МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) $\left.\begin{array}{l} ab \vdots 2^{8}3^{14}5^{12} \\ bc \vdots 2^{12}3^{20}5^{17} \\ ac \vdots 2^{14}3^{21}5^{39} \end{array}\right| \Rightarrow abc \vdots 2^{14}3^{21}5^{39}$ (взяли старшие степени)

Рассмотрим содержание степеней 2, 3 и 5 в числах a, b, c

1) Содержание степеней двоек (обозначим их кол-во соотв. буквой)

$\left\{\begin{array}{l} a+b \geqslant 8 \\ b+c \geqslant 12 \\ a+c \geqslant 14 \end{array}\right| \Rightarrow a+b+c \geqslant \frac{12+14+8}{2} = 17$. Значит $abc \vdots 2^{17}$

2) Содержание степеней трех

$\left\{\begin{array}{l} a+b \geqslant 14 \\ b+c \geqslant 20 \\ a+c \geqslant 21 \end{array}\right| \Rightarrow a+b+c \geqslant \frac{14+20+21}{2} = 27{,}5$. Степень тройки обязана быть целой т.к. $a, b, c \in N$

Значит $a+b+c \geqslant 28$ т.е. $abc \vdots 3^{28}$

3) Содержание пятёрок

$\left\{\begin{array}{l} a+b \geqslant 12 \\ b+c \geqslant 17 \\ a+c \geqslant 39 \end{array}\right| \Rightarrow a+b+c \geqslant \frac{12+17+39}{2} = 34$. т.е. $abc \vdots 5^{34}$

Итого ~~abc~~ исходя из критических случаев

$\left.\begin{array}{l} abc \vdots 2^{14}3^{21}5^{39} \\ abc \vdots 2^{17} \\ abc \vdots 3^{28} \\ abc \vdots 5^{34} \end{array}\right| \Rightarrow abc \vdots 2^{17}3^{28}5^{39}$, $a, b, c \in N \Rightarrow$

$abc \geqslant 2^{17}3^{28}5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$abc \geqslant 2^{17} 3^{28} 5^{39}$

$abc = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$ достигается

при $a = 2^5 3^7 5^{12}$

$b = 2^3 3^7$

$c = 2^9 3^{14} 5^{27}$

$ab = 2^8 3^{14} 5^{12} \vdots 2^8 3^{14} 5^{12}$

$bc = 2^{12} 3^{21} 5^{27} \vdots 2^{12} 3^{20} 5^{17}$

$ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39} \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

$abc \geqslant 2^{17} 3^{28} 5^{39}$ и равенство ~~дод~~ $2^{17} 3^{28} 5^{39}$ достигается $\Rightarrow$ ~~abc~~ наименьшее произведение $abc = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$

Ответ: $2^{17} 3^{28} 5^{39}$

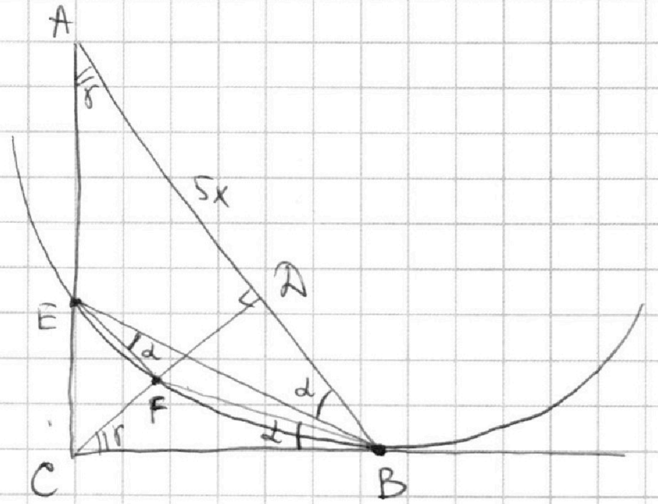
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано

$\triangle ABC$ - прямоуг.
$\angle C = 90^\circ$
CD - высота
$AD : DB = 5 : 2$
ω, кас BC в B
$\omega \cap CD = F$
$\omega \cap CA = E$
$EF \parallel AB$
Найти:
$S_{\triangle ABC} : S_{\triangle CEF}$



1) CB кас к $\omega \Rightarrow \angle FBC = \angle FEB$ (вписанный угол опир. на дугу, отсекаемую хордой в точку касания) значит по св-ву кас $\angle FBC = \angle FEB$
Пусть $\angle FBC = \angle FEB = \alpha$

2) $EF \parallel AB \Rightarrow \angle FEB = \angle EBA$ (как внутр. н/л углы)
Тогда $\angle EBA = \alpha$

3) Пусть $\angle CAB = \gamma$, тогда $\angle DCA = 90^\circ - \gamma$, $\angle DCB = 90^\circ - \angle DCA =$
$= 90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma$

4) $\triangle CBF$ и $\triangle ABE$ подобны по 2м углам ($\angle CAB = \angle FBC$, $\angle DCB = \angle CAB$)
Значит $\frac{AE}{CF} = \frac{AB}{CB}$

5) Пусть $AD = 5x$, тогда $DB = 2x$, CD - выс. к гип. $\Rightarrow$
$\Rightarrow CD = \sqrt{AB \cdot DA} = \sqrt{5x \cdot 2x} = x\sqrt{10}$

6) По т. Пифагора $CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{x^2 10 + x^2 \cdot 4} = x\sqrt{14}$
По т. Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{x^2 49 - x^2 14} = x\sqrt{35}$

7) Значит $\frac{AE}{CF} = \frac{AB}{CB} = \frac{7x}{x\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}}$

8) $\left.\begin{array}{l}\angle EBC = \angle EBF + \alpha \\ \angle FBA = \angle EBF + \alpha\end{array}\right| \Rightarrow \angle FBC = \angle FBA$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

9) $\triangle CBE$ и $\triangle DBF$ подобны по 2м углам ($\angle ECB = \angle BDF$, $\angle FBD = \angle CBE$)

Значит $\frac{FD}{EC} = \frac{DB}{CB} = \frac{2x}{\sqrt{14}x} = \frac{2}{\sqrt{14}}$

10) ~~$\triangle EFC$ и $\triangle ADF$:~~ $CD \perp AB$, $EF \parallel AB \Rightarrow CD \perp EF$

11) $\triangle EFC$ и $\triangle ADF$: $\angle C$ - общий, $\angle EFC = \angle ADC = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle EFC \sim \triangle ADF$ по 2м углам

Значит $\frac{CE}{AC} = \frac{CF}{CD}$ пусть $\frac{CE}{AC} = k$, тогда

$CE = k \cdot AC$

$AE = AC - CE = AC(1-k)$

Ан-но $FD = FD - CF = FD(1-k)$

12) $\frac{FD}{EC} = \frac{2}{\sqrt{14}}$; $\frac{AE}{CF} = \frac{7}{\sqrt{14}}$; ~~$\frac{CF}{AE}$~~ $\frac{EC}{FD} = \frac{\sqrt{14}}{2}$ $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AE}{CF} \cdot \frac{\cancel{EC}CF\cancel{D}}{\cancel{FD}EC}$ ~~$\frac{2}{\sqrt{14}}$~~ $\frac{7}{\sqrt{14}} \cdot \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{14} \cdot 2} = 1$

$$\frac{AC(1-k)}{\cancel{CD} \cdot k} \cdot \frac{\cancel{CD}(1-k)}{\cancel{AC} \cdot k} = 1$$

$$\left(\frac{(1-k)}{k}\right)^2 = 1$$

$$1 - k = k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

13) $S_{\triangle CDA} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AB \cdot \frac{5}{7} = S_{\triangle ABC} \cdot \frac{5}{7}$

$S_{\triangle CFA} = k^2 \cdot S_{\triangle CDA} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} \Rightarrow$

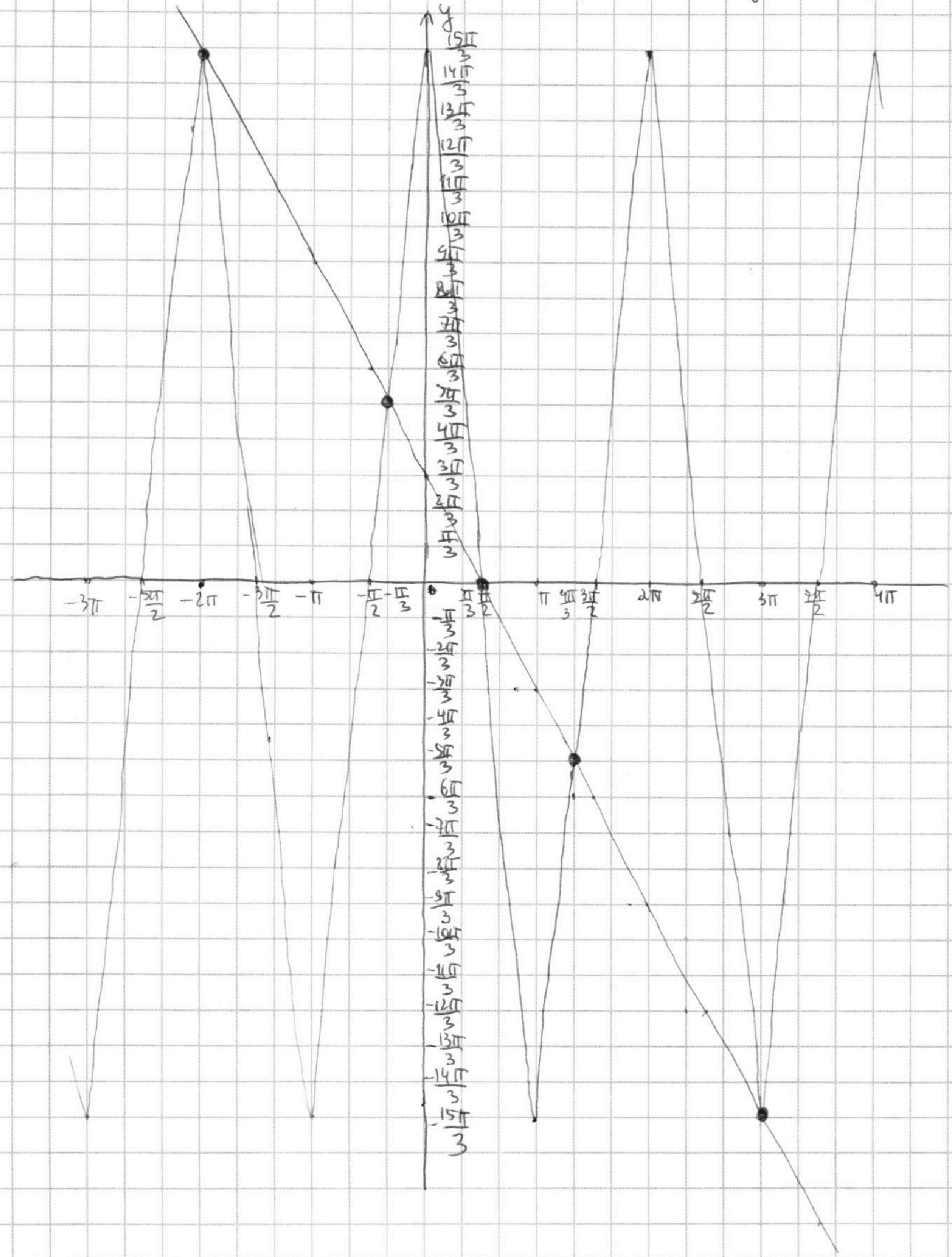
$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CFA}} = \frac{S_{\triangle ABC}}{\frac{5}{7} \frac{1}{4} \cdot S_{\triangle ABC}} = \frac{28}{5} = \frac{56}{10} = 5{,}6$ Ответ: 5,6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$10\arcsin(\cos x)=\pi-2x$ Построим графики $y=10\arcsin(\cos x)$ и $y=\pi-2x$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Заметим, что $\arcsin(\cos x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$10\arcsin(\cos x) \in [-5\pi; 5\pi]$

При $x < -2\pi$ $\quad \pi - 2x > \pi + 4\pi = 5\pi$

Значит у ~~лев.~~ левой и правой части не будет пересечений т.к. прав. част. $\leq 5\pi$

При $x > 3\pi$ $\quad \pi - 2x < \pi - 6\pi = -5\pi$

Значит у левой и правой части не будет пересечений т.к. прав. част $\geq -5\pi$

При $x \in [-2\pi; 3\pi]$ у левой и правой части 5 точек пересечений, значит при $x \in [-2\pi; 3\pi]$ — 5 корней у нашего уравн.

Итого $x \in (-\infty; -2\pi)$ — 0 реш. $\quad$ Значит всего 5 реш.
$x \in [-2\pi; 3\pi]$ — 5 реш.
$x \in (3\pi; +\infty)$ — 0 реш.

Заметим, что
$x = -2\pi$
$x = -\frac{\pi}{3}$
$x = \frac{\pi}{2}$
$x = \frac{4\pi}{3}$
$x = 3\pi$
решения и их 5 значит других решений нет

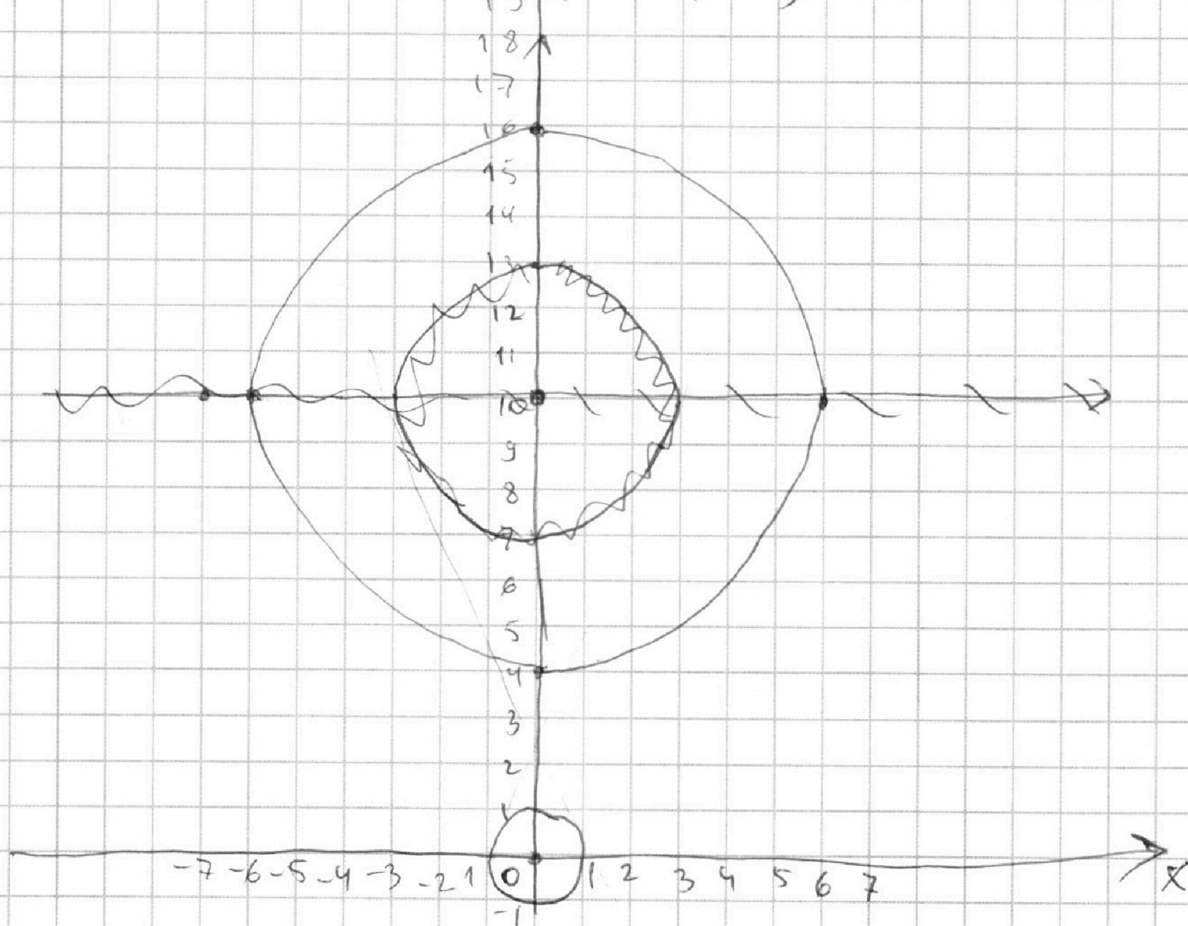
~~Проверка корней 1) $x = -2\pi$ $10\arcsin(\cos -2\pi) = 10\arcsin$~~

Ответ: -2π; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{4\pi}{3}$; 3π

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \quad (*) \end{cases} ; \quad y=\frac{a}{3}x+\frac{4b}{3}$$

(*) $x^2+y^2=1$ или $x^2+y^2-20y+100=36$

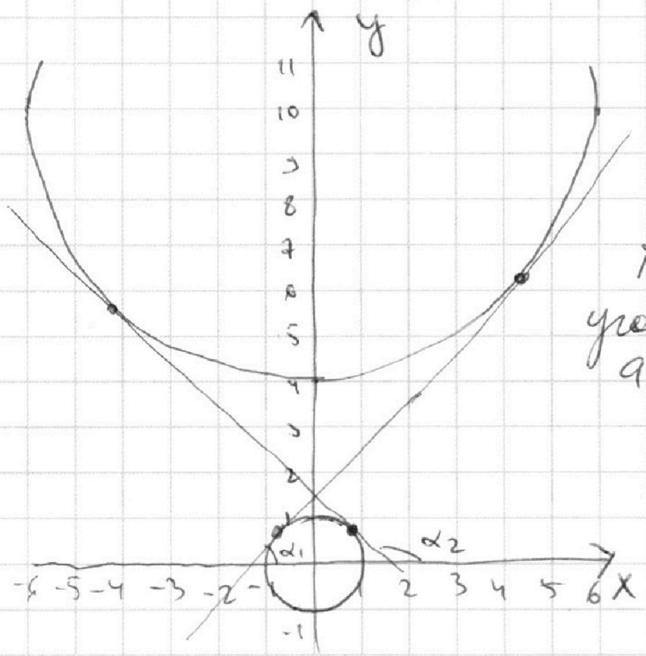
$x^2+y^2=1$ $\qquad$ $x^2+(y-10)^2=36$



Решение (*) – коорд. двух окр. точек пренадлеж. этим двум окружностям

$y=\frac{a}{3}x+\frac{4b}{3}$ – ур. прямой. Значит решением системы будет явится ~~кол-во~~ коорд. точек пересечения прямой ~~ус~~ ур. $y=\frac{a}{3}x+\frac{4b}{3}$ и двух окр.

Должно быть ровно 4 решения прямая пересекает окружность не более 2 раза, значит, чтобы решений было ровно 4 она должна пересекать каждую окружность 2 раза

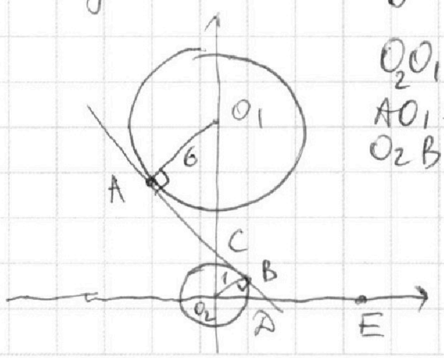


Рассмотрим положения касания двух окр. общейми внутр. касательными

Тогда у первой будет угол с полож. напр. Ox α_1, а у второй α_2

При углах α_1 и α_2 наша сист. имеет не более двух ~~уу~~ реш. т.к. прямая либо кас. двух окр. либо пересекает одну либо кас. одну либо не пересекает никакую. При варианты, где $\alpha = 90°$ не подходит т.к. ~~уравнение задает~~ $y = \frac{a}{3}x + \cancel{b}\frac{4b}{3}$ задаёт все прямые кроме пар. Oy. Значит нам подходят прямые которые образуют угол β с полож. напр. Ox, где $\beta \in (\alpha_1; 90°) \cup (90°; \alpha_2)$

найдём ~~...~~ $tg\alpha_1$ и $tg\alpha_2$



$O_2O_1 = 10$
$AO_1 = 6$
$O_2B = 1$

$\triangle CO_1A \sim \triangle CO_2B$

$\frac{O_1C}{CO_2} = \frac{AO_1}{O_2B} = \frac{6}{1}$

$O_1C = 6CO_2$

$CO_2 + O_1C = 7CO_2 = O_2O_1$

$CO_2 = \frac{10}{7}$

$CB = \sqrt{CO_2^2 - O_2B^2} = \frac{\sqrt{100-1}}{7} = \frac{3\sqrt{11}}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

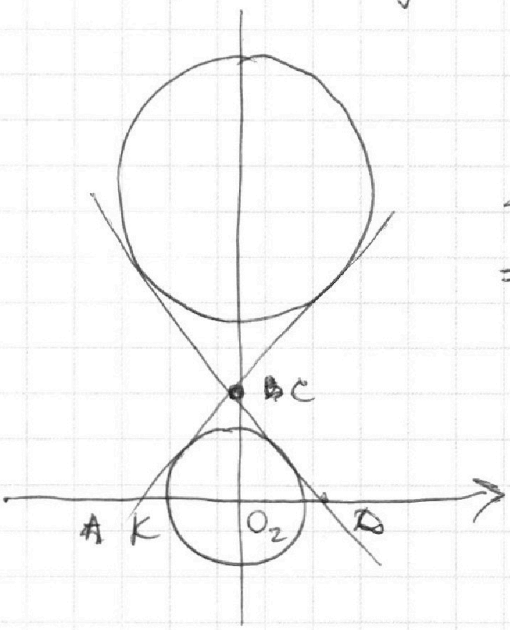
Значит $\angle CO_2B = \angle BDO_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\angle BDO_2 = tg\angle CO_2B = \frac{CB}{O_2B} = \frac{\frac{3\sqrt{11}}{7}}{1} = \frac{3\sqrt{11}}{7}$

~~∠BDA = ∠...~~

~~Значит~~ $\alpha_2 = 180^\circ - \angle CO_2B \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\alpha_2 = -tg\angle CO_2B = -\frac{3\sqrt{11}}{7}$



~~Исходя из~~

$\triangle KCO_2 = \triangle DCO_2$ (по 2м кат.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CKO_2 = \angle CDO_2 = \alpha_1$

Значит $tg\alpha_1 = tg\angle CDO_2 = \frac{3\sqrt{11}}{7}$

У прямой ур. $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$ По геом. смыслу $\frac{a}{3}$ равен тангенсу угла наклона прямой и полож. напр. Ox.

Мы выяснили, что $\beta \in (\alpha_1; 90^\circ) \cup (90^\circ; \alpha_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\beta \in \left(\frac{3\sqrt{11}}{7}; +\infty\right) \cup \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{11}}{7}\right)$

т.е. $\frac{a}{3} \in \left(\frac{3\sqrt{11}}{7}; +\infty\right) \cup \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{11}}{7}\right) \Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{11}}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{11}}{7}; +\infty\right)$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{11}}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{11}}{7}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$f(a)=0$ имеет ~~не только~~ 2 реш. Значит обозначим их x_1 и x_2

Значит либо $-\log_5(2x)=x_1$, $\log_5 y = x_2$, либо $-\log_5(2x)=x_2$, $\log_5 y = x_1$

либо $-\log_5(2x)=\log_5 y = x_1$ либо $-\log_5(2x)=\log_5 y=x_2$

Значит xy может принимать значения

1) $-\frac{x_1^5}{2}\cdot x_2^5 = -\frac{(x_1x_2)^5}{2}$

2) $-\frac{x_2^5}{2}\cdot x_1^5 = -\frac{(x_1x_2)^5}{2}$

3) $-\frac{x_1^5}{2}\cdot x_1^5 = \frac{-x_1^{10}}{2}$

4) $-\frac{x_2^5}{2}\cdot x_2^5 = \frac{-x_2^{10}}{2}$

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

$\log_5^4(2x) - \dfrac{3}{\log_5(2x)} = \dfrac{4}{3}\dfrac{1}{\log_5(2x)} - 3$

Заменим $\log_5(2x) = t$, тогда

$t^4 - \dfrac{3}{t} = \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{t} - 3$

$t^4 - \dfrac{13}{3}t + 3 = 0$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}0{,}2 - 3$

$\log_5^4 y + \dfrac{4}{\log_5 y} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\log_5 y} - 3$

Заменим $\log_5 y = b$

$b^4 + \dfrac{4}{b} = -\dfrac{b}{3} - 3$

$b^4 + \dfrac{13}{3}b + 3 = 0$

~~Заметим, что~~ Пусть $f(a) = a^2 + \dfrac{13}{3}a + 3$

Тогда ~~для~~ из нашего условия должны выполнятся условия $f(-t) = f(-\log_5(2x)) = t^4 - \frac{13}{3}t + 3 = 0$

и $f(b) = f(\log_5 y) = b^4 + \frac{13}{3}b + 3 = 0$

т.е. $\begin{cases} f(\log_5 y) = 0 \\ f(-\log_5(2x)) = 0 \\ f(a) = a^4 + \frac{13}{3}a + 3 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5) В $\triangle AHA_1$ по т Пифагора

$$A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = \sqrt{24^2 - 12{,}5^2} =$$

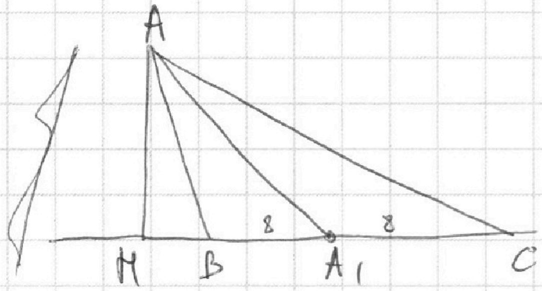
$$= \sqrt{(24-12{,}5)(24+12{,}5)} = \sqrt{11{,}5 \cdot 36{,}5} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{23 \cdot 73} = \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2}$$

6) $BH = BA_1 - HA_1 = \frac{1}{2}BC - HA_1 = 8 - \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2} =$

$$= \frac{\sqrt{16^2} - \sqrt{23 \cdot 73}}{2} < 0$$

Значит основание ~~ВН~~ АН лежит вне ВС



Значит $HB =$

$$= MA_1 - BA_1 = \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2} - 8$$

7) По т. Пифагора в $\triangle AHB$

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 = \left(\frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2} - 8\right)^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{23 \cdot 73 - 32 \cdot \sqrt{23 \cdot 73} + 256 + 625}{4} =$$

$$= \frac{1679 + 256 + 625 - 32\sqrt{23 \cdot 73}}{4} = \frac{2560 - 32\sqrt{23 \cdot 73}}{4} =$$

$$= 640 - 8\sqrt{23 \cdot 73}$$

8) ~~Пол.~~ $HC = BC + HB = 16 + \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2} - 8 =$

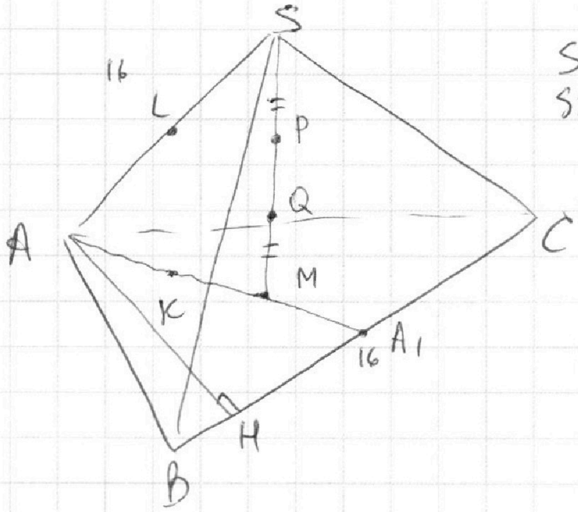
$$= 8 + \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

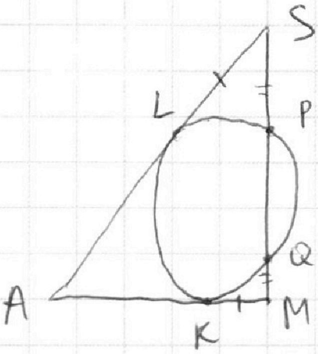


$S_{\triangle ABC} = 100$

$SA = BC = 16$

а) Найти: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$

Сделаем выносной чертёж (SAM)



1) По св-ву кас. и сек.

$SL^2 = SP \cdot SQ = SP(SP+PQ)$

$KM^2 = MQ \cdot MP = MQ(MQ+PQ)$ $\Rightarrow$

$MQ = SP$

$\Rightarrow SL^2 = KM^2 \Rightarrow SL = KM$

2) $AL = AK$ - как отр. кас. из т. A; $LS = KM$ $\Rightarrow AS = AM = 16$

3) По св-ву мед. $\frac{AM}{AA_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} \cdot AM = 16 \cdot \frac{3}{2} = 24$

АН-НО при S − Q − P − M − логические шаги сохр.

4) В $\triangle ABC$ проведем высоту AH

Тогда $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = 100$

$AH = \frac{100 \cdot 2}{BC} = \frac{200}{16} = 12{,}5$

~~5) В △AHA1 по т. Пифагора~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

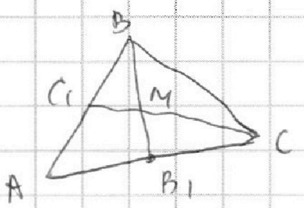
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

9) По т. Пифагора из $\triangle MAC$

$$AC^2 = AM^2 + BC^2 = \left(\frac{\sqrt{23\cdot73}}{2} + 8\right)^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2 = 640 + 8\sqrt{23\cdot73}$$

10) $BB_1 \cancel{= \frac{A}{2}}$ по формуле медианы треугольника



$$BB_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2} =$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}\cdot 2(640 - 8\sqrt{23\cdot73} + 640 + 8\sqrt{23\cdot73})}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot(640 - 8\sqrt{23\cdot73} + 256) - 640 - 8\sqrt{23\cdot73}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{640 + 512 - 24\sqrt{23\cdot73}} = \sqrt{160 + 128 - 6\sqrt{23\cdot73}} =$$

$$= \sqrt{288 - 6\sqrt{23\cdot73}}$$

$$CC_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2AC^2 + 2BC^2 - AB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(640 + 8\sqrt{23\cdot73}) + 256) - 640 + 8\sqrt{23\cdot73}} =$$

$$= \sqrt{288 + 6\sqrt{23\cdot73}}$$

Значит $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 24\cdot\sqrt{(288)^2 - 36\cdot23\cdot73} =$

$$= 24\cdot\sqrt{82944 - 60544} = 24\cdot\sqrt{22400} =$$

$$= 240\cdot4\sqrt{14} = 960\sqrt{14}$$

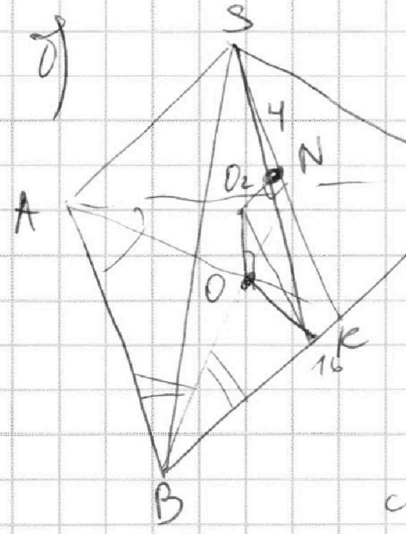
Ответ: а) $960\sqrt{14}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

б)



1) Т.к. центр. сфера вписана, то её центр проектируется в центр вписанной окр. в осн. Пусть это будет точка O, а центр сферы O_2

2) Проведём радиус OK, к стороне BC по условию 3) По условию $OO_2 = 5$ т.к. OO_2 – рад. сферы

3) O_2 – центр. сферы $\Rightarrow$ O_2 – точка пересеч. биссекторн. плоскости двугр. угла $\angle SBCA$ и оси перп. к осн. через центр впис. окр. в $\triangle ABC$ (т.е. O)

Значит $\angle SBCA = 2 \cdot \angle O_2KO$.

4) Обозначим $OK = r$. тогда $S_{ABC} = pr = 100$

$r = \frac{200}{AB+BC+CA}$ – знаем

5) $tg\angle O_2KO = \frac{OO_2}{OK} = \frac{5(AB+BC+CA)}{200}$

Значит $\angle SBCA = 2 \cdot arctg \frac{5(AB+BC+CA)}{200} =$

$= 2\ arctg\left(\frac{16+\sqrt{640-8\sqrt{23\cdot73}}+\sqrt{640+8\sqrt{23\cdot73}}}{40}\right)$

Ответ на пункт б

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$39+17+12=40+28=68$

$ab \vdots 2^8 3^{14} 5^{12}$

$bc \vdots 2^{12} 3^{20} 5^{17}$

$ac \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$

$(abc)^2 \vdots (2^{17})^2 \cdot (5^{34})^2 \cdot 3^{55}$

$2^{20} 3^{34} 5^{39}$ $2^{17} 3^{28} 5^{39}$

$b=1$

$a=2^8 3^{14} 5^{12}$

$c=2^{12} 3^{20} 5^{27}$

7
7
14

4
4
10

5
3
9

$abc \vdots 3^x \Rightarrow (abc) \vdots 3^{2x} \Rightarrow (abc) \vdots 3^y$, где $y \leq 2x$,
значит, если $(abc)^2 \vdots 3^{55}$, то $(abc)^2 \vdots 3^{56}$ т.к. точно кратно тройке в чётной степени

$ac \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39} \Rightarrow abc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39}$ $a, b, c \in N \Rightarrow$

$\Rightarrow abc \geq 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

$ab \vdots 2^8 3^{14}$

$bc \vdots 2^{12} 3^{20}$

$ac \vdots 2^{14} 3^{21}$

$$\begin{cases} a+b \geq 8 \\ b+c \geq 12 \\ a+c \geq 14 \end{cases}$$

$a+b+c \geq \frac{8+12+14}{2}$

$a+b+c \geq 17$

$$\begin{cases} a+b \geq 14 \\ b+c \geq 20 \\ a+c \geq 21 \end{cases}$$

$a+b+c \geq \frac{55}{2}$

$a+b+c \geq 27,5$

$$\begin{cases} a+b \geq 12 \\ b+c \geq 17 \\ a+c \geq 39 \\ a+b+c \geq \end{cases}$$

$\frac{12+17+39}{2} = \frac{12+16+40}{2} = \frac{68}{2} = 34$

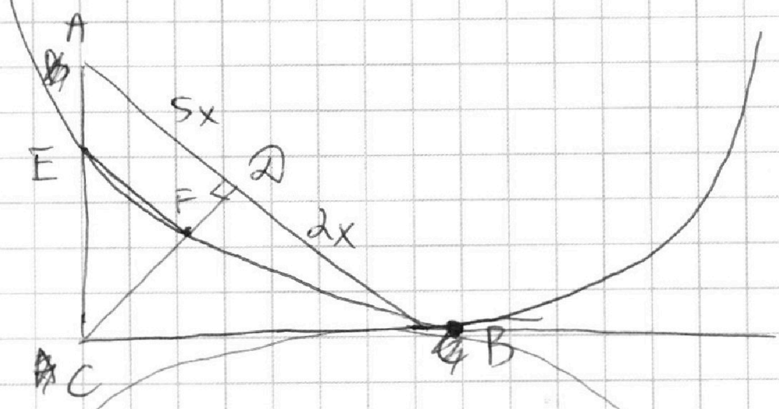
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}}$



Пусть у $\triangle CEF$ и $\triangle CDA$ коэф подобия k, тогда

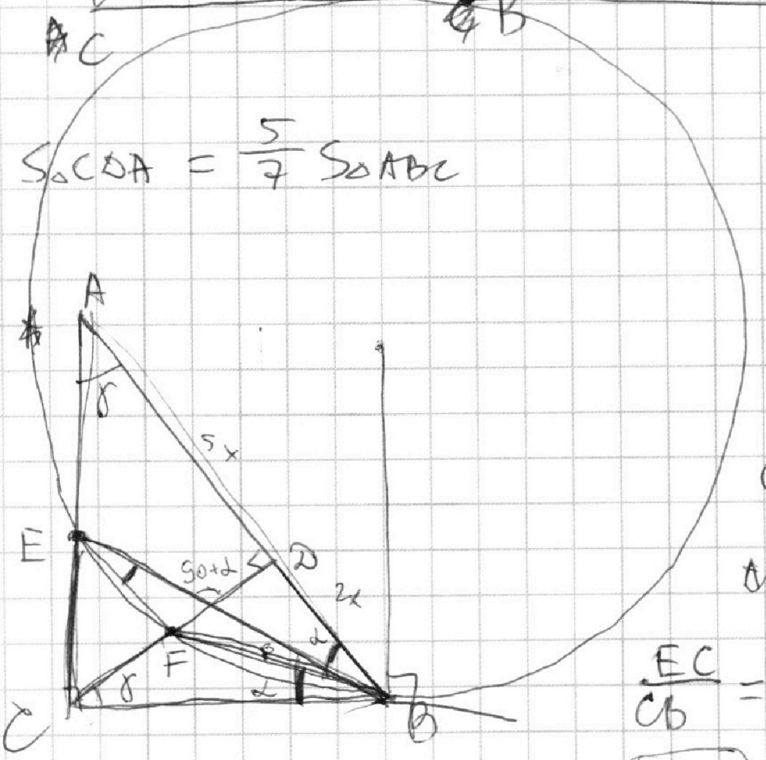
$CE = k\cdot AC$, $EA = AC(1-k)$

$S_{\triangle CDA} = \frac{5}{7} S_{\triangle ABC}$

$CA = \sqrt{49-14} = \sqrt{35}$

$CD = \sqrt{5x\cdot 2x} = x\sqrt{10}$

$CB = \sqrt{10+4}\,x = x\sqrt{14}$



~~AKE1~~ $\frac{CF}{FD}\cdot\frac{EC}{AE} = \frac{7\cdot\cancel{\sqrt{14}}}{2\cancel{\sqrt{14}}}$

$\frac{EC}{CB} = \frac{FD}{DB}$ $\left(\frac{1-k}{k}\right)^2 = \frac{7}{2}$

$\frac{7\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{14}} = \frac{AB}{CB} = \boxed{\frac{CF}{EA}}$ $\boxed{\frac{EC}{FD}} = \frac{CB}{DB} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

$\cancel{7\sqrt{14}\,2\sqrt{14}}\ \cancel{\frac{\sqrt{14}}{2}}$

$\frac{CF}{EA} = \frac{7}{\sqrt{14}}$ $\frac{\cancel{CB}\,\frac{EC}{FD}}{DB} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

$\frac{CE}{CA} = \frac{CE}{\sqrt{35}x} = \frac{CF}{\cancel{CD}\,CD} = \frac{CF}{\sqrt{10}x}$ $CF = \frac{7}{\sqrt{14}}EA$ $EC = \frac{\sqrt{14}}{2}FD$

$CE\sqrt{10} = CF\sqrt{35}$ ~~CB=1~~

$CE\sqrt{2} = CF\sqrt{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$

$\frac{\pi}{2}$ $1{,}5\pi$ $\arcsin(\cos x)$

$\sin\alpha = \cos x$ $-\sin y$

$\cos(\frac{\pi}{2}+y)$

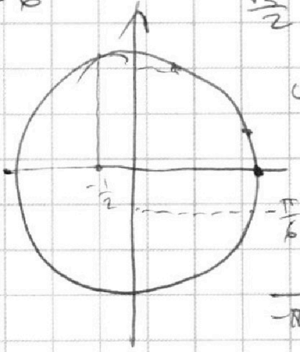
$\arcsin(\frac{\pi}{2}+y) =$

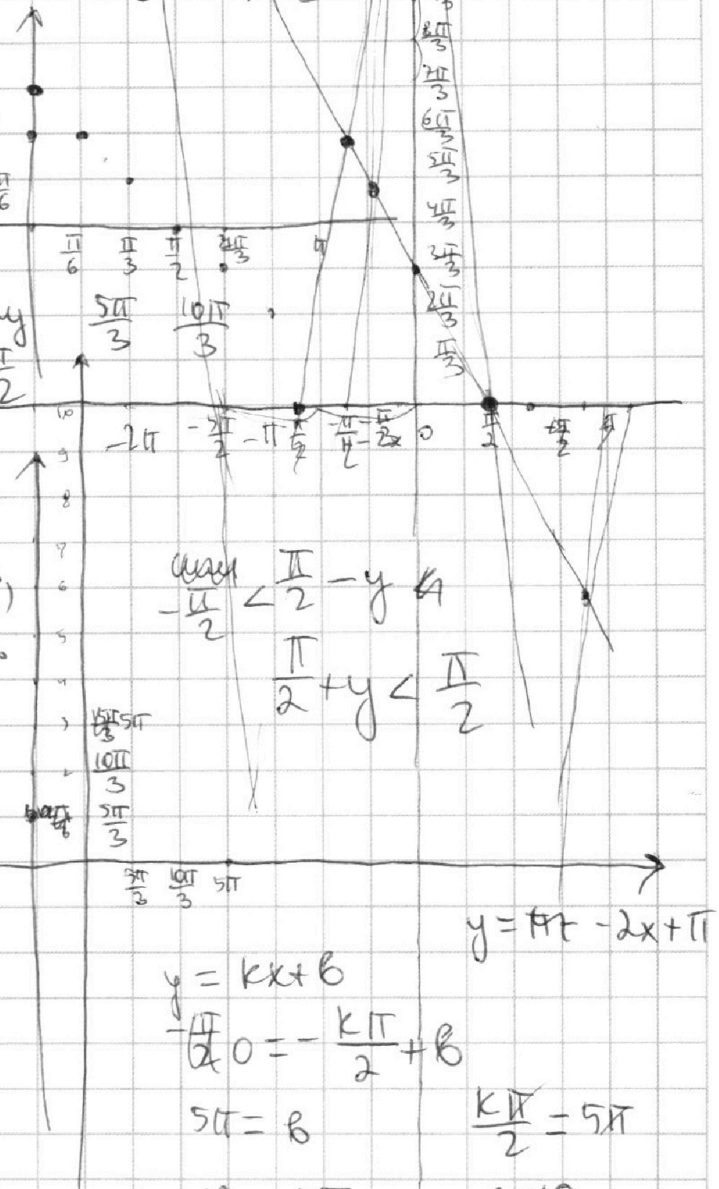
Пусть

$\cos\frac{\pi}{6}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$10\arcsin \in [-5\pi; 5\pi]$





$\pi - 2x = 5\pi$

$x = -2\pi$

$x = +3\pi$

$\pi - 2(\frac{\pi}{2}+y) = -2y$

Если $x = \frac{\pi}{2} + y$ - корень,
то $x = \frac{\pi}{2} - y$ - корень

$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - y <$

$\frac{\pi}{2} + y < \frac{\pi}{2}$

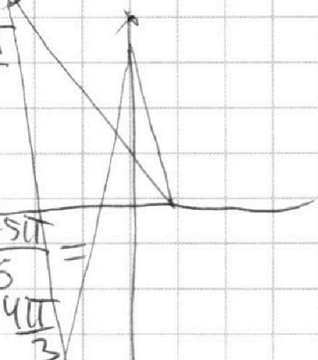
$\frac{\pi}{2} - y = \boxed{-2\pi}$ $\boxed{\frac{\pi}{2}}$

$y = 2{,}5\pi$ $\boxed{3\pi}$ $\boxed{-\frac{\pi}{3}}$

$\frac{\pi}{2} - y = -\frac{\pi}{3}$

$y = \frac{2\pi + 3\pi}{6}$

$y = \frac{5\pi}{6}$



$\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} = \frac{3\pi + 5\pi}{6} =$

$= \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$

$y = -2x + \pi$

$y = kx + b$

$0 = -\frac{k\pi}{2} + b$

$5\pi = b$

$\frac{k\pi}{2} = 5\pi$

$k = 10$

$y = 10x + 5\pi$

$10x + 5\pi = -2x + \pi$

$12x = -4\pi$

$x = -\frac{\pi}{3}$

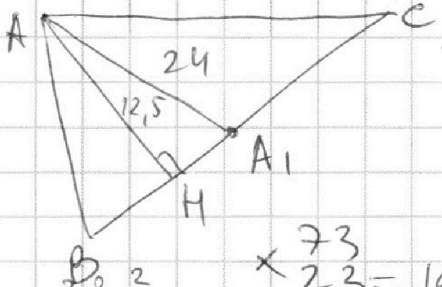
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

11
76
$$\begin{array}{r} 288 \\ \times\ 288 \\ \hline 2304 \\ +\ 2304 \\ 576 \\ \hline 82944 \end{array}$$



$73 \times 23 = 1679$

22 2
45 5
$$\begin{array}{r} 1679 \\ \times\ 36 \\ \hline 10174 \\ +\ 5037 \\ \hline 60544 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} \cancel{a}\frac{1}{5} - 3$

$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3}\frac{1}{\log_5 y} - 3$

$\frac{100}{8} = \frac{25}{2} = 12{,}5$

$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3$

$b^4 + \frac{13}{3}b + 3 = 0$

~~Заметим что если~~

$t^4 - \frac{13}{3}t + 3 = 0$

$\times\frac{36{,}5}{2}$

$72+1=73$

$a^4 + \frac{13}{3}a + 3 = 0$

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

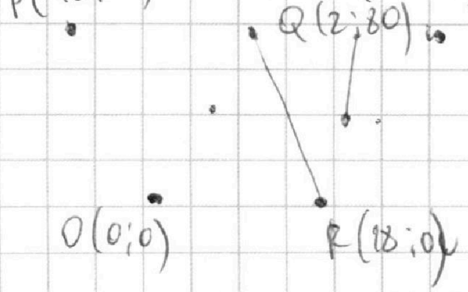
$x_1x_2x_3x_4 = \frac{3}{1}$

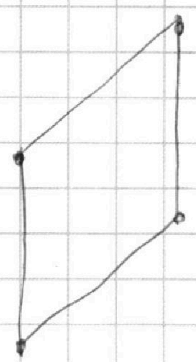
$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) =$

$= x^4 + x^3(a+c) + x^2(b+ac+d) + x(ad+cb) + bd$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+ac+d=0 \\ ad+cb=\frac{13}{3} \\ bd=3 \end{cases} \qquad c^2 = b+d$$

$-cd + c(b-d) = \frac{13}{3}$





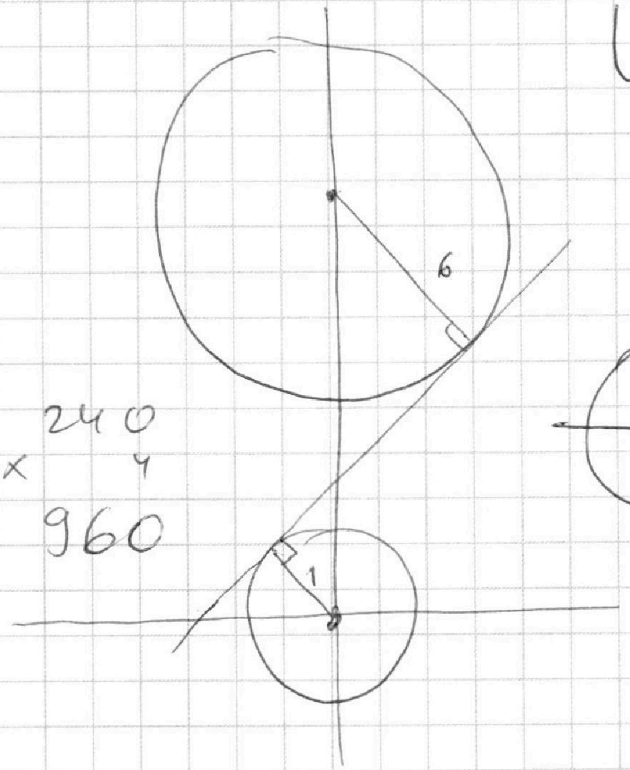
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

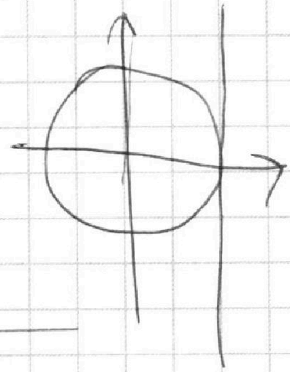
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик



$240 \times 4 = 960$



$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{(2x)^3}625 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \boxed{\frac{4}{3}}\log_{2x}5 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\log_5 2x} - 3$$

Заменим $t = \log_5(2x)$

$$t^4 - \frac{\cancel{3}9}{t3} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{t} - 3$$

$$t^4 - \frac{13}{3}t + 3 = 0$$

$$3t^4 - 13t + 9 = 0$$

$\frac{9}{3} + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$

$16\cdot 14 = 8\cdot 28 = 4\cdot 56 = 2\cdot 112 =$

$\left(4 + \frac{1}{3}\right)$

$2560 : 4 = 640$