



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

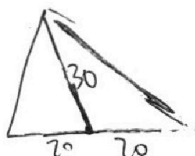
имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.



© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$
 $bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$
 $ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{26}$

$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{6+14+16} \cdot 3^{13+21+25} \cdot 5^{11+13+26}$

$a^2 b^2 c^2 : 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$

$abc = T \Rightarrow T^2 : 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists T^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot k, k \in \mathbb{N}$

$T = 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{3k}; \sqrt{3k} \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \min k = 3 \Rightarrow \min T = abc =$

$= 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

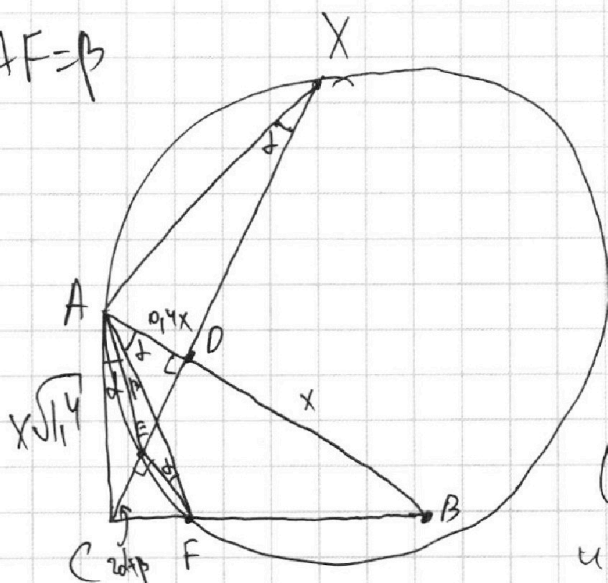
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2

$\angle EAF = \beta$



1) $\frac{AB}{BD} = 1,4 \Rightarrow$

$\Rightarrow DB = x$

$AD = 0,4x$

2) $\angle CAE = \angle AXE = \alpha$

(угол между хордой AE и касательной: AC)

3) $\angle AXE = \angle EFA = \alpha$ (опер. на AE)

4) $\angle EFA = \angle FAB = \alpha$ (EF || AB, внутр. накр. лежащ.)

5) $\triangle ACD \sim \triangle ACB$ ($\angle ADC = \angle ACB = 90^\circ$, $\angle CAB$ - общий)

$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC^2 = AD \cdot AB = 1,4x^2$

6) $EF \parallel AB \Rightarrow \angle CEF = \angle CDA = 90^\circ$

7) $\angle CAD = 90^\circ - \angle ACD = \angle ECF = 2\alpha + \beta$

$\cos(2\alpha + \beta) = \frac{AD}{AC} = \frac{0,4}{\sqrt{1,4}} = \frac{CE}{CF}$ ($\triangle ACD$ и $\triangle CEF$ - (4))

8) $\triangle ACF: \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{CF}{x\sqrt{1,4}} = \frac{CF}{AC}$

$\triangle AED: \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{ED}{AD} = \frac{ED}{0,4x} \Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\Rightarrow \frac{CF}{x\sqrt{1,4}} = \frac{ED}{0,4x} \quad CF \cdot 0,4x = ED \cdot x\sqrt{1,4}$$
$$0,4 CF = \sqrt{1,4} ED$$

$$CF = y \Rightarrow ED = \frac{0,4y}{\sqrt{1,4}}$$

$$\text{н.ч. } \frac{CF}{CF} = \frac{CF}{y} = \frac{0,4}{\sqrt{1,4}}$$

$$CF = \frac{0,4y}{\sqrt{1,4}} = ED$$

9) $\triangle CEF \sim \triangle CDB$ ($EF \parallel DB \Rightarrow \angle CFE = \angle CBD$)
 $\angle CEF = \angle CDB$)

$$CE = ED \Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{1}{2} = k \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} = k^2 = \frac{1}{4}$$

$$S_{CEF} = S, S_{CDB} = 4S$$

$$10) \frac{S_{CDB}}{S_{CAD}} = \frac{DB}{DA} = \frac{1}{0,4} = \frac{4S}{S_{CAD}} \Rightarrow S_{CAD} = 1,6S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{1,6S}{S} = 1,6$$

Ответ: 1,6

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(3) 10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) \in [0; \pi]$$

$$10 \arccos(\sin x) \in [0; 10\pi] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2} \text{ и } \sin x = t \Rightarrow$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \arcsin t = x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \arcsin t = x - \pi, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \\ \arcsin t = x - 2\pi, & x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \\ \arcsin t = x - 3\pi, & x \in \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right] \\ \arcsin t = x - 4\pi, & x \in \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\text{но } \arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arccos t = x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & (1) \\ \frac{\pi}{2} - \arccos t = x - \pi, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] & (2) \\ \frac{\pi}{2} - \arccos t = x - 2\pi, & x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] & (3) \\ \frac{\pi}{2} - \arccos t = x - 3\pi, & x \in \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right] & (4) \\ \frac{\pi}{2} - \arccos t = x - 4\pi, & x \in \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right] & (5) \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

- (1): $\arccos t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 10 \arccos t = 9\pi - 2x$
 $5\pi - 10x = 9\pi - 2x \quad 8x = -4\pi, x = -\frac{\pi}{2}, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
 ~~$2x = 6\pi, x = \frac{3\pi}{2}, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$~~
- (2): $\arccos t = \frac{3\pi}{2} - x$
 $15\pi - 10x = 9\pi - 2x$
 $8x = 6\pi$
 $x = \frac{3\pi}{4}, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$
- (3): $\arccos t = \frac{5\pi}{2} - x$
 $25\pi - 10x = 9\pi - 2x$
 $8x = 16\pi$
 $x = 2\pi, x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow x = 2\pi$
- (4): $\arccos t = \frac{4\pi}{2} - x$
 $35\pi - 10x = 9\pi - 2x$
 $8x = 26\pi$
 $x = \frac{13\pi}{4}, x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{4\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \frac{13\pi}{4}$
- (5): $\arccos t = \frac{9\pi}{2} - x$
 $45\pi - 10x = 9\pi - 2x$
 $8x = 36\pi$
 $x = \frac{9\pi}{2}, x \in \left[\frac{4\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \frac{9\pi}{2}$
- Ответ: $-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; 2\pi; \frac{13\pi}{4}; \frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

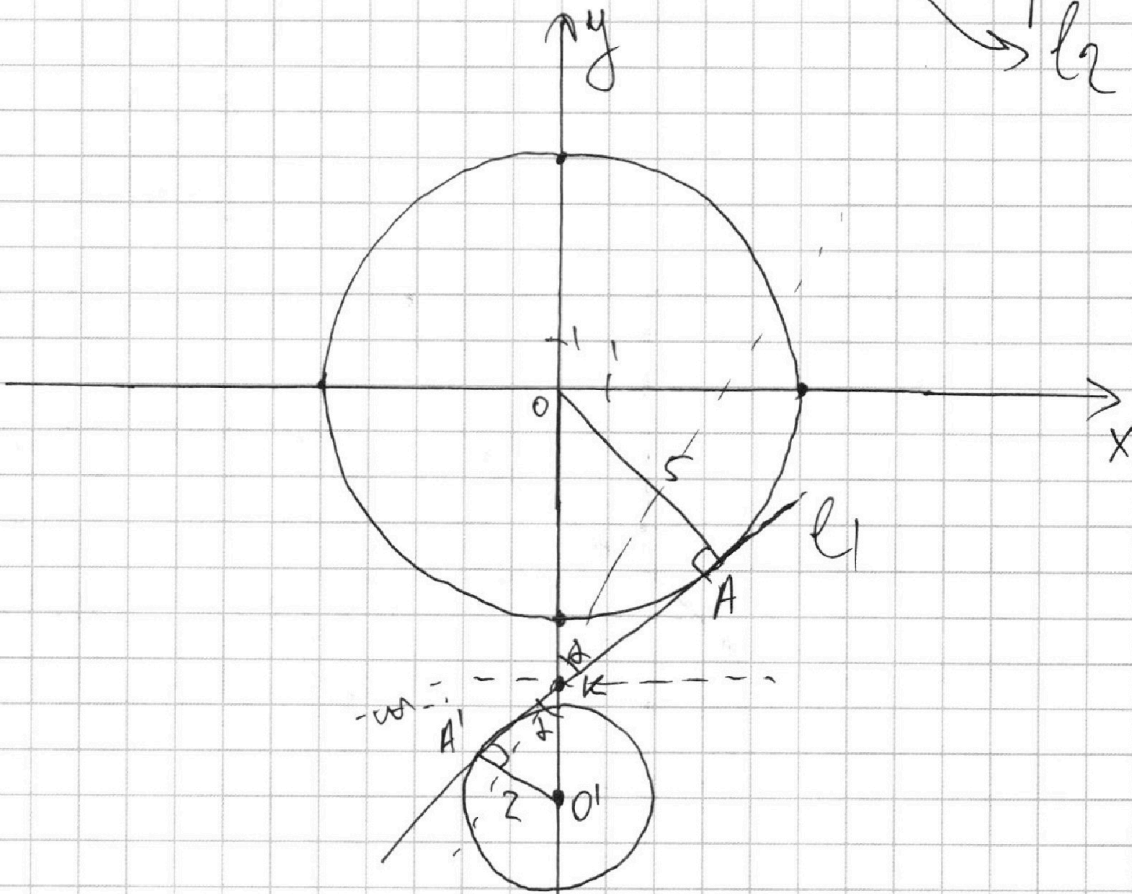
$$\textcircled{4} \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \quad (\#\#) \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 12y + 44) = 0 \end{cases}$$

~~$5x + 6ay - b = 0$~~

- (1) окр-сть, ц. $(0; 0)$; $R = 5$
(2) окр-сть, ц. $(0; -9)$; $R = 2$

$$\begin{cases} \textcircled{1} \quad -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} \quad (3) \\ x^2 + y^2 = 25 \quad (1) \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \quad (2) \end{cases}$$

(3) лин. ф-ция,
(невероятно)
прямая
→ l_2



*. Примечание: $a=0$ - переход, тогда
 $(\#\#)$ имеет вид: $5x = b$ - вертик. прямая,

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

очевидно, напр., при $b=0$ будет 4 решения,
тогда чтобы получить (3) делим на $6a \neq 0$

1) ~~Введем~~ Введем временно: $-\frac{5}{6a} = k$, $\frac{6}{6a} = c$,
(3): $y = kx + c$, тогда гранично положение
прямой - прямая l_1 , касаясь $2y^x$ экр. тащ,
как показано на чертеже, $OK = x'$, тогда

$$\angle KO' = 9 - x' \text{ (т.к. } OO_1 = 9) \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{9 - x'} = \frac{4}{x'}$$

$$2x' = 45 - 5x' \quad (\text{будем рассматривать}$$
$$x' = \frac{45}{7} \Rightarrow \quad \text{в дальнейшем только}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{35}{49} = \frac{5}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(90^\circ - \alpha) = \alpha \beta =$$

$$\frac{9}{7} \Rightarrow l_1 \text{ имеет вид: } y = \frac{9}{7}x - \frac{45}{7}, \text{ где}$$

~~будет~~ $k > \frac{9}{7}$, очевидно,

будет подбираться b , чтобы l_2 имела
всего 4 точки пер. с экр.-осями \Rightarrow

\Rightarrow у исходной системы было 4 ~~реш.~~ реш.
Также понятно, что при $0 < k < \frac{9}{7}$ будет только

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

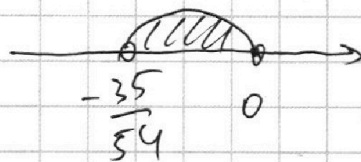
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

пересечение с осью xy и yz
Тогда имеем:

$$\begin{cases} -\frac{5}{6a} > \frac{9}{4} & (I) \\ -\frac{5}{6a} < -\frac{9}{4} & (II) \end{cases}$$

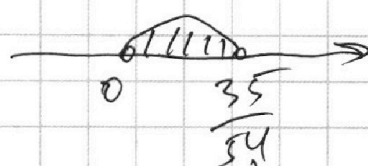
~~(I)~~ (I): $-\frac{9}{4} + \frac{5}{6a} < 0$

$$\frac{54a + 35}{42a} < 0$$



от $(-\frac{35}{54}; 0)$

(II): ~~(II)~~ $\frac{5}{6a} - \frac{9}{4} > 0$
 $\frac{35 - 54a}{42a} > 0$



Но, как мы
выяснили ранее,
 $a=0$ - не подходит \Rightarrow

\Rightarrow Ответ: $(-\frac{35}{54}; \frac{35}{54})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 5) \log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x &= \log_{11}^3 \frac{1}{121} - 5 \\ \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} &= -\frac{2}{3 \log_{11} x} - 5 \\ \log_{11} x = a \Rightarrow a^4 - \frac{6}{a} &= -\frac{2}{3a} - 5 \\ a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} + 5 &= 0 \\ \frac{3a^5 - 18 + 2 + 15a}{3a} &= 0 \end{aligned}$$

$3a^5 + 15a - 16 = 0$

$x > 0$
 $x \neq 1$

$$\begin{aligned} 2) \log_{11}^4(0,5y) + \log_{11}^3 11 &= \log_{11}^3 \frac{1}{11} - 5 \\ \log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} &= -\frac{13}{3 \log_{11}(0,5y)} - 5 \\ \log_{11}(0,5y) = b \Rightarrow b^4 + \frac{1}{b} &= -\frac{13}{3b} - 5 \\ 3b^5 + 3 &= -13 - 15b \\ \begin{cases} 3b^5 + 15b + 16 = 0 & (1) \\ 3a^5 + 15a - 16 = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow 3a^5 + 3b^5 + 15a + 15b = 0 \\ \cancel{a^5 + b^5 + 5a + 5b = 0} \\ \cancel{a^5 + b^5 + 5a + 5b = 0} \\ \cancel{(a+b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 5) = 0} \end{aligned}$$

$y > 0$
 $y \neq 2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) Рассмотрим $f(x) = 3x^5 + 15x + 16$

$$f'(x) = 15x^4 + 15 > 0 \Rightarrow f(x) - \text{возрастает} \Rightarrow$$

\Rightarrow имеет только одно решение

Аналогично: $g(x) = 3x^5 + 15x - 16$

$$g'(x) = 15x^4 + 15 > 0 \Rightarrow g(x) - \text{возрастает} \Rightarrow$$

\Rightarrow ур-ие: $3b^5 + 15b + 16 = 0$ - имеет 1 решение,
 $3a^5 + 15a - 16 = 0$ имеет одно решение.

Пусть $a = a_0$ - решение $3a^5 + 15a - 16 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -3a_0^5 - 15a_0 + 16 = 0 \Rightarrow b = -a_0 - \text{решение}$$

$$3b^5 + 15b + 16 = 0 \Rightarrow \log_{11} x = a_0, \log_{11} (0,5y) = -a_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{11} x + \log_{11} (0,5y) = a_0 - a_0 = \log_{11} (0,5xy) = 0$$

$$0,5xy = 1 \Rightarrow xy = 2 \quad (\text{заметьте, что}$$

условия $x \neq 1$ и $y \neq 2$ выполняются,
 $x > 0$ и $y > 0$)

т.к. $a_0 \neq \log_{11} 1 = 0$)

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

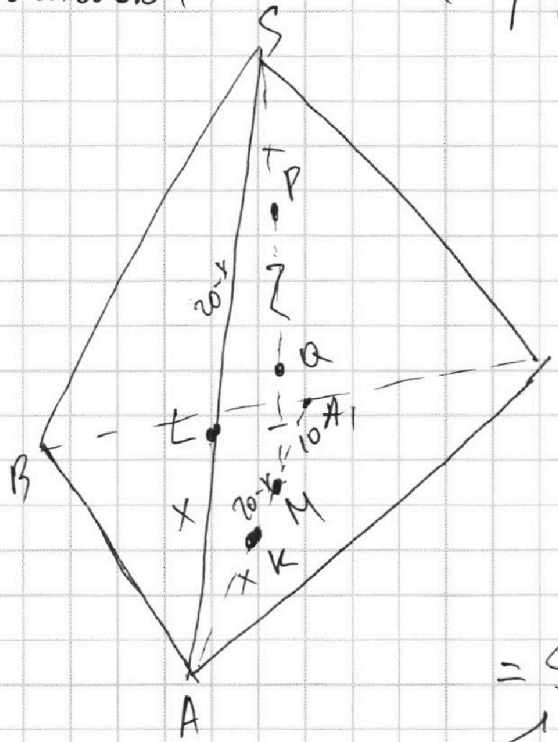
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(перестановка точек P и Q образует то же самое сечение)

④



то же самое сечение
 1) $AK = AL$ (отрезки касательных) $\Rightarrow x \Rightarrow$

$$\Rightarrow SL = 20 - x$$

$$2) SL^2 = SP \cdot SQ$$

(сечение точки S сим-но сферм)

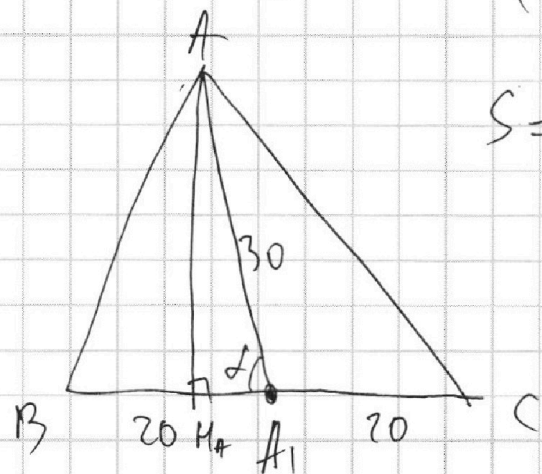
$$3) MK^2 = MQ \cdot MP =$$

(с-точки M)

$$= SP \cdot SQ \quad (MQ = SP, MP = SQ)$$

$$SL^2 = MK^2 = 20 - x \Rightarrow AM = 20 - x + x = 20 \Rightarrow$$

$\Rightarrow MA_1 = \frac{1}{2} AM = 10$ (M делит медиану в 2:1) $\Rightarrow AA_1 = 30$



$$S = 30 \cdot 20 \cdot \sin d = 600 \sin d = 180$$

$$\sin d = \frac{18}{60} = \frac{3}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MA = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MA A_1 = \sqrt{30^2 - 9^2} =$$

$$= \sqrt{21 \cdot 39} = 3\sqrt{4 \cdot 13} = 3\sqrt{52}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4) BM_A = 20 - 3\sqrt{91} \Rightarrow AB = \sqrt{(20 - 3\sqrt{91})^2 + 9^2} =$$

~~4)~~ 5) $CM_A = 20 + 3\sqrt{91} \Rightarrow$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{(20 + 3\sqrt{91})^2 + 9^2}$$

$$m_c^2 = \frac{2 \cdot 40^2 + 2(20 + 3\sqrt{91})^2 + 2 \cdot 9^2 - (20 - 3\sqrt{91})^2 - 9^2}{4}$$

$$m_b^2 = \frac{2 \cdot 40^2 + 2(20 - 3\sqrt{91})^2 + 2 \cdot 9^2 - (20 + 3\sqrt{91})^2 - 9^2}{4}$$

$$m_A \cdot m_B \cdot m_C = \frac{30}{4} \sqrt{(2 \cdot 40^2 + 2(20 + 3\sqrt{91})^2 + 9^2 - (20 - 3\sqrt{91})^2 - 9^2) \cdot (2 \cdot 40^2 + 2(20 - 3\sqrt{91})^2 + 9^2 - (20 + 3\sqrt{91})^2 - 9^2)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos(\sin x) \in [0; \pi]$$

$$\text{Да...} \in [0; 10\pi]$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$-\pi \leq 2x \leq 9\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$$

$$\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$$

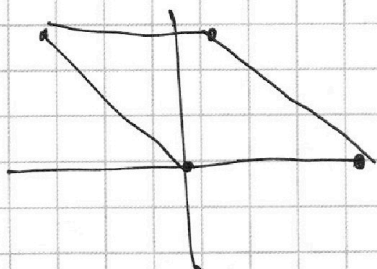
$$\sin x = t$$

$$\cos x = \sqrt{1-t^2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x = 1$$

$$\sin x = t$$

arccos



$$\arcsin t = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin t = x - \pi, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin t = x - 2\pi, x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin t = x - 3\pi, x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$$

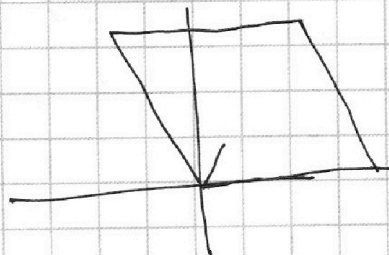
$$\arcsin t = x - 4\pi, x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$$

$$\text{or } \arccos t = \sqrt{1-x^2}$$

$$\arcsin t =$$

$$\sin(x - \pi) = \sin x$$

$$\arccos t = \frac{\pi}{2} - x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{5} \log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} x^3 \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \frac{1}{32} \log_{11} x^{11} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3 \log_{11} x} - 5$$

$$b^4 - \frac{6}{b} = -\frac{2}{3b} - 5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} = \log_{11} (0,5y)^3 (11^{-13}) - 5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} = -\frac{13}{3 \log_{11}(0,5y)} - 5$$

$$\textcircled{5} a^4 + \frac{1}{a} = -\frac{13}{3a} - 5$$

$$b^4 - \frac{6}{b} + \frac{2}{3b} + 5 = \frac{3b^5 - 18 + 2 + 15b}{3b} =$$

$$= \frac{3b^5 + 15b - 16}{3b} = 0$$

$$\begin{aligned} 3b^5 + 15b - 16 &= 0 \\ 3a^5 + 15a + 16 &= 0 \end{aligned}$$

$$a^4 + \frac{1}{a} + \frac{13}{3a} + 5 = \frac{3a^5 + 3 + 13 + 15a}{3a} = \frac{3a^5 + 15a + 16}{3a} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



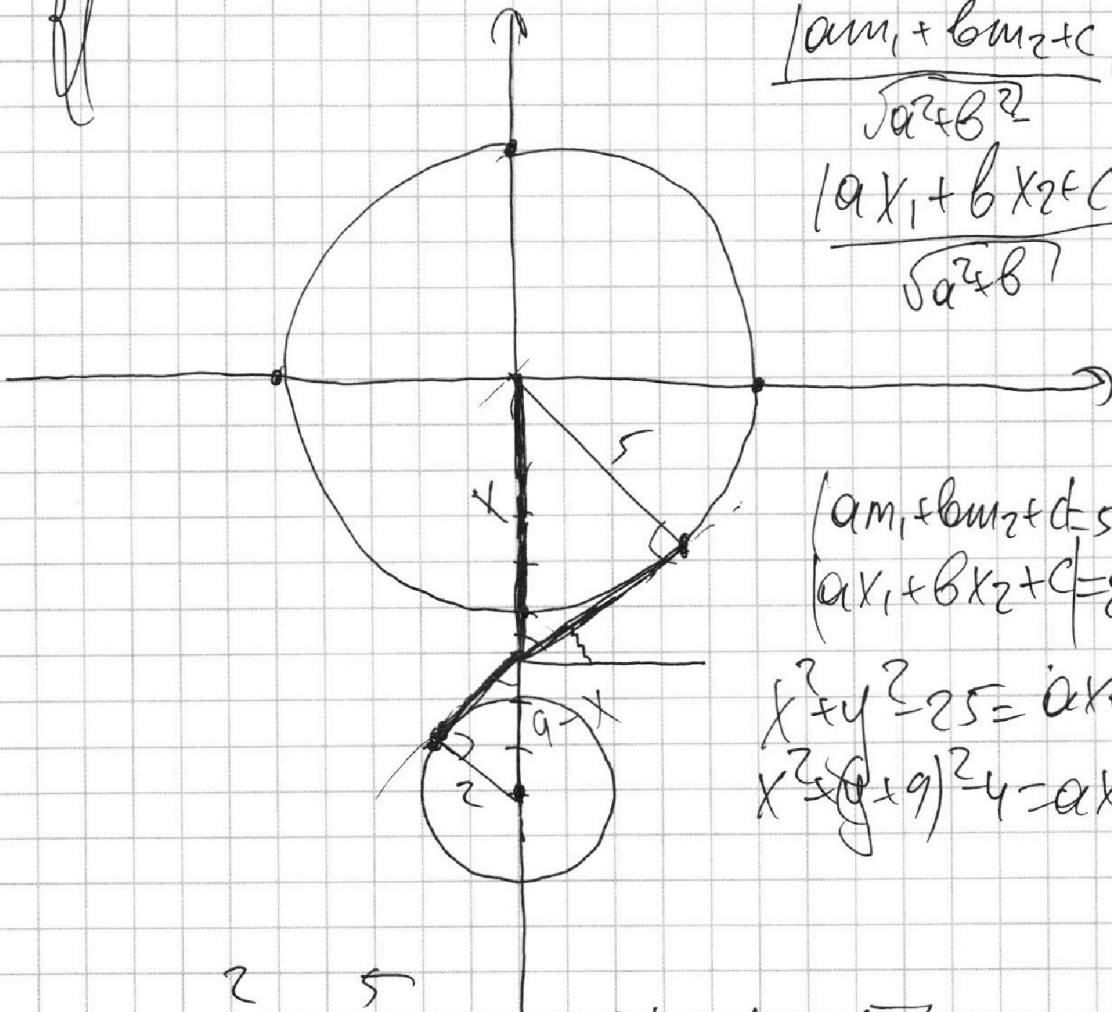
④
$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 & 6ay = -5x + 6 \\ x^2 + y^2 = 25 & y = -\frac{5}{6a}x + \frac{6}{6a} \\ x^2 + y^2 + 18y + 81 - 81 + 4y = 0 & \end{cases}$$

$$x^2 + (y + 9)^2 = 4$$

$$y = kx + b$$

$$\frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 5$$

$$\frac{|ax_1 + bx_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2$$



$$\begin{cases} |am_1 + bm_2 + c| = 5\sqrt{a^2 + b^2} \\ |ax_1 + bx_2 + c| = 2\sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 = ax + by + c \\ x^2 + (y + 9)^2 = 4 = ax + by + c \end{cases}$$

$$\frac{2}{9 - x} = \frac{5}{x}$$

$$2x = 45 - 5x$$

$$7x = 45$$

$$x = \frac{45}{7}$$

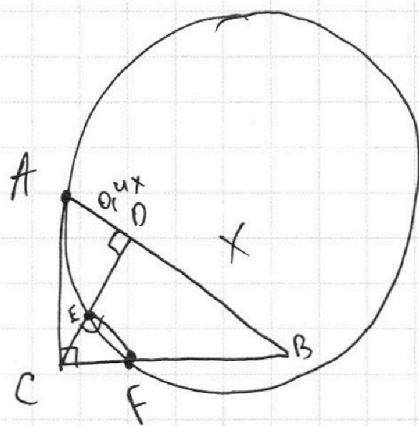
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~S_{ACD}~~ $S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot DC$
 $S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot EF$

~~S_{ACD}~~ $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} =$

$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

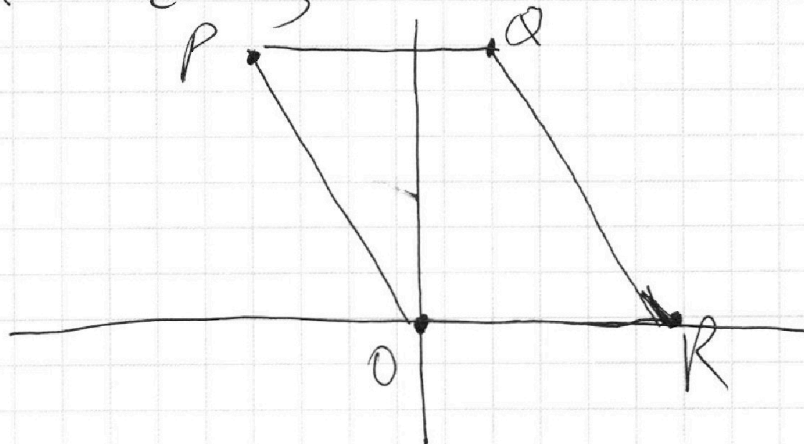
$ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$
 $bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$
 $ac: 2^{14} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

$T^2 = 2^{36} \cdot 5^{59} \cdot 5^{37}$

$a^2 b^2 c^2: 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$ $T = 2^{18} \cdot 5^{26} \cdot 5^{29} \sqrt{5k}$

~~abc~~ $abc = T$

$T^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \\ \underline{a^4 + a^3b} \\ a^2b^2 + ab^3 \\ \underline{-a^2b^2 + ab^3} \\ 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \\ \underline{a^4 + a^3b} \\ a^2b^2 + ab^3 + b^4 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{a^3+ab^2} \end{array}$$

$$3x^5 + 15x^4 - 16 = 0$$

$$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\begin{array}{cccc} & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

$$T^4 - 3a^3b - 4a^2b^2 - 3ab^3 + 5 = 0$$

$$3a^3b + 4a^2b^2 + 3ab^3$$

$$ab(3a^2 + 4ab + 3b^2)$$

$$D = 16b^2$$

$$(a+b)/(a^3+ab^2) = a^4 + a^2b^2 + a^3b + ab^3$$

$$a(a+b)/(a^3+ab^2) + b^4 + 5 = 0$$

2,5



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

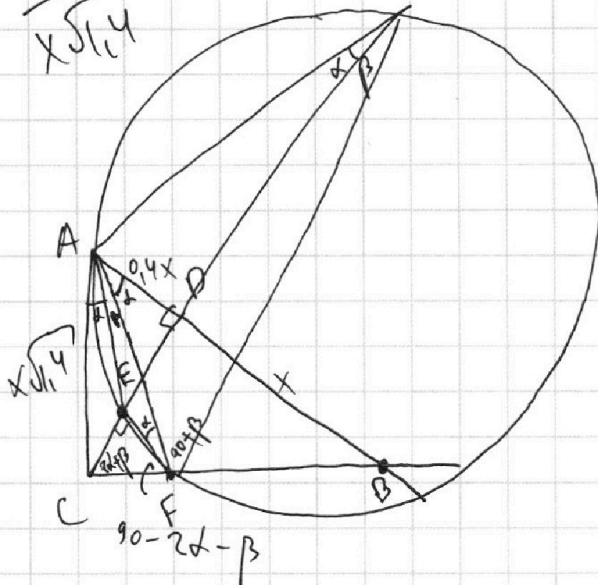
- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~ED~~
~~ED~~

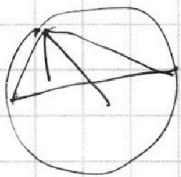
$$\frac{ED}{0,4x} = \frac{CF}{x\sqrt{1,4}}$$



$$AC^2 = 1,4x^2$$

$$\frac{CE}{CF} = \frac{0,4}{\sqrt{1,4}}$$

$$\frac{ED}{CF} = \frac{0,4}{\sqrt{1,4}}$$



~~$$90 - 2\alpha - \beta \leq 180 - \alpha - \beta$$~~

$$180 - 2\alpha - \beta - 90 + 2\alpha + \beta$$

$$\frac{CE}{CF} = \frac{1}{\sqrt{1,4}}$$

$$\frac{EF}{CF} = \frac{CB}{CF}$$

$$\frac{CE}{CF} = \frac{1}{\sqrt{1,4}}$$

$$\frac{ED}{CE}$$

$$CF - CE = \frac{CF^2}{\sqrt{1,4}}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{CF}{x\sqrt{1,4}}$$

$$CF = x\sqrt{1,4} \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$$

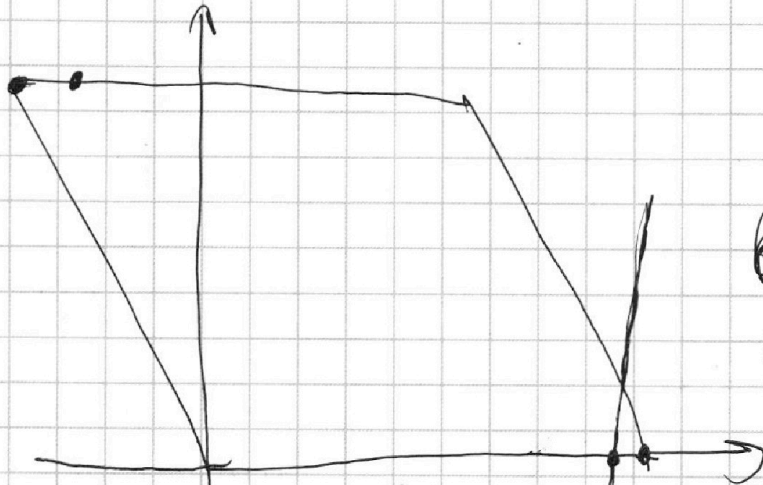
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



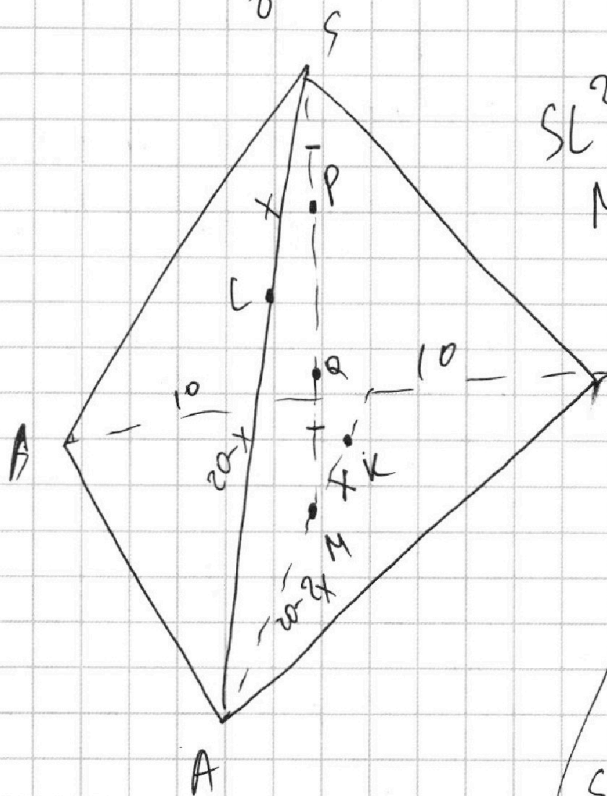
$$b^2 = l^2 + a^2 - 2al \cos \alpha$$

$$c^2 = l^2 + a^2 + 2al \cos \alpha$$

$$b^2 + c^2 = 2l^2 + 2a^2$$

$$l^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{2}$$

$$la^2 b^2 c^2 = \frac{(b^2 + c^2 - 2a^2)(100 + b^2 - 2c^2)}{2}$$



$$SL^2 = SP \cdot SQ$$

$$MK^2$$

$$SL = MK \quad 10 - 2x$$

$$c^2 = 20 - 2x$$

$$20 - 2x = 2x$$

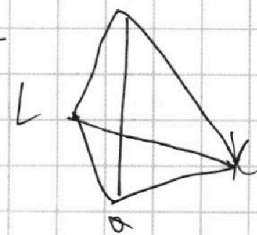
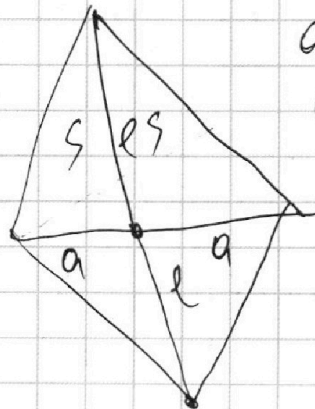
$$x = 10 - x$$

$$a \sin \alpha = 180$$

$$b \sin \beta =$$

$$a \sin \alpha = 180$$

$$b \sin \beta = 90$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{FB}$$

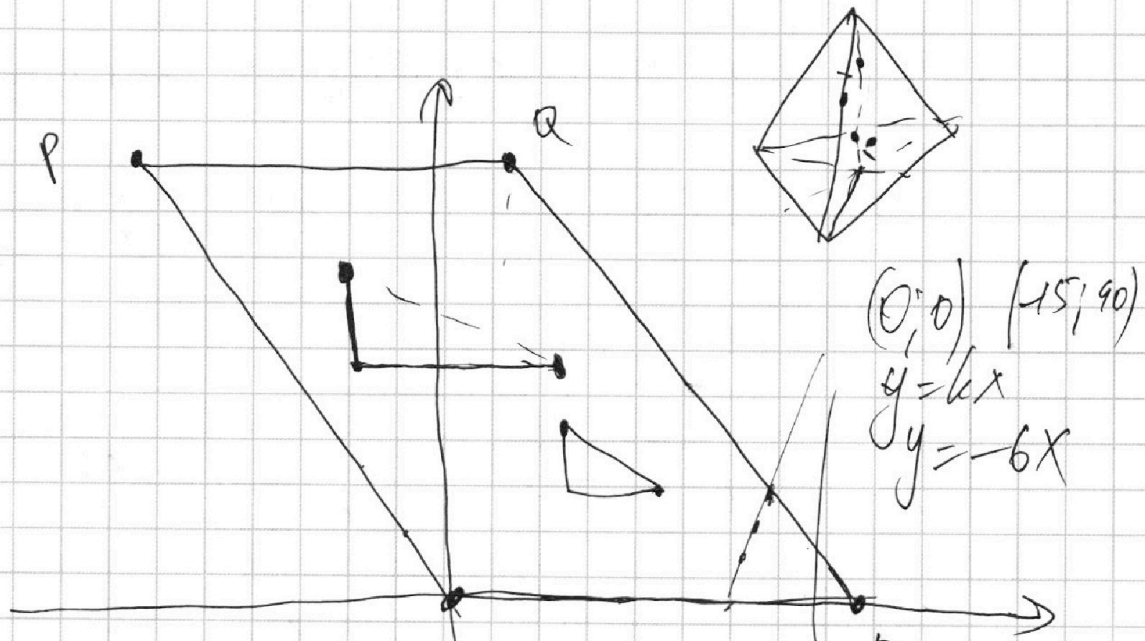
$$\frac{CE}{CF} = \frac{0,4}{\sqrt{1,4}}$$

$$CE = \sqrt{1,4} = CF_{0,4}$$

$$CE = y$$

$$CF = \frac{\sqrt{1,4} y}{0,4}$$

$$CF \cdot 0,4 =$$



$$(0,0) \quad (15,90)$$
$$y = kx$$
$$y = -6x$$

$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$

$$6(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_1) = 48$$

$$(x_2 - x_1) / (6 + k) = 48$$

$$x_2 - x_1 = 1$$

$$6 + k = 48 \quad k = 42$$

$$y = 42x + 6$$

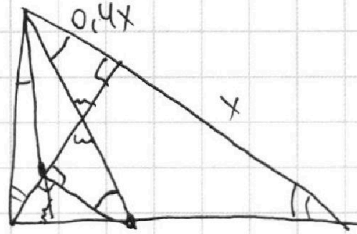
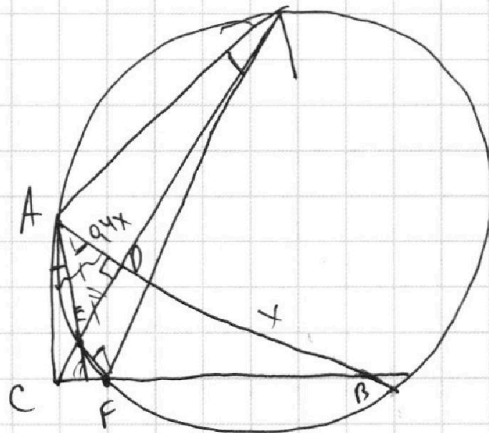
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



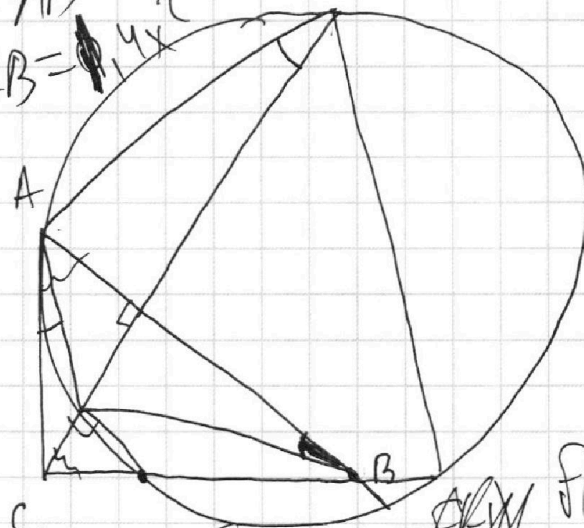
$$\cos \alpha \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

$$AC^2 = AD \cdot AB = 1.4x^2$$

$$AC = x\sqrt{1.4}$$

$$AC^2 = CE \cdot CX$$

$$CE \cdot CX = CF \cdot CY$$



$$\frac{AC \cdot AD}{CE \cdot CF} = \frac{x^2 \cdot 1.4 \cdot \sqrt{1.4}}{CE \cdot CF}$$

$$\begin{aligned} 3a^5 + 15a - 16 &= 15a^4 + 15 \\ 3b^5 + 15b - 16 &= 15b^4 + 15 \end{aligned}$$

$$AC^2 = CE \cdot CX = CF \cdot CY$$

$$x\sqrt{1.4}$$



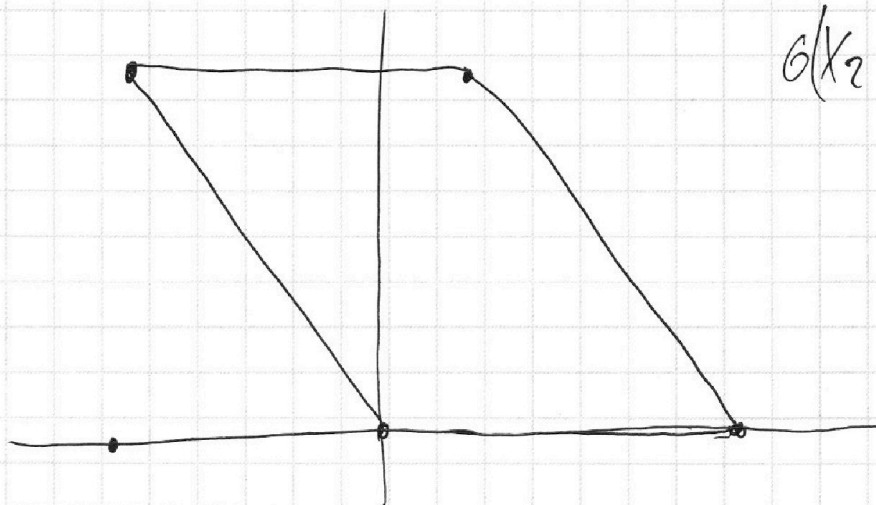
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$$

$$y = kx + b$$

$$y_1 = kx_1 + b$$

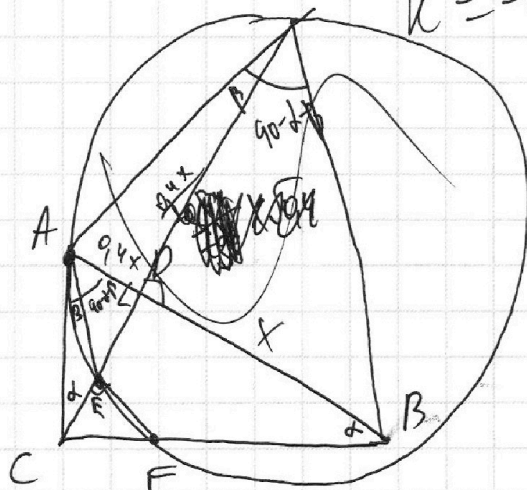
$$y_2 = kx_2 + b$$

$$6x_2 - 6x_1 + kx_1 + b - kx_2 - b = 48$$

$$(x_2 - x_1)(6 - k) = 48$$

$$6 - k = 48$$

$$k = -42$$



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{0,4x}{?}$$

$$? = \frac{0,4x}{\operatorname{tg} \beta}$$

~~$$0,4x^2 = 0,4x \operatorname{tg} \beta$$~~

~~$$\frac{0,4x}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{0,4x \cdot x}{\operatorname{tg} \beta} = x \sqrt{0,4} \quad \operatorname{tg} \beta = \sqrt{0,4}$$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{2^4}$$

$$= (b+c+a)(b+c-a)(a+(b-c))(a-(b-c)) =$$

$$= (b^2+2ac+c^2-a^2)(a^2-b^2+2bc-c^2)$$

$$m = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

$$4m = 2b^2+2c^2-a^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(x_2 - x_1) / (b + k) = 48$$

$$k = 42 \Rightarrow y = 42x + b$$

$$y = 0$$

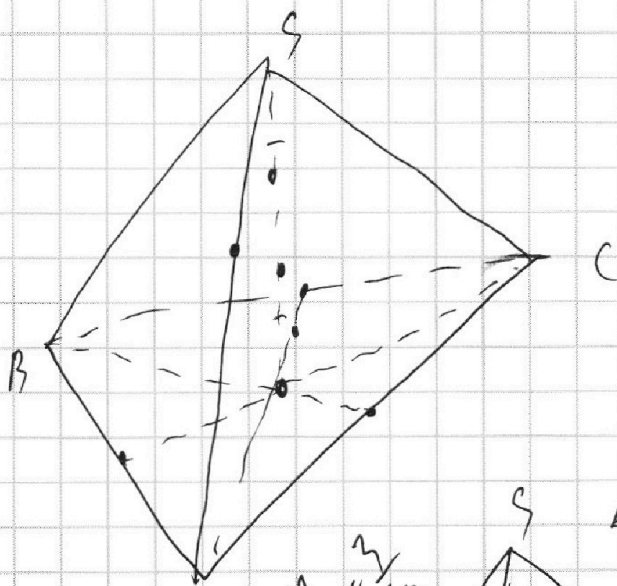
$$y =$$

$$y = kx + b$$

$$14k + b = 0$$

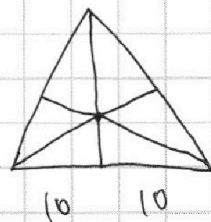
$$2 = 90k + b$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 90 & 1 \end{pmatrix}$$



SP = PQ

SABC



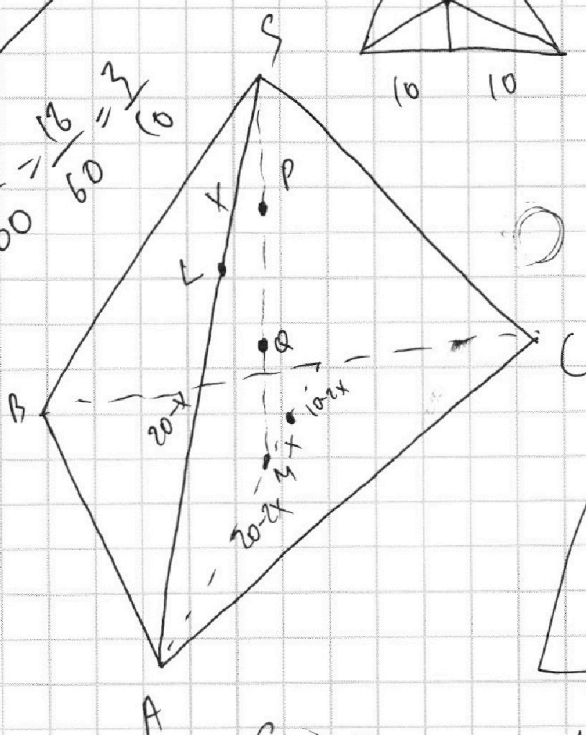
$$a^1 = \frac{a}{2}$$

$$2a^{12} = 2 \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

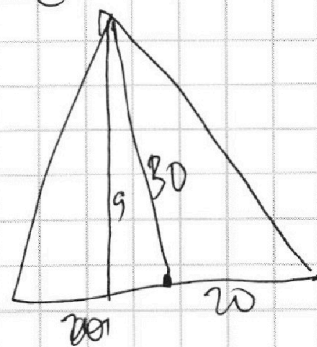
$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} =$$

$$= \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

$$\sin \alpha = \frac{120}{600} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$$



$$m = 30 - 2x$$



$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}}$$

$$S = 30 - 20 \sin \alpha = 600 \sin \alpha$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6) Расе-м такие A, B , где $x_2 > x_1$. Пусть
они лежат на прямой $y = kx + b$

тогда $y_1 = kx_1 + b$

$$y_2 = kx_2 + b$$

~~$$b(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_1) = 48$$~~

~~$$(b + k)(x_2 - x_1) = 48$$~~

$$1) x_2 - x_1 = 1 \Rightarrow k = 48$$

~~$$x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow \text{точки } (0; 0) \text{ и } (1; 48)$$~~

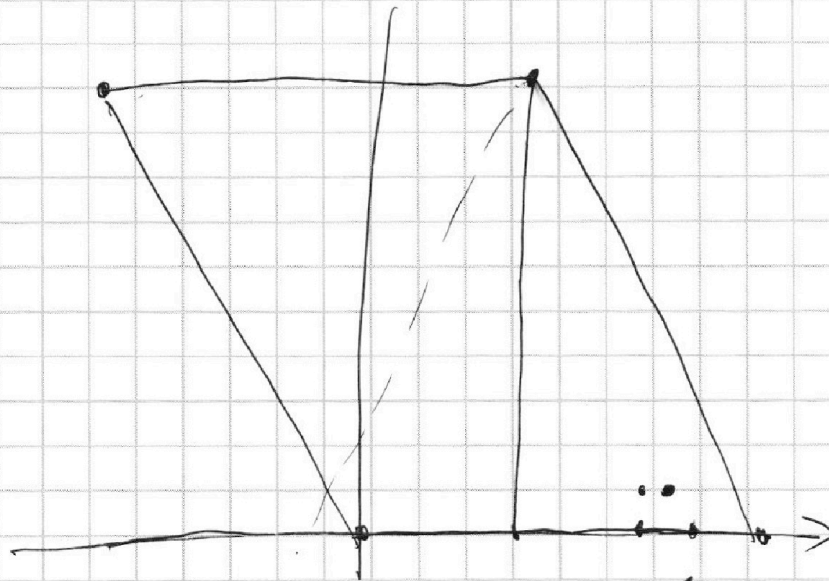
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1$$

$$y = 42x + 6$$

$$90 = 84 + 6$$

$$6 = 6$$

$$6 = 6$$

$$y = 42x + 6$$
$$y =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

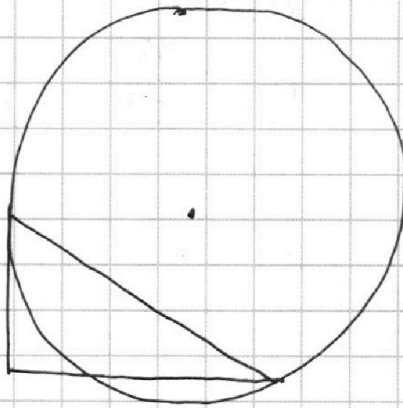


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

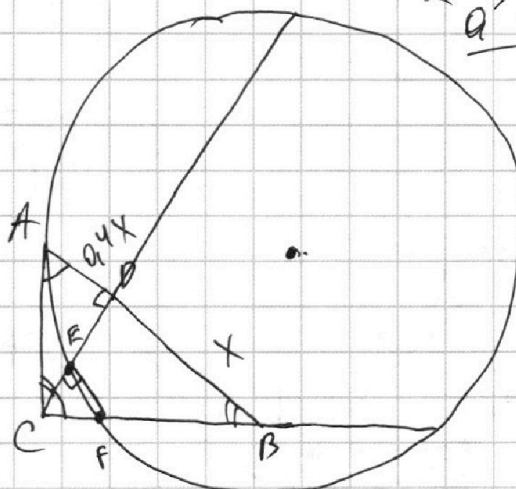
$\sin x = t$ ~~$\arcsin t = x$~~
 ~~$\sin^{-1} x$~~ $\arccos(\sin x)$

~~$10 \arccos(\sin x)$~~ $b^4 - b^4 + b^4$



$$\frac{CF}{CD} = \frac{CF}{CB}$$

$$\frac{a^5 + b^5}{a \cdot b}$$



$$\begin{array}{r}
 a^5 + 0 \cdot a^4 + 0 \cdot a^3 + 0 \cdot a^2 + 0 \cdot a + b^5 \quad | \quad a^5 + b^5 \\
 - a^5 - a^4 b \quad | \quad - a^4 b + a^3 b^2 \\
 \hline
 - a^4 b + a^3 b^2 \quad | \quad - a^3 b^2 + a^2 b^3 \\
 - a^3 b^2 + a^2 b^3 \quad | \quad - a^2 b^3 + a b^4 \\
 \hline
 - a^2 b^3 + a b^4 \quad | \quad - a b^4 + b^5 \\
 \hline
 - a b^4 + b^5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4 \cdot 5 = 0 \\
 ab(a^3 + b^3)
 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^{13}$$

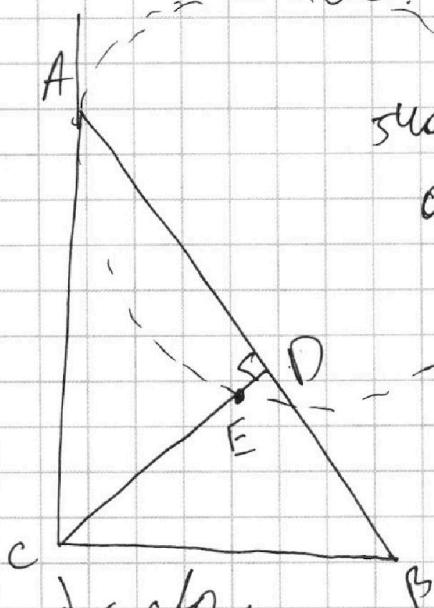
$$ac : 2^{16} \cdot 3^3 \cdot 5^{20}$$

$$\frac{5}{45} = \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{CD}{CF} = \frac{CB}{CD}$$

~~abc~~ $abc : 2^{18} \cdot 3^{26} \cdot 5^{29}$

$$\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB}$$



$$\sin \alpha \cdot 35 = 0$$

$$a = \frac{35}{54}$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4$$

$$AB = 1,4 BD$$

$$\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB}$$

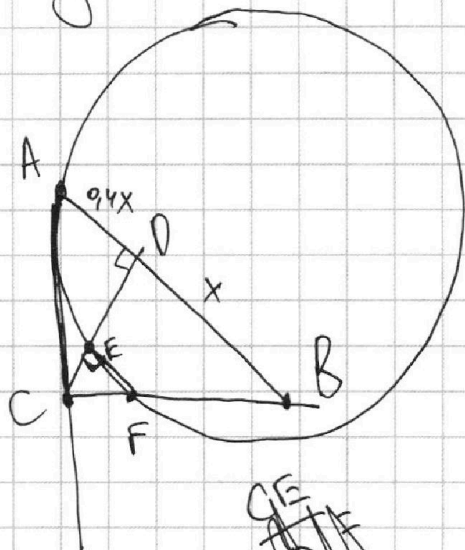
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$CE \cdot CD = CF \cdot CB$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB}$$

$$\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB}$$

$$CB = CD$$



$$\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB}$$