_2}$ (4)

Из (1) следует, что $2 = S \cdot \frac{V_1 - V_2}{V_1 V_2}$ (5)

Из (4) и (5) следует, что $V_1 + V_2 = 48$. (6) (т.к. $S \cdot \frac{V_1^2 - V_2^2}{V_1 V_2} = S \cdot \frac{(V_1+V_2)(V_1-V_2)}{V_1 V_2}$.)

Из (2) следует, что $1{,}25 = \frac{S}{V_2+6} - \frac{S}{V_1+6}$, т.е. $S \cdot \frac{V_1 - V_2}{(V_2+6)(V_1+6)} = 1{,}25$. (7)

Из (5) и (7) следует, что

$$\frac{S \cdot \frac{V_1 - V_2}{V_1 V_2}}{S \cdot \frac{V_1 - V_2}{(V_1+6)(V_2+6)}} = \left(\frac{V_1 V_2}{(V_1+6)(V_2+6)}\right)^{-1} = \frac{2}{1{,}25} = \frac{2}{\frac{5}{4}} = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

$$\left(\frac{V_1 V_2}{(V_1+6)(V_2+6)}\right)^{-1} = 1{,}6 \Rightarrow \frac{(V_1+6)(V_2+6)}{V_1 V_2} = 1{,}6 \Rightarrow \frac{V_1 V_2 + 6(V_1+V_2) + 36}{V_1 V_2} = 1{,}6 \Rightarrow$$

т.к. $V_1 + V_2 = 48$ $\Rightarrow$

$$\frac{V_1 V_2}{V_1 V_2} + \frac{6 \cdot 48 + 36}{V_1 V_2} = 1{,}6 \Rightarrow 1 + \frac{324}{V_1 V_2} = 1{,}6 \Rightarrow \frac{324}{V_1 V_2} = 0{,}6 \Rightarrow \frac{V_1 V_2}{324} = \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 V_2 = \frac{324 \cdot 5}{3} \Rightarrow V_1 V_2 = 108 \cdot 5 \Rightarrow V_1 V_2 = 540. \quad (8)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7 продолжение

Так как $BF=BE$ (см. выше обоснование), то $\triangle BFE$ – р/б с основанием FE. Т.к. $\angle FBE=\angle CAB=90^\circ$, то $\angle BFE=\angle BEF=45^\circ$ – по сумме углов $\triangle BFE$.

$$\begin{cases}\angle BFE=45^\circ \\ \angle CFY=45^\circ \text{ (см. выше обоснование)}\end{cases} \Rightarrow \angle EFY=90^\circ, \text{ т.к.}$$

углы $\angle BFE$, $\angle CFY$, $\angle EFY$ в сумме дают 180°.

$\angle EFY=\angle EFX$, т.к. $X\in FY$. ~~т.к. $\cancel{Y \in FX}$, т.к. точки X, Y, F лежат на одной прямой~~.

$\angle EFX=90^\circ$ (т.к. $\angle EFY=90^\circ$)

т.к. точки E, F, X – лежат на ω, то $\angle EFX$ ~~опирается~~ опирается на диаметр $\omega \Rightarrow EX$ – диаметр ω.

и $\angle EDX=90^\circ$, т.к. точка D тоже лежит на ω

$\angle XDY=90^\circ$, как угол, смежный с $\angle EDX$ ~~$=90^\circ$~~.

т.к. $\angle EDX=90^\circ$ и $\angle XDY=90^\circ$, то $\triangle EXD$ – п/у с $\angle EDX=90^\circ$ и ~~$\triangle$ $\triangle XDY$~~ $\triangle XDY$ – п/у с $\angle XDY=90^\circ$.

по теореме Пифагора

$$\begin{cases}EX^2=ED^2+XD^2 \\ XY^2=DY^2+XD^2.\end{cases}$$

т.к. $EX=2\sqrt{2}\,XY$

$$\begin{cases}\cancel{EX^2=XY^2} \\ \\ \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

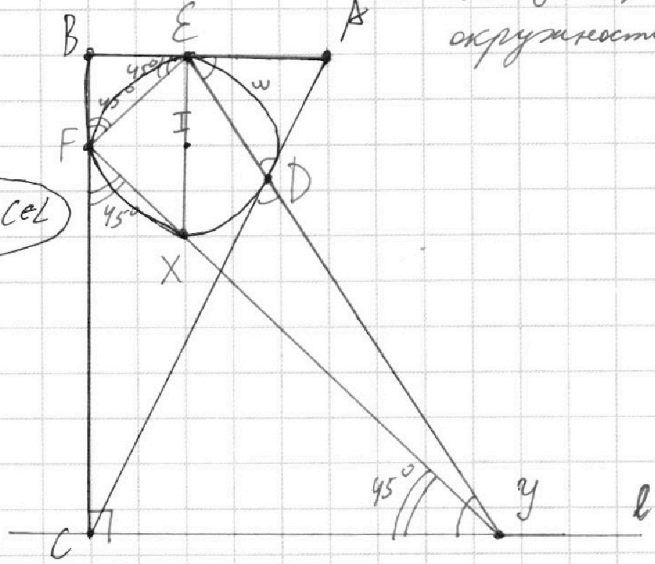
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7. ΔABC – треугольник ABC; р/б – равнобедренный
п/у – прямоугольный

I – центр окружности w

Дано: ΔABC –
w – вписанная окружность ΔABC;
$w \cap AC = D$; $w \cap AB = E$;
$w \cap BC = F$; ~~$E \perp BC$~~ прямая L, $L \perp BC$, $C \in L$
луч ED пересекает L в точке Y; $FY \cap w = \{F; X\}$;
$EX = 2\sqrt{2}\, XY$

AD/DC – ?



Заметим, что т.к. отрезки касательных из одной точки к одной окружности, равны, то $AE = AD$, $BE = BF$ и $CF = CD$.

Тогда ΔEAD – р/б с основанием ED, ΔBEF – р/б. с основанием EF и ΔFDC – р/б с основанием ~~FD~~. FD.

Тогда, углы AED и ADE равны ($\angle AED = \angle ADE$).

Так как $L \perp BC$, т.е. $YC \perp BC$, то $YC \parallel AB \Rightarrow \angle CYD = \angle AED$.

т.к. $\angle AED = \angle EDA$, и $\angle EDA = \angle CDY$ (как вертикальные углы), то $\angle AED = \angle EDA = \angle CYD = \angle YDC \Rightarrow \Delta CDY$ – р/б с основанием DY. $\Rightarrow CY = CD$

Т.к. $CF = CD$ (см. выше, почему) и $CY = CD$, то $CF = CY \Rightarrow \Delta FCY$ – р/б с основанием $FY \Rightarrow$ т.к $\angle FCY = 90^\circ$ (т.к. $CY \perp BC$), то $\angle CFY = \angle CYF = 45^\circ$, по сумме углов ΔCFY.

№7 продолжение 2.

т.к. $EX = 2\sqrt{2}\,XY$

$$\begin{cases} 8XY^2 = ED^2 + XD^2 \\ XY^2 = DY^2 + XD^2 \end{cases}$$

$$(ED^2 + XD^2) - (DY^2 + XD^2) = 7XY^2$$

$$ED^2 - DY^2 = XY^2 \cdot 7$$

Заметим, что $\triangle EDA \sim \triangle DYC$ (по $\angle AED = \angle DYC$ и $\angle EDA = \angle YDC$).

т.к. $CD = CY$ и $EA = AD$.

$$\frac{AD}{CD} = \frac{ED}{DY}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 Черновик.

$ab \vdots (3^{11} \cdot 7^{11})$; $bc \vdots 3^{18} \cdot 7^{16}$; $ac \vdots 3^{21} 7^{38}$

Очевидно, что если какие-то из чисел a, b, c кратны каким-то простым числам, кроме 3 и 7, то можно число a, b или c, делящееся на простое число, поделить на это простое число столько раз.

$$a = 3^{a_1} 7^{b_1}$$
$$b = 3^{a_2} 7^{b_2}$$
$$c = 3^{a_3} \cdot 7^{b_3}$$

25 33.

$a_1 = \cancel{8}\ 7$ $b_1 = 7.$

$a_2 = \cancel{10}\ 4$ $b_2 = 4.$

$a_3 = \cancel{20}\ 17$ $b_3 = 31$

Пример верх написать!

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \geq 11 \\ b_1 + b_2 \geq 11 \\ b_2 + b_3 \geq 16 \\ a_2 + a_3 \geq 18 \\ a_1 + a_3 \geq 21 \\ b_1 + b_3 \geq 38. \end{cases}$$

$$abc = 3^{a_1 + a_2 + a_3} \cdot 7^{b_1 + b_2 + b_3}.$$

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq (11 + 18 + 21)/3 = 7 + 6 + 3\tfrac{2}{3} = 16\tfrac{2}{3}.$$

$$b_1 + b_2 + b_3 \geq (11 + 16 + 38)/3 = (27 + 38)/3 = 65/3 = 32\tfrac{2}{3}.$$

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq 17$$

$$b_1 + b_2 + b_3 \geq 33.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

№5 $3x+2y=z$

$\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$. $\Rightarrow \frac{3}{x}=\frac{2}{z}-\frac{1}{y}=\frac{2y-z}{yz}$.

$\frac{3}{x}=\frac{-3x}{yz} \Rightarrow -x^2=yz$. $\Rightarrow$ y и z - разных по знаку

$\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2} = \frac{3(x^2-6y^2)+14y^2-z^2}{x^2-6y^2} = 3+\frac{14y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

$-(2y-z)^2-\cancel{4}yz$

если $z>0$. $y<0$. $3x+2y>0$. $x>0$.

$\frac{3}{x}+\frac{1}{y}>0$.

$\frac{3y+x}{xy}=\frac{2}{z}$. $\frac{3y+x}{xy}>0$

$3y+x=\frac{2}{z}\cdot xy$.

$\begin{cases} 3y+x<0 \\ 3x+2y>0 \end{cases}$

$2x-y>0$.

$y=-\frac{z}{4}$.

$-x^2=yz$

$-x^2=\frac{-z^2}{4}$.

$x^2=\frac{z^2}{4}$.

пусть $z=4$.

тогда $y=-1$.

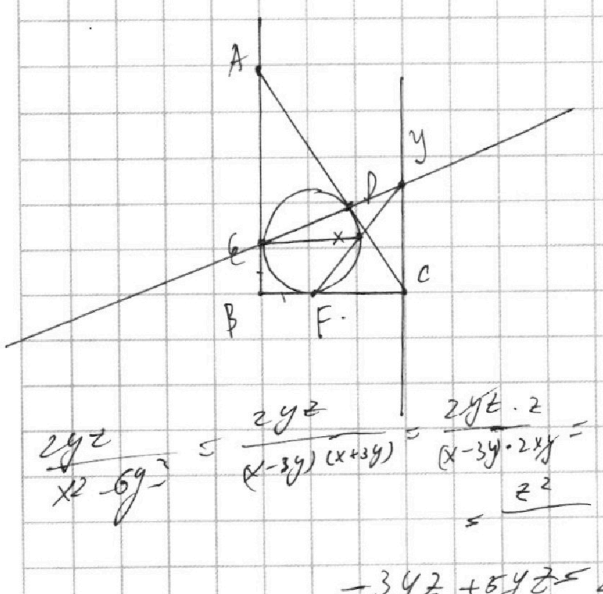
$3x+z=4$

$3x=6$

$x=2$.

$\frac{3\cdot4-4-16}{4-6}=\frac{-8}{-2}=4$

$\frac{3x-z}{2}=\frac{xz}{2x-3z}$.



$x=\frac{z-2y}{3}$.

$-\left(\frac{z-2y}{3}\right)^2=yz$.

$-4y^2-z^2+4yz=9yz$.

$-4y^2-z^2=5yz$.

$-(2y+z)^2=yz$.

$4y^2+5yz+z^2=0$

$(4y+z)(y+z)=0$.?

либо $y=-z$, либо $y=-\frac{z}{4}$.

$\frac{2yz}{x^2-6y^2}=\frac{2yz}{(x-3y)(x+3y)}=\frac{2yz\cdot z}{(x-3y)\cdot 2xy}=\frac{z z^2}{(x-3y)zx}=$

$=\frac{z^2}{}$

$-3yz+5yz=2yz$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик $\quad$ ~~D = 9 - 16~~ $4x^2 - 2x + 7 - 2\sqrt{\ldots\ldots} = 16x^2$

$3x + 2y = 2.$

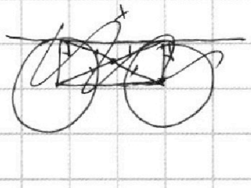
$48 \times 48 = 2304$

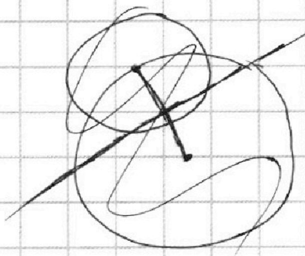
№2 $\quad \frac{a}{b}$ – несократима, т.е. $(a; b) = 1.$

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}$$

$a + b \,\vdots\, m$

$((a-b)^2 + 6ab) \,\vdots\, m.$

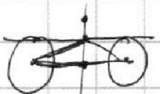




$\sqrt{\frac{R^2 - r^2}{2}}.$

$a + b \,\vdots\, m$

$((a+b)^2 - 10ab) \,\vdots\, m$



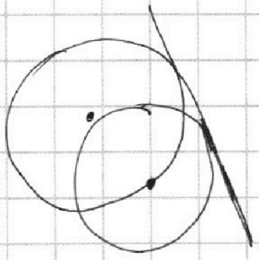
$\begin{cases} 10ab \,\vdots\, m. \\ a + b \,\vdots\, m. \end{cases}$ $\quad$ ~~$a \not\vdots\, m$ и $b \not\vdots\, m$.~~

$d^2 - r^2.$

если $(a; m) = x$, ~~ра~~ и $x \neq 1$ то и $b \,\vdots\, x$, это проблема

$(a; m) = 1$

$(b; m) = 1.$



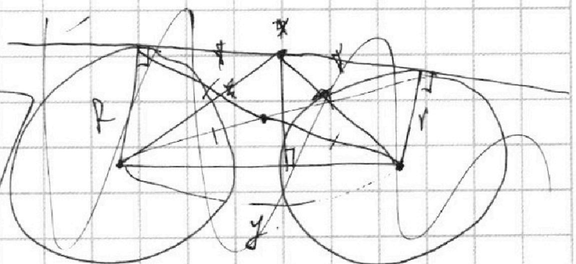
$\Downarrow$

$10 \,\vdots\, m.$

$\Downarrow$

$m \leq 10.$

$\boxed{48^2 - 540 \cdot 4 = \\ = 2304 - 2160 = \\ = 144. = 12^2.}$



$S = x \cdot \frac{r + R}{2}.$

$S =$

$48 \times 6 = 288$

$288 + 36 = 294 + 30 = 324.$

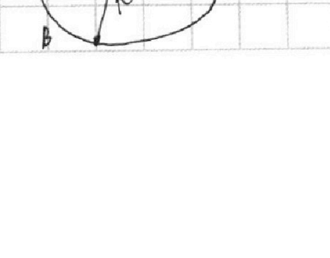
Пример: $a = 7;\ b = 3.$

$$\frac{10}{49 + 9 - 8 \cdot 21} = \frac{10}{58 - 168} = \frac{10}{-110}$$

$8 \cdot 21 = 160 + 8 = 168$

$324 : 3 = 108$

№9.



$2R - x = 16$

$x = 1.$

$\Downarrow$

$R = 8{,}5.$

$r = \sqrt{8{,}5^2 - 7{,}5^2}$

$r = \sqrt{1 \cdot 16}$

$r = 4.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

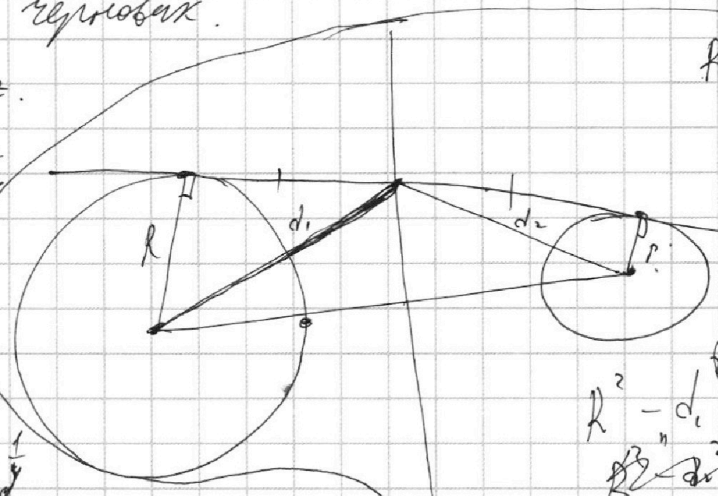
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 черновик.

$3x+2y=z$.

$\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$.



$\frac{3}{x}=\frac{2}{z}-\frac{1}{y}$

$\frac{3}{x}=\frac{2y-z}{yz}$.

$\frac{3}{x}=\frac{-3x}{yz}$.

$-x^2=yz$.

м. v_1 и v_2 в км/ч.

$R;\ r;\ y$.

$$\begin{cases} \frac{S}{v_1}=\frac{S}{v_2}-2 \\ \frac{S}{v_1}\cdot v_2+96=\frac{S}{v_2}\cdot v_1 \\ \frac{S}{v_1+6}=\frac{S}{v_2+6}-1{,}25 \end{cases}$$

$\frac{v_2}{v_1}S+96=\frac{v_1}{v_2}S$.

$96=S\left(\frac{v_1^2-v_2^2}{v_1v_2}\right)$.

$2=\frac{S}{v_2}-\frac{S}{v_1}$

$2=S\cdot\frac{v_1-v_2}{v_1v_2}$.

$48=v_1+v_2$.

$1{,}25S$

$R^2-d_1^2$

$r^2-d_2^2$

$-R^2+d_1^2=-r^2+d_2^2$

$\cancel{R^2-r^2=d_1^2-d_2^2}$.

$d_1^2-R^2=d_2^2-r^2$.

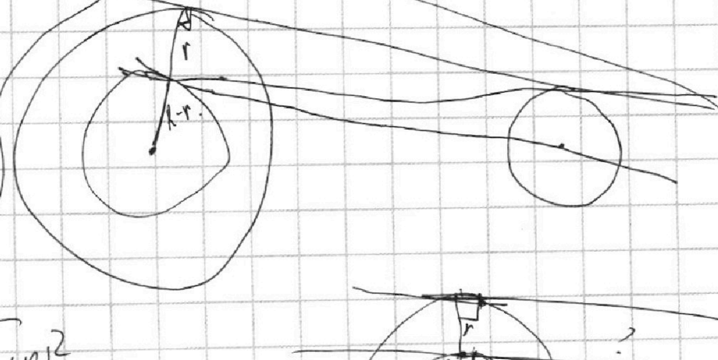
$d_1^2-d_2^2=R^2-r^2$.

$2\sqrt{-R^2+d_1^2}$

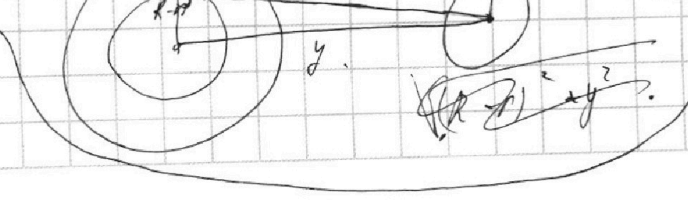
$(d_1^2-R^2)(d_2^2-r^2)$.

$(d_1^2-R^2)($

$\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$



$\sqrt{y^2-(R+r)^2}$.



$\sqrt{(R-r)^2+y^2}$.