МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(1) $ab \,\vdots\, 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ $\qquad a = a' \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5}$, $a' \not\vdots\, 2,3,5$

(2) $bc \,\vdots\, 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$ $\qquad b = b' \cdot 2^{\beta_2} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\beta_5}$ $\quad b' \not\vdots\, 2,3,5$

(3) $ca \,\vdots\, 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$. $\qquad c = c' \cdot 2^{\gamma_2} \cdot 3^{\gamma_3} \cdot 5^{\gamma_5}$. $\quad c' \not\vdots\, 2,3,5$.

из (1), (2) и (3) следует:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 7 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 13 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 14 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 15 \\ \gamma_3 + \alpha_3 \geq 17 \end{cases} \quad (*) \begin{cases} \alpha_5 + \beta_5 \geq 14 \\ \beta_5 + \gamma_5 \geq 18 \\ \gamma_5 + \alpha_5 \geq 43 \end{cases}$$

сложим все строки в системах и поделим пополам

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 17$$

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 21{,}5$$

$$\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 \geq 37{,}5.$$

т.к. все переменные ~~целые~~ неотрицательные ~~натуральные~~ числа, то

$\min(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) = 17$, $\min(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) = 22$,

$\min(\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5) = 38$.

$$abc = a'b'c' \cdot 2^{(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)} \cdot 3^{(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3)} \cdot 5^{(\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5)}.$$

минимальное значение a', b' и c' равно 1.

продолжение → на след. стр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

минимально ~~за~~ вхождение степеней 2, 3 и 5 в abc мы нашли ранее, значит

$$abc \geq 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{38}.$$

~~пример, при котором достигается равенство:~~

$$\cancel{a = 2^{4}\cdot 3^{7}\cdot 5}$$
$$\cancel{b = 2^{3}\cdot 3^{5}\cdot 5}$$
$$\cancel{c = 2^{10}\cdot 3^{10}\cdot 5}$$

~~для 2 и 3~~ для степеней 2 и 3 можно найти пример, но для 5 возникает противоречие, т.к ~~[illegible]~~ в системе (*) достигается равенство при отрицательных $\alpha_5, \beta_5, \gamma_5$, а они по условию ~~натуральны~~ как минимум неотрицательны.

$$(*)\ \begin{cases} \alpha_5+\beta_5 \geq 14 \\ \beta_5+\gamma_5 \geq 18 \\ \gamma_5+\alpha_5 \geq 43. \end{cases} \Big| +$$

$$\underbrace{\alpha_5+\beta_5+\beta_5+\gamma_5}_{\geq 43} \geq 32$$

$$\alpha_5+\beta_5+\gamma_5 \geq 43.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3 стр. из 3

Получаем новую оценку:

$$abc \geqslant 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{\cancel{33}\,43}.$$

Пример:

$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{20}$

$b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^0$

$c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{23}$

Нетрудно проверить, что для этих a, b и c выполняется условие и достигается равенство.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$5\arccos(\sin x)=\frac{3\pi}{2}+x$$

$$5\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin(\sin x)\right)=\frac{3\pi}{2}+x$$

$$\frac{5\pi}{2}-5\arcsin(\sin x)=\frac{3\pi}{2}+x$$

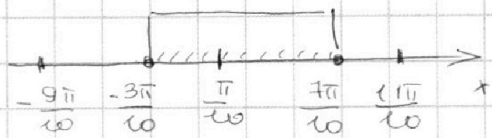
$$\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}-x=\arcsin(\sin x)$$

$$\frac{\pi}{5}-x=\arcsin(\sin x)$$

$$\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{5}-x\le\frac{\pi}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{5}-x\right)=\sin x\end{cases}\qquad -\frac{\pi}{2}\le x-\frac{\pi}{5}\le\frac{\pi}{2}\qquad -\frac{3\pi}{10}\le x\le\frac{7\pi}{10}$$

$$\begin{cases}x\in\left[-\frac{3\pi}{10};\frac{7\pi}{10}\right] \\ \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{5}-x=x+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\qquad x=\frac{\pi}{10}-\pi k \\ \frac{\pi}{5}-x=\pi-x+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\qquad \varnothing\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\in\left[-\frac{3\pi}{10};\frac{7\pi}{10}\right] \\ x=\frac{\pi}{10}-\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$



Ответ: $\frac{\pi}{10}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cancel{-\frac{5\sqrt{24}}{24} < -\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{24}}{24}}$$

$$\cancel{\left\{ -\frac{1}{3a} < \frac{5\sqrt{24}}{24} \right.}$$

$$\left[\begin{array}{lll} a>0: & \dfrac{1}{3a} < \dfrac{5\sqrt{24}}{24} & a > \dfrac{\sqrt{24}}{15} \\ a<0: & -\dfrac{1}{3a} < \dfrac{5\sqrt{24}}{24} & a < -\dfrac{\sqrt{24}}{15} \end{array}\right.$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{24}}{15}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{24}}{15}; +\infty\right)$.

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ \underbrace{(x^2+14x+y^2+45)}_{(1)}\underbrace{(x^2+y^2-9)}_{(2)} = 0 \end{cases}$$

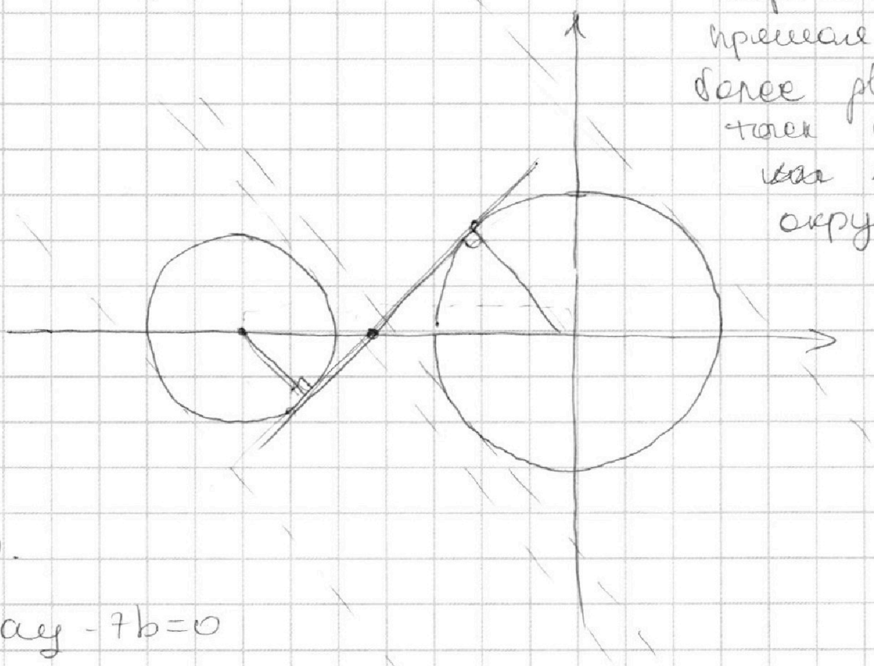
(1) $(x+7)^2 + y^2 = 2^2$

(2) $x^2+y^2 = 3^2$

если $a=0$:

$x = 7b$

вертикальная прямая, не более двух общих точек с ~~графиком~~ ~~окружностей~~ окружностями.



$a \neq 0$.

$x + 3ay - 7b = 0$

$y = \dfrac{-(x-7b)}{3a}$

$7b = p$ каждому значению p и q соответствует од. значение a и b.

$-\dfrac{1}{3a} = q$

$y = q(x-p)$ — прямая с ~~углом~~ наклоном q, пересекающая ось x в точке p.

~~[illegible]~~ Найдём q, при которых ~~существует~~ прямую можно поместить так, чтобы она пересекала обе окружности.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$6x = t$ ОДЗ: $t > 0,\ y > 0\quad (6x)^2 \neq 1,\ y^2 \neq 1$

$$\log_7^4 t - 2\log_t 7 = \frac{3}{2}\log_t 7 - 4$$

$$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \frac{5}{2}\log_y 7 - 4$$

$$\log_7^4 y + 4 = -\frac{7}{2\cdot\log_7 y}$$

$$\log_7^4 t + 4 = \frac{7}{2\cdot\log_7 t}$$

$$\log_7^5 t + 4\log_7 t = \frac{7}{2}$$

$$\log_7^5 y + 4\log_7 y = -\frac{7}{2}$$

$\log_7 t = a$, $\log_7 y = b$ каждому из значений a и b соответствуют ед. зн. t и y.

~~$a^5 + b^5 + 4a + 4b = 0$~~

(1) $a^5 + a = \frac{7}{2}$

(2) $b^5 + b = -\frac{7}{2}$

в каждом выражении возрастающая функция равна константе, следовательно един. ед. решение.

если в (1) уравнении a_0 является решением, то $(-a_0)$ — является решением второго уравнения, значит ~~сумма а~~ сумма a и b, удовлетворяющих уравнениям равна 0, других решений быть не может

→ продолжение

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2 стр. из 2.

из-за ~~возрастание~~ того, что функция возраст.

$\log_7 z + \log_7 y = 0$

$\log_7 zy = 0 \qquad zy = 1$

$6xy = 1$

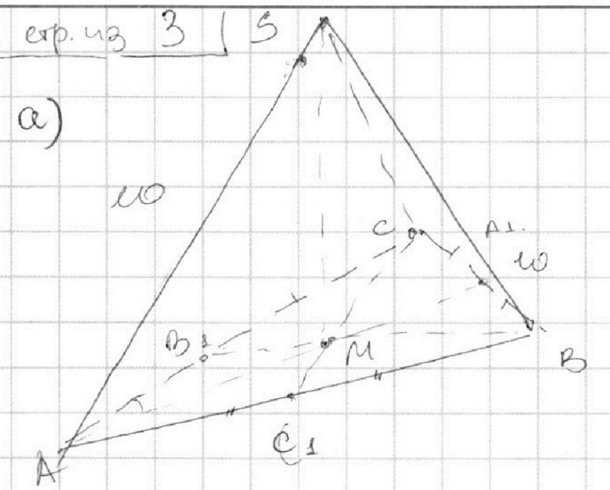
$xy = \frac{1}{6}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

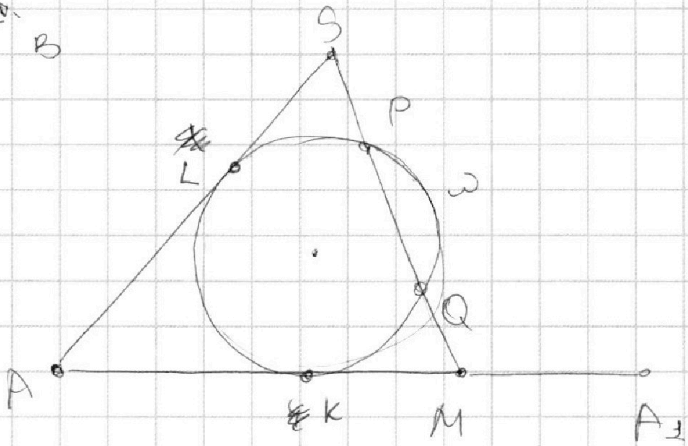
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

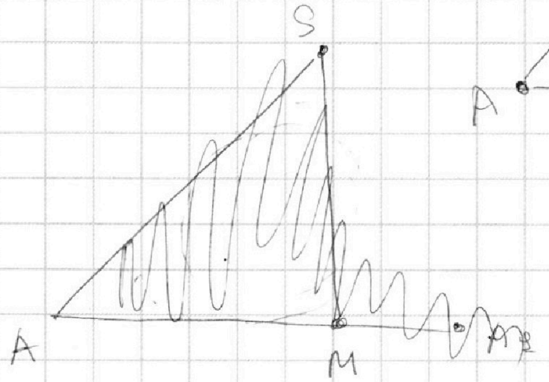
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

а)



∡ пл. ASM





$SP = MQ \Rightarrow$ ~~Pсм Рст~~

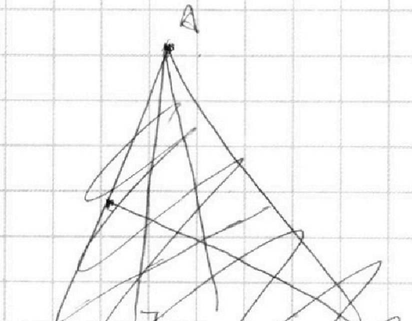
$(P^S_\omega = P^M_\omega) \Rightarrow (SL = KM)$

$\Rightarrow (AM = AS = 10)$

$AA_1 = \frac{3}{2} AM = 15.$

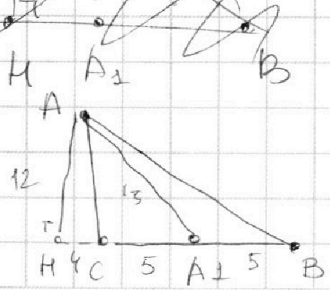
Высота AH в тр. ABC $= \frac{2S_{ABC}}{BC} =$

$= 12.$



Без ограничения общности
Пусть H лежит ~~на~~ на луче A_1C

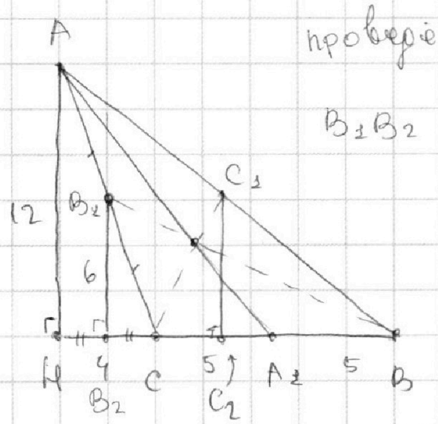
$HA_1 = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = \sqrt{225-144} = 9.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



проведём ср. линию ~~...~~

B_1B_2 в $\triangle ACH$

$B_1B_2 \perp BC$, $B_1B_2 = \frac{AH}{2} = 6$

$CB_2 = \frac{CH}{2} = 2$ $BB_2 = 10 + 2 = 12$

по т. Пифагора:

$BB_1 = \sqrt{B_2B_1^2 + B_2B^2}$, $BB_1 = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$

C_1C_2 – ср. линия в $\triangle ABH$, $C_1C_2 = \frac{AH}{2} = 6$

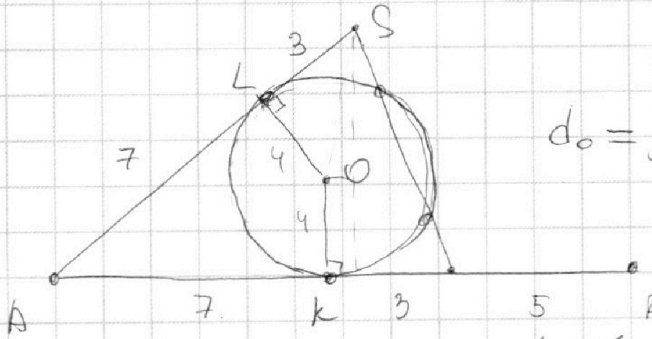
~~...~~ $BC_2 = \frac{BH}{2} = 7$, $CC_2 = BC - BC_2 = 3$

по т. Пифагора $CC_1 = \sqrt{CC_2^2 + C_2C_1^2}$

$CC_1 = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$

~~...~~ $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 6\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 15^2 \cdot 6 = 1350$

б) $SN = 3 \Rightarrow SL = 3$



$\rho(A; BC) = AH = 12$

$d_0 = \rho(K; BC) = \frac{KA_1}{AA_1} \cdot \rho(A; BC) =$

$= \frac{8 \cdot 12}{7}$.

~~...~~

~~по т. Пифагора~~
~~$\rho(O; BC)^2 = d_0^2 + OK^2$~~

~~O – центр~~

~~б) Сечение в двугранный угол при ребре BC, значит~~

OBC – биссекторная плоскость для двугранного угла при ребре BC, значит угла между ABC и OBC – половина искомого.

$$\cancel{tg(\angle(OBC; ABC)) = \frac{OK}{\rho(K, BC)} = \frac{4\cdot 7}{8\cdot 12} = 7}$$

$$tg(\angle(OBC; ABC)) = \frac{OK}{\rho(BC; K)} = \frac{4\cdot 7}{8\cdot 12} = \frac{7}{24}.$$

$$tg(2\angle(OBC; ABC)) = \frac{\left(\frac{7}{24}\right)}{1-2\left(\frac{7}{24}\right)^2} = \frac{7}{24}\cdot\frac{1}{1-\frac{49}{288}} =$$

$$= \frac{7}{24}\cdot\frac{288}{239} = \frac{7\cdot 12}{239} = \frac{84}{239}$$

Ответ: $arctg\left(\frac{84}{239}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

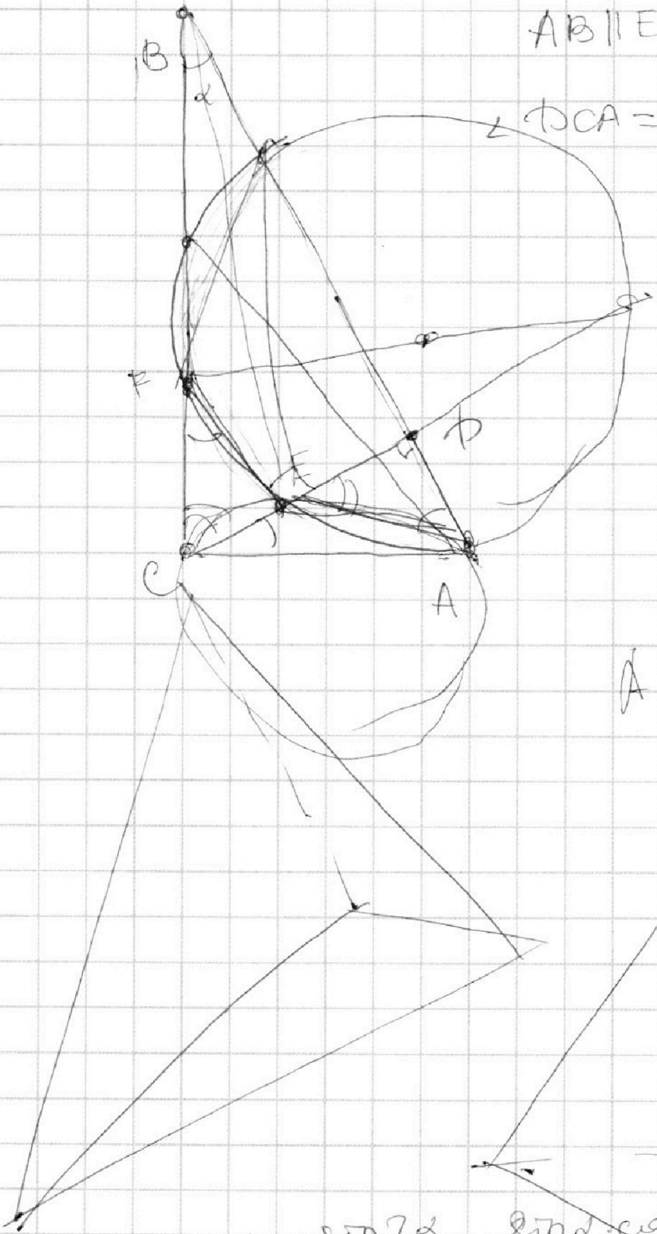
1 2 3 4 5 6 7

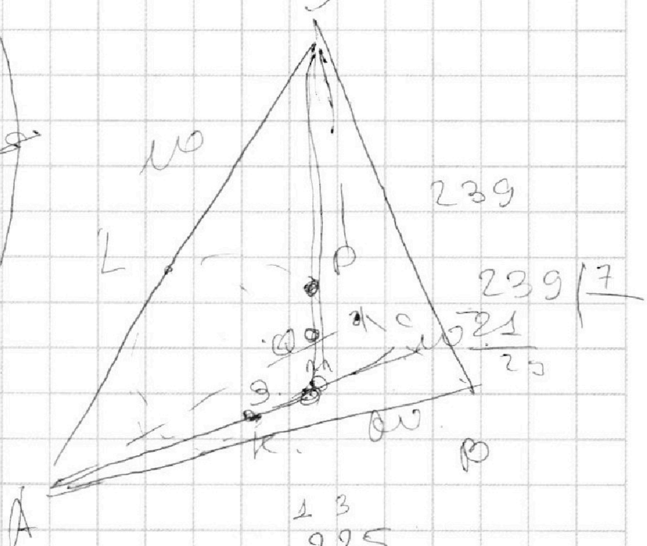
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\angle CBA = \alpha$

$AB \parallel EF \Rightarrow \angle CFE = \angle CBA = \alpha$

$\angle \Phi CA = 90^\circ - \angle BAC = \alpha$





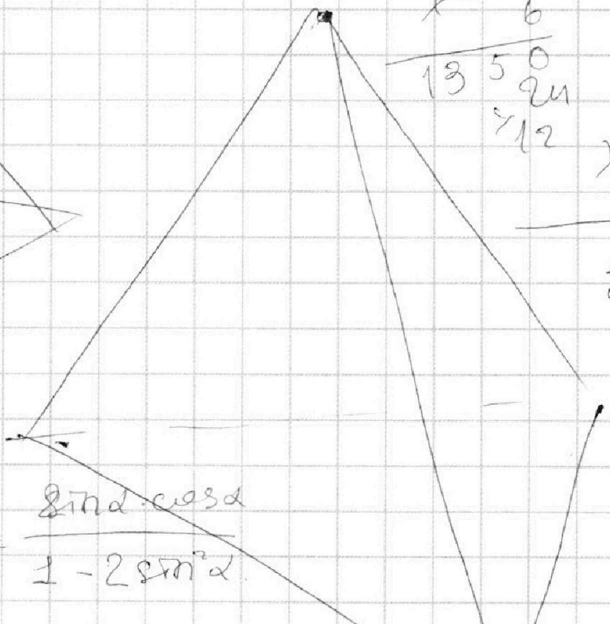
$239 \,|\, 7$

$225 \times 6 = 1350$

$24 / 12$

$144 / 2$

288.



$tg 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$

$\frac{49}{}$ $\qquad \frac{tg\alpha}{1-2tg^2\alpha}$

24^2 $\qquad 24 \times 24 = 576.$

$576 \,|\, 2$

$288 - 49 = 239.$

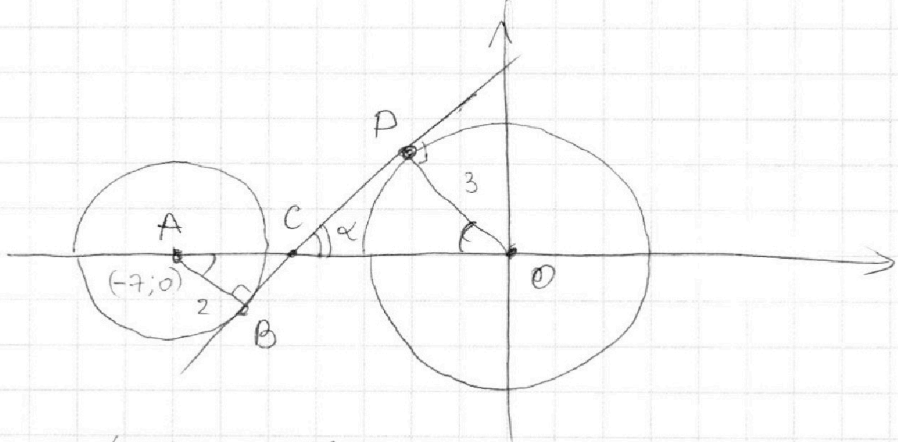
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для выполнения условия четырех корней прямая должна пересекать каждую из окр. 2 раза, это невозможно, когда „наклон" у прямой (tg угла, образованного с осью x) больше чем у общей касательной к этим окружностям.



$\triangle ABC \sim \triangle ODC$.

$$\frac{AC}{CO} = \frac{AB}{OD} = \frac{2}{3}$$

$$AO = 7 \quad AC = \frac{2}{2+3}\cdot 7 \quad OC = \frac{3}{2+3}\cdot 7 = \frac{21}{5}$$

$$tg\,\alpha = \frac{OD}{CD} = \frac{OD}{\sqrt{OC^2 - OD^2}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{24}{25}}} = \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5\sqrt{24}}{24}$$

$tg\,\alpha$ для выполнения усл.:

$$|a| < \frac{5\sqrt{24}}{24} \qquad \left|-\frac{1}{3a}\right| < \frac{5\sqrt{24}}{24}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

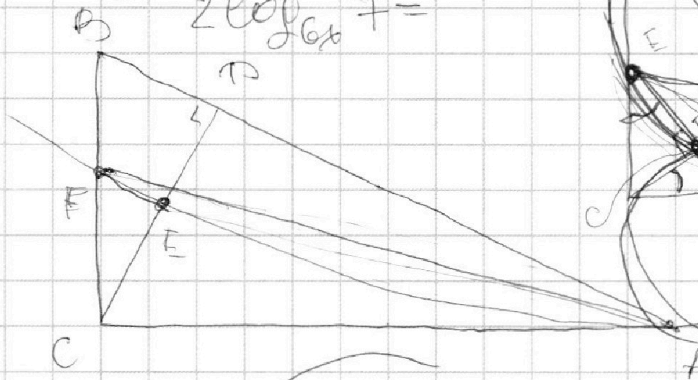
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

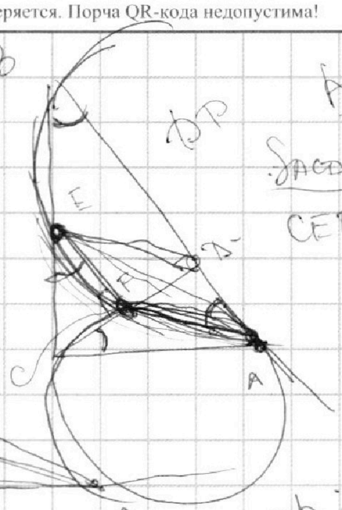
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_7^4(6x) -$
$2\log_{6x} 7 =$



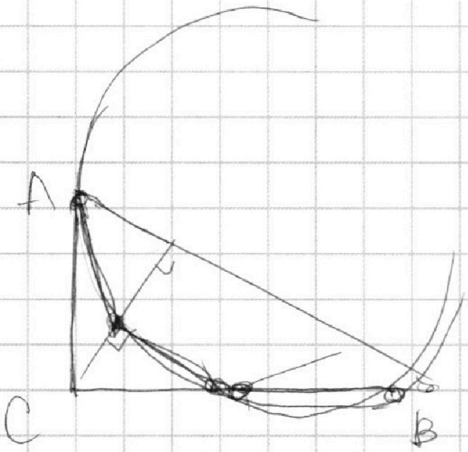


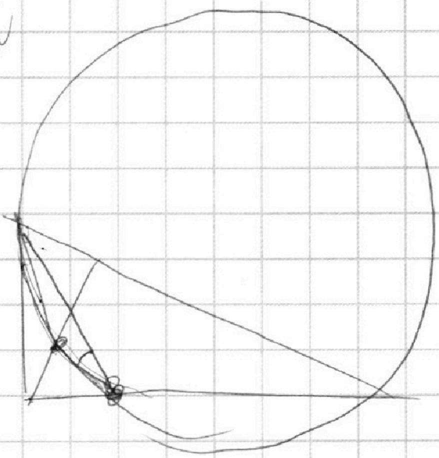
$\frac{S_{ACD}}{CEF}$

$ab: 2^7 3^{11} 5^{14}$

$bc: 2^{13} 3^{15} 5^{18}$

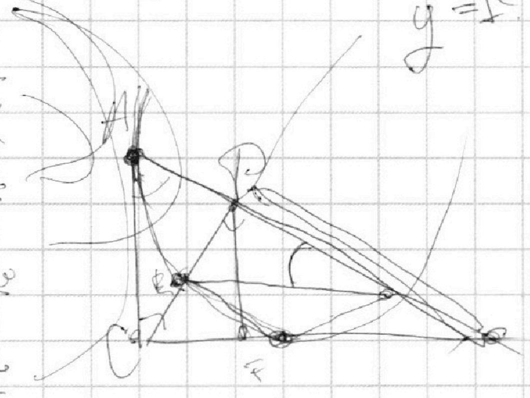
$ac: 2^{14} 3^{17} 5^{43}$





$y = 9(x - p)$

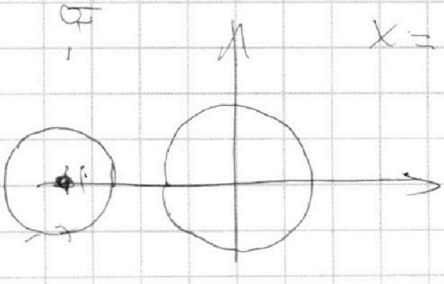
$(a+b)(a^4 + ab^3 + a^2b^2 -$



$\frac{AB}{BD} =$

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x.$

$(x+7)^2 + y^2 = 2^2$



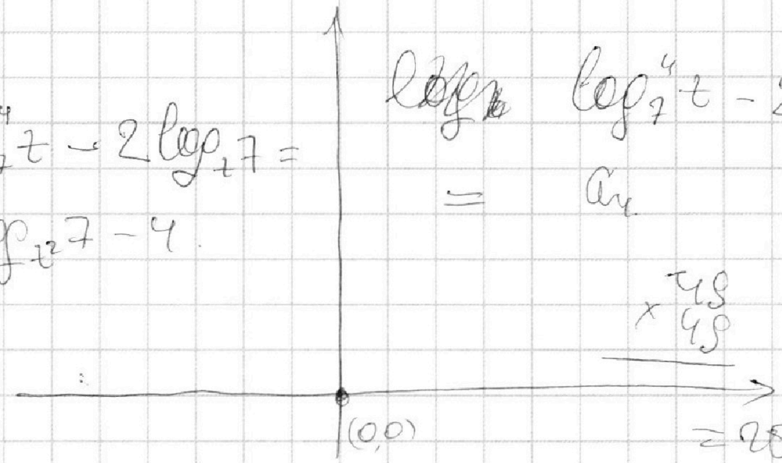
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

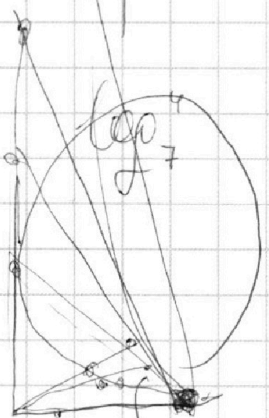
$6x = t$

$\log_7^4 t - 2\log_t 7 =$
$= 3\log_{t^2} 7 - 4$.



$\log_7^4 t - 2\log_t 7 =$
$= a_4$

49×49 $(50-1)^2 = 2500 -$

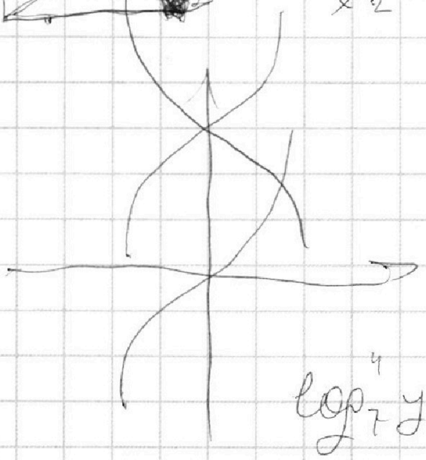


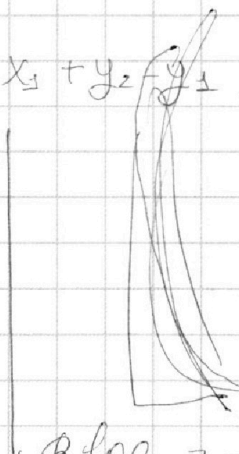
$4x_2 - 4x_2 + y_2 - y_1$.

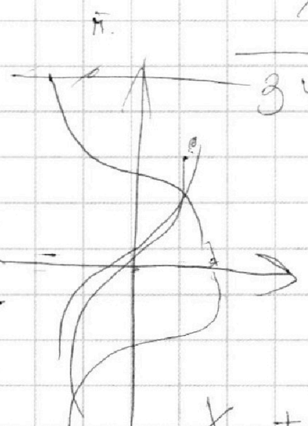
$\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$. x_+ $\times 49$

$x_2 - x_1 + y_2 - y_1$.

$49 \times 7 = 343$







$\log_7^4 y + 3\log_y 7 =$

$= 5\log_{y^2} 7 - 4$
2,

$\log_7 y$

$18 + 14 = 32$

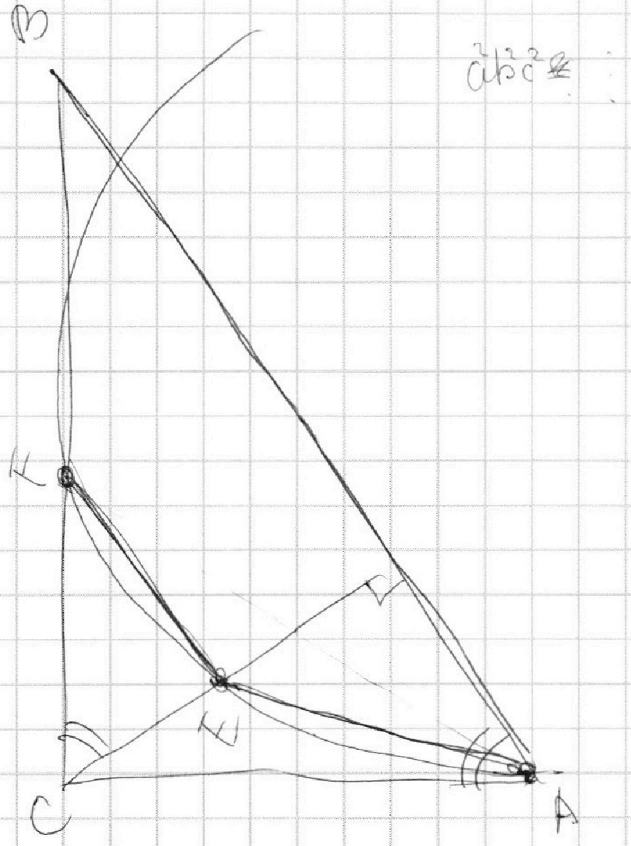
$32 + 43 = 75$ 37,5

27

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ