

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{300}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырехугольника $BXFY$, если $BF = 17$, $XY = 31$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$$

$$\begin{aligned} a &= x^3+4 \\ b &= x^2-1 \end{aligned} \Rightarrow |a| + |b| \leq |a-b|$$

Для действительных чисел a, b справедливо $|a \pm b| \leq |a| + |b|$

в частности $|a| + |b| \geq a-b, b-a$ т.е. $|a| + |b| \geq |a-b|$

$$\text{тогда } |a-b| \leq |a| + |b| \leq |a-b| \Rightarrow |a| + |b| = |a-b|$$

Числа a и $-b$ не должны быть одной полноты и opposite.

чисел. Т.к. в противном случае $|a-b| < |a| + |b|$.

Это условие необходимо и достаточно.

Тогда у нас 2 варианта.

$$\text{I. } \begin{cases} x^3+4 \geq 0 \\ x^2-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+4 \geq 0 \\ x \in [-1; 1] \end{cases} \text{ все } x \in [-1; 1] \text{ подходят под } x^3+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$$

$$\text{II. } \begin{cases} x^3+4 \leq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \leq -4 \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \sqrt[3]{-4} \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4}]$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4}] \cup [-1; 1]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть q - знаменатель прогрессии.
 $b = aq$ $c = aq^2$ $ac = a^2q^2 = b^2 \Rightarrow abc = b^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$

$$b = 2^{50} \cdot 3^{100} \quad b^2 = 2^{100} \cdot 3^{200} \quad ac = 2^{100} \cdot 3^{200} \quad a, c \in \mathbb{N}$$

поэтому $a = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$ (других множителей нет)

$$c = 2^{100-\alpha} \cdot 3^{200-\beta} \quad \alpha \in \{0, 1, 2, \dots, 100\}, \beta \in \{0, 1, 2, \dots, 200\}$$

И при любом выборе α и β числа a, b, c будут обр.

$$\text{геом. прогрессии} \quad \text{т.к. } q = \frac{b}{a} = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}} = 2^{50-\alpha} \cdot 3^{100-\beta}$$

$$\text{и } q = \frac{c}{b} = \frac{2^{100-\alpha} \cdot 3^{200-\beta}}{2^{50} \cdot 3^{100}} = 2^{50-\alpha} \cdot 3^{100-\beta} \quad \text{И очевидно при } (\alpha_1, \beta_1) \neq$$

$(\alpha_2, \beta_2) / 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \neq 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2}$, поэтому все 3-ки различны

Заметим, что если вместо α взять $100-\alpha$, а вместо β взять $200-\beta$, то тройки чисел получатся одинаковыми.

Поэтому если мы рассмотрим все $101 \cdot 201$ тройки для всех этих 3-ек a, b, c (кроме $a=b=c=2^{50} \cdot 3^{100}$) найдем 3-ку c, b, a .

$$\text{Тогда кол-во различных 3-к: } \frac{101 \cdot 201 - 1}{2} =$$

$$= 10150$$

Ответ: 10150

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$x^2(y-2) - x((y-2)13-1) + (y-2)44 - 6 = 0 \quad y-2 = a \in \mathbb{Z}$$

$$ax^2 - (13a-1)x + 44a - 6 = 0$$

$$D = 169a^2 - 26a + 1 - 4a(44a-6) = -7a^2 - 2a + 1 \quad D \geq 0$$

$$7a^2 + 2a - 1 \leq 0 \quad a = \frac{-2 \pm \sqrt{32}}{14}$$

$$a \in \left[\frac{-2 - \sqrt{32}}{14}; \frac{-2 + \sqrt{32}}{14} \right]$$

$$\frac{-2 - \sqrt{32}}{14} > \frac{-2 - \sqrt{36}}{14} = \frac{-8}{14} = -\frac{4}{7}$$

$$\frac{-2 + \sqrt{32}}{14} < \frac{-2 + \sqrt{36}}{14} = \frac{4}{7}$$

Тогда $-\frac{4}{7} < a < \frac{4}{7}$ и a - целое

$$\Rightarrow a = 0 \quad y = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2(2-2) - x(26-27) + 88 - 94 = 0$$

$$x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

Ответ: $x = 6$; $y = 2$.

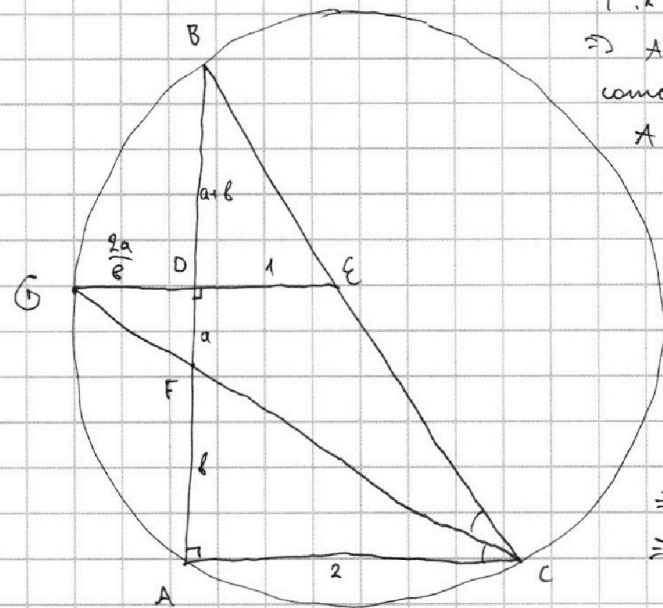
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. CG - бис-са $\widehat{AG} = \widehat{GB}$
 $\Rightarrow AG = GB$, GD - медиана \Rightarrow высота
 $GE \perp AB$, но $GE \parallel AC$ (ч. линия)
 $AB \perp AC$. Сопоставим либо рас-
 таянем конструкцию так,
 что $AC = 2$, $DE = 1$.

Пусть $AF = b$; $DF = a$; $DB = a + b$
 $\triangle GDF \sim \triangle AFC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{GD}{2}$ $GD = \frac{2a}{b}$

$$S_{FBC} = 16 S_{DGF} = 2a + b = 16 \frac{a^2}{b}$$

$$\Rightarrow 2ab + b^2 = 16a^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 17a^2$$

$$(a+b)^2 = (\sqrt{17}a)^2$$

$$a+b = \sqrt{17}a \quad b = \sqrt{17}a - a$$

E - центр диаметра BC - центр окр.

$$EC = EG = \frac{2a+b}{b} \quad BC = \frac{4a+2b}{b} \quad BE = \frac{2a+b}{b}$$

По т. Пиф для $\triangle DBE$ $(a+b)^2 + 1 = \left(\frac{2a+b}{b}\right)^2$

$$17a^2 + 1 = \left(\frac{\sqrt{17}a + a}{\sqrt{17}a - a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{17} + 1}{\sqrt{17} - 1}\right)^2$$

$$17a^2 = \left(\frac{\sqrt{17} + 1}{\sqrt{17} - 1} - 1\right) \left(\frac{\sqrt{17} + 1}{\sqrt{17} - 1} + 1\right) = \frac{2}{\sqrt{17} - 1} \cdot \frac{2\sqrt{17}}{(\sqrt{17} - 1)^2}$$

$$a^2 = \frac{4\sqrt{17}}{(\sqrt{17} - 1)^2 \sqrt{17}} \Rightarrow a = \frac{2}{(\sqrt{17} - 1)\sqrt{17}} \quad b = a(\sqrt{17} - 1) = \frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$a+b = \frac{2\sqrt{17}}{(\sqrt{17} - 1)\sqrt{17}}$$

$$2a+2b = AB = \frac{4\sqrt{17}}{(\sqrt{17} - 1)\sqrt{17}}$$

Ответ: $\angle A = 90^\circ$; $\angle C = \arccos \frac{2\sqrt{17}}{(\sqrt{17} - 1)\sqrt{17}}$; $\angle B = \arccos \frac{2\sqrt{17}}{(\sqrt{17} - 1)\sqrt{17}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

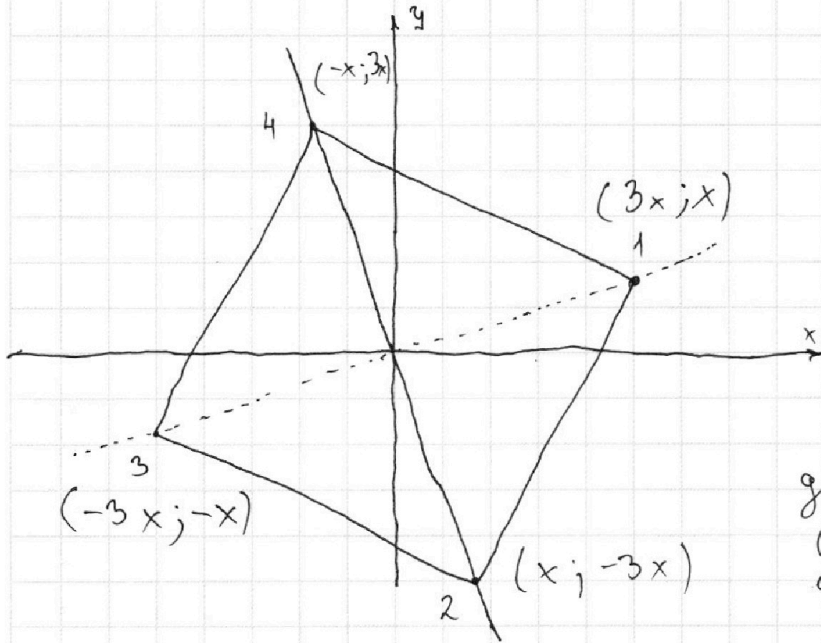
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Проведем прямую $y = \frac{x}{3}$

Она \perp $y = -3x$
 поскольку можно
 представить это
 как поворот OY и OX
 на $\arctan \frac{1}{3}$ градус.

Тогда 2-ая
 диагональ лежит на ней
 (все т. на одн. расст от
 центра, т.к. центр квадрата)

Прокномерим вершины. Пусть у 1 координаты $(3x; x)$ ($x > 0$)
 Тогда у 2 $(x; -3x)$. у 3 $(-3x; -x)$. у 4 $(-x; 3x)$

То есть они все лежат на $y = x^5 + ax$. Тогда:

$$1) x = 243x^5 + 3ax$$

$$1 = 243x^4 + 3a$$

$$2) -3x = x^5 + ax$$

$$-3 = x^4 + a$$

$$x^4 = -3 - a$$

$$0 = -1 + 243(-3-a) + 3a = -730 - 240a \quad \Rightarrow \quad 73 + 24a = 0$$

$$a = \frac{-73}{24} = -3 - \frac{1}{24}$$

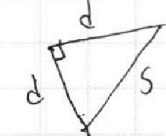
$$x^4 = \cancel{-3} -3 + 3 + \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$$

т.к. $x > 0$ $x = \frac{1}{\sqrt{24}}$

$$d = \sqrt{\frac{9}{24} + \frac{1}{24}} = \sqrt{\frac{10}{24}} = \sqrt{\frac{5}{12}}$$

$$S = \sqrt{\frac{5}{12} + \frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

Ответ: $a = \frac{-73}{24}$; сторона = $\sqrt{\frac{5}{6}}$





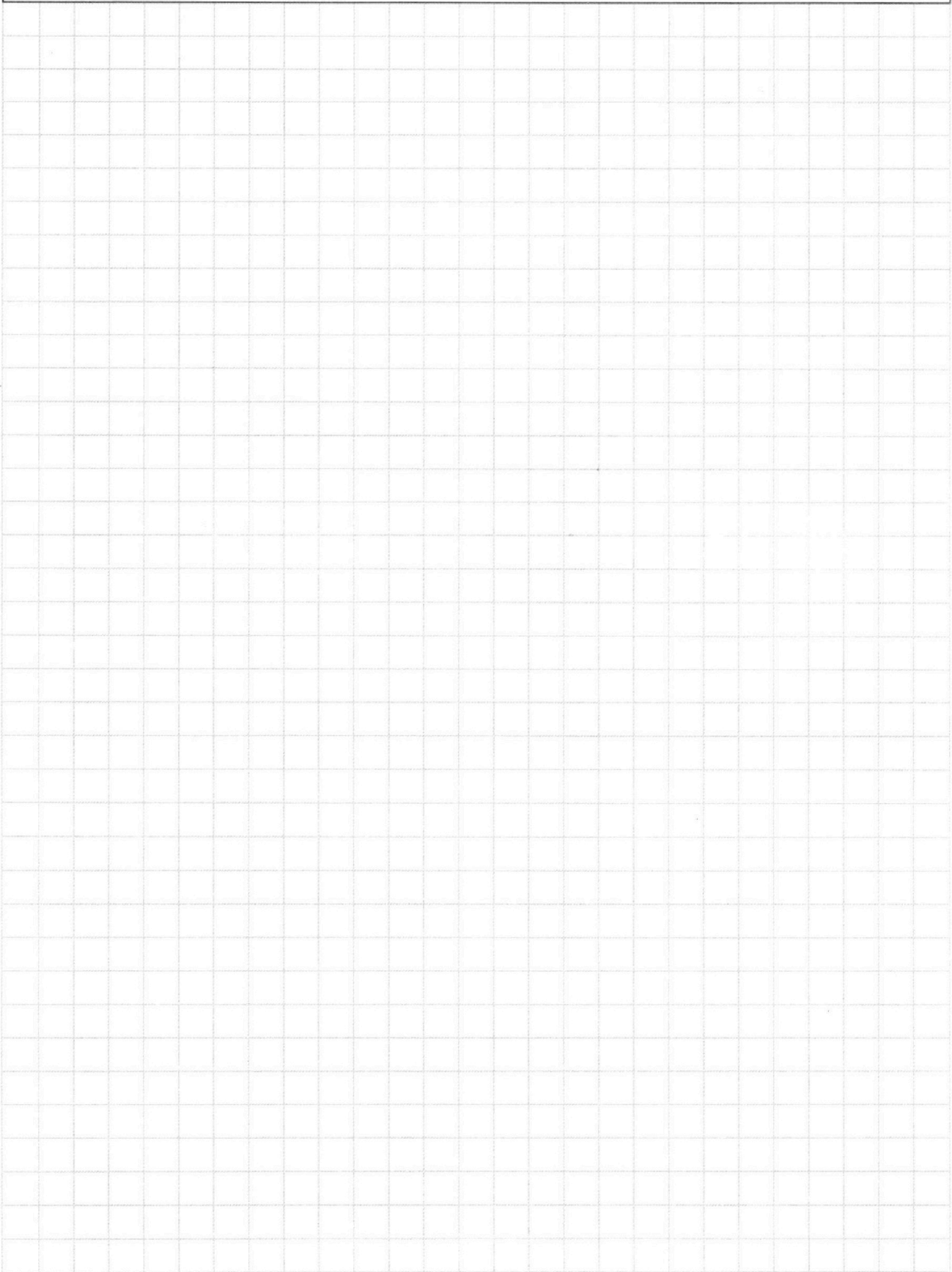
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



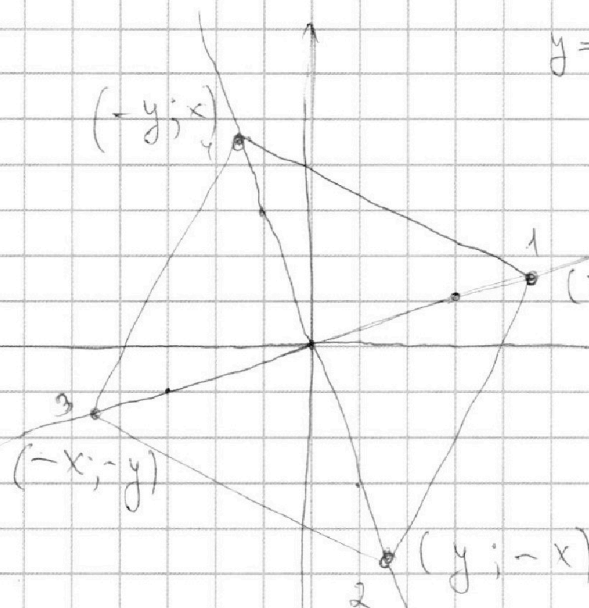
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = x^5 + ax \quad y = 3x$$

$$\begin{aligned} 1) & y = x^5 + ax \\ 2) & -x = y^5 + ay \\ 3) & -y = -x^5 - ax \\ 4) & x = -y^5 - ay \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) & 3x = x^5 + ax \\ 2) & -3x = 3^5 x^5 + a3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 &= x^4 + a \\ -1 &= 3^5 x^4 + 3a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 &= 3 - a & 3^5 &= 243 \\ & & 243 & \\ & & \underline{3} & \\ & & 729 & \end{aligned}$$

$$-1 = 243(3 - a) + 3a$$

$$\begin{aligned} +0 &= 1 + 729 - 243a + 3a \\ 0 &= 730 - 240a \\ 0 &= 73 - 24a \end{aligned}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

abc - ?
a, b, c - разн.

a - max

$$a = b$$

$$a + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{c}$$

$$a + \frac{5}{b} = 5$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

$$\begin{aligned} abc &= \left(5 - \frac{5}{b}\right) \left(5 - \frac{5}{c}\right) \left(5 - \frac{5}{a}\right) \\ &= 5^3 - \frac{5^2 5}{a} + \frac{5 \cdot 25}{ab} - \frac{5^3}{abc} \end{aligned}$$

$$a - b > 0 \quad \frac{5}{c} - \frac{5}{b} > 0$$

$$\begin{array}{r} \frac{5}{c} > \frac{5}{b} \\ \begin{array}{r} 101 \\ 201 \\ \hline 101 \\ 202 \\ \hline 20301 \end{array} \end{array}$$

$$20300 : 2 = 10150$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

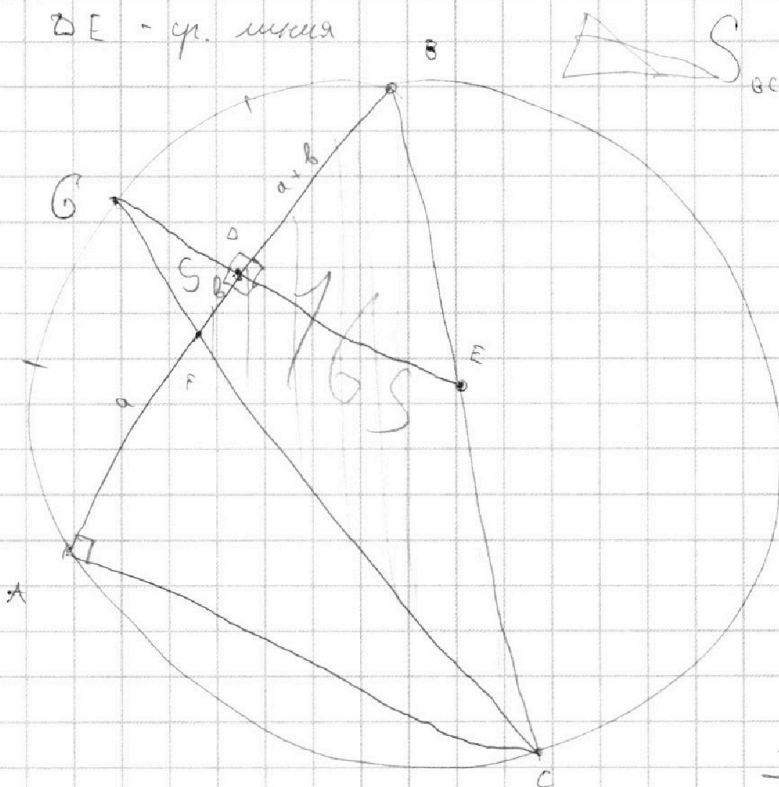
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle E$ - ср. линия



$$S_{ABC} = 16 S_{GEF}$$

$$\frac{16S}{2b+a} = \frac{S_{ABC}}{a}$$

$$\frac{S}{S_{ABC}} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

$$S_{ABC} = \frac{16S \cdot a}{2b+a}$$

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{S}{S_{ABC}}$$

$$\frac{16a}{2b+a} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$16a^3 = (2b+a)b^2$$

$$16 \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{2b+a}{a}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{h}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{h}{e}$$

$$(2a+b)h = 16 \cdot \frac{a^2 h}{b}$$

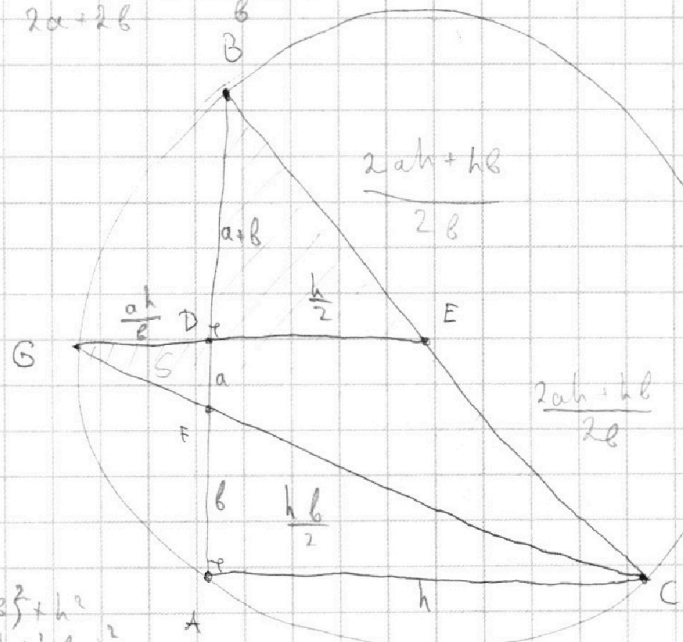
$$2a+b = 16 \cdot \frac{a^2}{b}$$

$$2ab + b^2 = 16a^2$$

$$\frac{S_{ABC}}{2b} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{\sin a}{a} = 2r$$

$$\frac{\sin C}{2a+2b} = \frac{2ah+hb}{2b}$$



$$\frac{(a+b)^2 + h^2}{b} = \frac{2ah+hb}{b}$$

$$\frac{a^2 h b^2}{2b} = \frac{a^2 h b}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

$$(13y - 27) \cdot 4 + 2y + 14 - 108$$

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0 \quad 44y - 94 : x$$

$$y(x^2 - 13x + 44) - 2x^2 + 27x + 44y - 94 = 0$$

$$y(x^2 - 13x + 44) = 2x^2 - 27x + 94$$

$$2x^2 - 26x + 88 = 2x^2 - 27x + 94 \quad 19^2 - 19(12) +$$

$$88 = 94 - x \quad x = 6 \quad y = 2$$

$$y - 2 = a$$

$$x^2(y-2) - x(13(y-2)-1) + 44(y-2) - 6 \quad a=1 \quad x=19$$

$$ax^2 - x(13a-1) + 44a - 6 = 0 \quad 44a - 6 : x$$

$$ax^2 - 13ax + x + 44a - 6 = 0 \quad 6 - x : a$$

$$a(x^2 - 13x + 44) = 6 - x \quad 2(22a - 3) : x$$

$$x = \frac{13a - 1 \pm \sqrt{169a^2 - 26a + 1 - 4a(44a - 6)}}{2a}$$

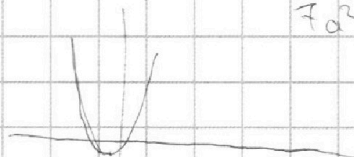
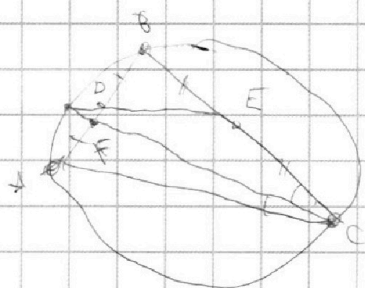
$$\begin{aligned}
 160 + 16 &= 176 \\
 160a^2 - 176a^2 - 26a + 24a + 1 \\
 &= -16a^2 - 2a + 1 \\
 &= -(7a^2 + 2a - 1)
 \end{aligned}$$

$$x = \frac{13a - 1 \pm \sqrt{169a^2 - 26a + 1 - 4a(44a - 6)}}{2a}$$

$$7a^2 + 2a - 1 \leq 0$$

$$\frac{-1}{2a}$$

$$-1 \quad \frac{-2}{14}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a \quad a^2 \quad a^3$$

$$16 \cdot 1.5 = 24$$

$$a^3 \cdot a^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$24 \cdot 1.5 = 24 + 12 = 36$$

$$16 \quad 24 \quad 36$$

$$b^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$b = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 2^{100} \cdot 3^{200}$$

$$a \quad 2^{50} \cdot 3^{100} \quad c$$

$$ac = 2^{100} \cdot 3^{200}$$

$$a = 2^x \cdot 3^y$$

$$c = 2^{100-x} \cdot 3^{200-y}$$

$$x = 0, \dots, 100$$

$$y = 0, \dots, 200$$

$$y = 0, 200$$

$$2^x \cdot 3^y$$

$$2^{50-x} \cdot 3^{100-y}$$

$$2^{100-x} \cdot 3^{200-y}$$

$$2^{50} \cdot 3^{100}$$

$$2^{50-x} \cdot 3^{100-y}$$

$$|x^2+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$$

$$2^{100-x}$$

$$|a-b| \leq |a| + |b| \leq |a-b|$$

$$a \leq 0 \quad b \leq 0$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|a| + |b| = |a-b|$$

$$-a-b, +a+b \leq |a| + |b|$$

$$a \leq 0 \quad b \geq 0$$

$$b-a, a-b \leq |a| + |b|$$

$$|a-b| \leq |a| + |b| \leq |a-b|$$

$$\begin{cases} x^3+4 \geq 0 \\ x^2-1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} x^3+4 \leq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases}$$

IV II

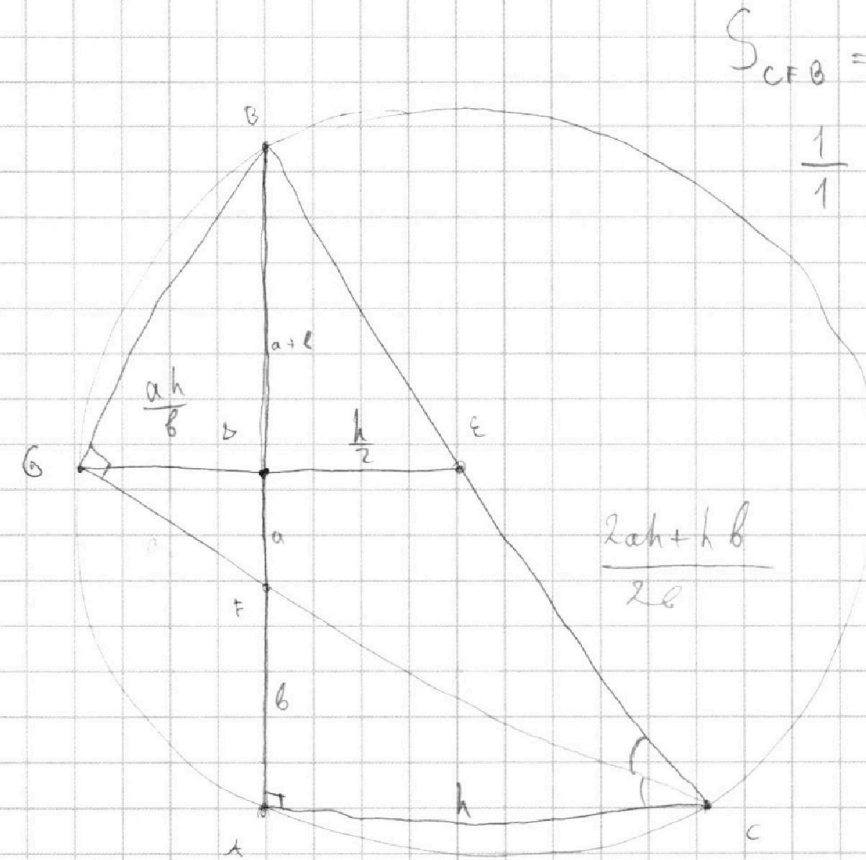
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{CEB} = 16 S_{DGF}$$

$$\frac{1}{1} \frac{a+b}{a} \frac{GF}{GF+FC} = 1$$

$$(a+b)GF = aGF + aFC$$

$$\frac{b}{a} \frac{\frac{a}{b}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

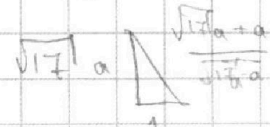
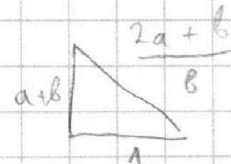
$$(2a+b)h = 16 \frac{a^2 h}{b}$$

$$2a+b = \frac{16a^2}{b} \quad a^2 + 2ab + b^2 = 16a^2 + a^2$$

$$(a+b)^2 = (\sqrt{17}a)^2$$

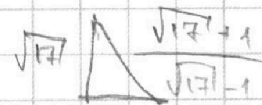
$$a+b = \sqrt{17}a$$

$$b = \sqrt{17}a - a$$



$$17a^2 + 1 = 17a^2$$

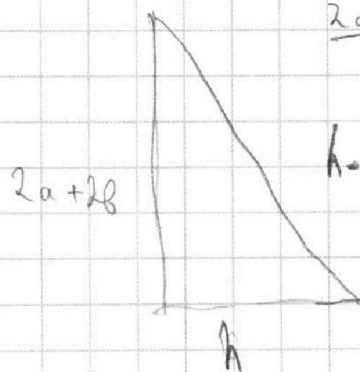
$$h \cdot \frac{\sqrt{17}a + a}{\sqrt{17}a - a}$$



$$\frac{1}{a}$$

$$17 + \frac{1}{a^2} = \frac{17 + 2\sqrt{17} + 1}{17 - 2\sqrt{17} + 1}$$

$$\frac{17a^2 + 1}{a^2}$$



$$\frac{2ah+hb}{b}$$

$$h \cdot \frac{2a+b}{b}$$

$$\pm a \pm b \leq |a| + |b|$$

$$2a + 2a\sqrt{17}$$