c= a+b+c≥38 a+b≥14 b+c≥18 a+c≥43 c=11 b=4 a=7

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

a+b=7 b+c=13 a+c=14 a+b+c=17 a+b+c≥22 a+b≥11 b+c≥15 a+c≥17

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

c=10 a=4 b=3

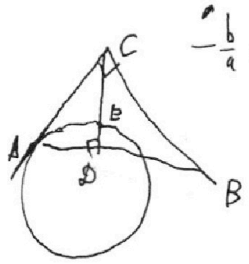
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.



5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

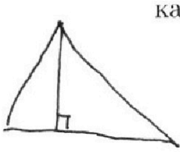
Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.




3·0,13= 0,3·13

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Лист 1 из 1 по ней

$ab \,\vdots\, 2^7 3^{11} 5^{14}$

$bc \,\vdots\, 2^{13} 3^{15} 5^{18} \Rightarrow ab\cdot bc\cdot ac \,\vdots\, 2^7\cdot 3^{11}\cdot 5^{14}\cdot 2^{13}\cdot 3^{15}\cdot 5^{18}\cdot 2^{14}\cdot 3^{17}\cdot 5^{43} \Rightarrow$

$ac \,\vdots\, 2^{14} 3^{17} 5^{43}$

$(abc)^2 \,\vdots\, 2^{34}\cdot 3^{43}\cdot 5^{75} \Rightarrow$ (т.к. $16\cdot 2<34$; $21\cdot 2<43$; $37\cdot 2<75$)

$abc \,\vdots\, 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{38}$ (★) $\cancel{\Rightarrow abc \geq 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{38}}$

Теперь приведём пример, когда $abc = 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$

$a = 2^4\cdot 3^7\cdot 5^{22}$

$b = 2^3\cdot 3^4$

$c = 2^{10}\cdot 3^{11}\cdot 5^{21}$

$ab \,\vdots\, 2^7\cdot 3^{11} 5^{22} \,\vdots\, 2^7 3^{11}\cdot 5^{14}$

$bc \,\vdots\, 2^{13}\cdot 3^{15}\cdot 5^{21} \,\vdots\, 2^{13}\cdot 3^{15}\cdot 5^{18}$

$ac \,\vdots\, 2^{14}\cdot 3^{18}\cdot 5^{43} \,\vdots\, 2^{14}\cdot 3^{17}\cdot 5^{43}$.

С другой стороны, $abc \geq 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$.

Почему? Потому что из (★) следует, что степень вхождения в abc двойки ≥ 17, степень вхождения тройки ≥ 22.

А степень вхождения пятерки ≥ 43, т.к. по условию $ac \,\vdots\, 5^{43}$.

Поэтому $abc \,\vdots\, 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43} \Rightarrow abc \geq 2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$.

Ответ: $2^{17}\cdot 3^{22}\cdot 5^{43}$

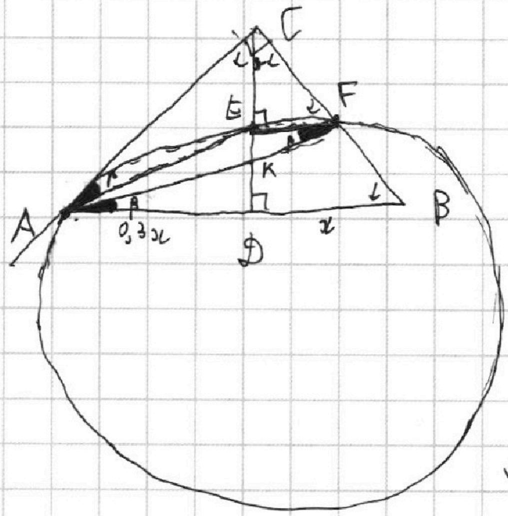
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Лист 1 из 1 по ней



Пусть, $BD = x$, тогда, $AB = 1,3x \Rightarrow AD = 1,3x - x = 0,3x$

$EF \parallel AB \Rightarrow EF \perp CD$ (т.к. $AB \perp CD$)

Т.к. AC — касательная, $\angle CAE = \angle EFA$.

Пусть, $K = AF \cap ED$

$\angle EFA = \angle FAB$ (т.к. $EF \parallel AB$ — накрест лежащие)

Пусть, $\angle CAE = \beta = \angle FAB = \angle AFE$

Пусть, $\angle ACD = \alpha$

$\angle BCB = 90 - \alpha$. Из $\triangle CDB$ $\angle CBD = 90 - (90 - \alpha) = \alpha$. Т.к. ACB прямоуг. с C высотой:

$CD^2 = AD \cdot BD = 0,3x^2$; $\boxed{CD = x\sqrt{0,3}}$. По т. Пифагора для $\triangle ADC$:

$AC = \sqrt{0,09x^2 + 0,3x^2} = \sqrt{0,39x^2}$; $\boxed{AC = x\sqrt{0,39}}$

Из т. Пифагора для $\triangle CDB$: $CB = \sqrt{0,3x^2 + x^2} = \sqrt{1,3x^2}$; $\boxed{BC = x\sqrt{1,3}}$

$\triangle ACE \sim \triangle ABF$ (по 2-м углам: $\angle ACE = \angle ABC = \alpha$; $\angle CAE = \angle BAF = \beta$) $\Rightarrow$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BF};\quad \frac{CE}{BF} = \frac{x\sqrt{0,39}}{1,3x};\quad \boxed{\frac{CE}{BF} = \frac{\sqrt{0,39}}{1,3}}\quad (\bigstar)$$

$\triangle CEF \sim \triangle CDB$ (т.к. $EF \parallel BD$) $\Rightarrow$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{BC};\quad \frac{CE}{x\sqrt{0,3}} = \frac{x\sqrt{1,3} - BF}{x\sqrt{1,3}};\quad \frac{CE}{\sqrt{0,3}} = \frac{x\sqrt{1,3} - BF}{\sqrt{1,3}}$$

$$CE \cdot \sqrt{1,3} = x\sqrt{1,3} \cdot \sqrt{0,3} - BF \cdot \sqrt{0,3}$$ Из $(\bigstar)$: $BF = \dfrac{CE \cdot 1,3}{\sqrt{0,39}}$

$$CE \cdot \sqrt{1,3} = x\sqrt{1,3} \cdot \sqrt{0,3} - \frac{CE \cdot 1,3 \cdot \sqrt{0,3}}{\sqrt{0,39}};\quad CE \cdot \sqrt{0,39} \cdot \sqrt{1,3} = x\sqrt{1,3} \cdot \sqrt{0,3} - CE \cdot 1,3 \cdot \sqrt{0,3}$$

$$CE \cdot \underset{\parallel}{\sqrt{0,39}} = x\sqrt{0,3} - CE \cdot \sqrt{1,3} \cdot \sqrt{0,3};\quad CE \cdot \sqrt{1,3} = x - CE \cdot \sqrt{1,3}$$

$CE \cdot \sqrt{0,3} \cdot \sqrt{1,3}$

$$2CE \cdot \sqrt{1,3} = x;\quad \boxed{CE = \frac{x}{2\sqrt{1,3}}}$$

$\triangle ACD \sim \triangle CFE$ (по 2-м углам: $\angle ACD = \angle CFE$, $\angle ADC = \angle CEF = 90$) $\Rightarrow \dfrac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = k^2 = \left(\dfrac{AD}{CE}\right)^2$.

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{0,3x \cdot 2\sqrt{1,3}}{x}\right)^2 = (0,3 \cdot 2\sqrt{1,3})^2 = 0,09 \cdot 4 \cdot 1,3 = 0,36 \cdot 1,3 = 0,468.$$

Ответ: 0,468.

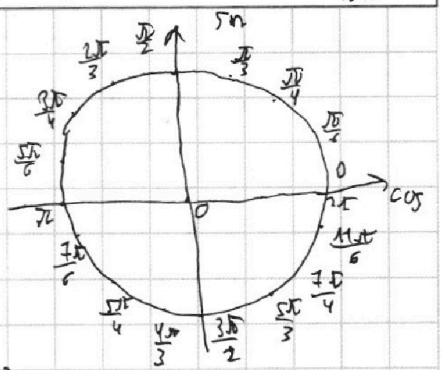
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Лист № 1 из 1 по ней



$$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{5}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{5}\right) = \sin x$$

$\sin(3x) = 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)$ $\quad\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cdot\cos(x)$

$\cancel{\sin(3x}$ $\sin(5x) = \sin(3x+2x) = \sin(3x)\cdot\cos(2x) + \cos(3x)\cdot\sin(2x) =$

$(3\sin(x)\cdot\cos^2(x) - \sin^3(x))(\cos^2(x) - \sin^2(x)) + (\cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cdot\cos(x))\cdot 2\sin(x)\cdot\cos(x)$

$= \boxed{3\sin(x)\cdot\cos^4(x)} - \sin^3(x)\cdot\cos^2(x) - 3\sin^3(x)\cdot\cos^2(x) + \sin^5(x)$

$\boxed{+2\sin(x)\cdot\cos^4(x)} - 6\sin^3(x)\cos^2(x) = 5\sin(x)\cdot\cos^4(x) + \sin^5(x) - 10\sin^3(x)\cdot\cos^2(x) =$

$5\sin(x)\,(1-\sin^2(x))^2 + \sin^5(x) - 10\sin^3(x)\,(1-\sin^2(x)) =$

$5\sin(x)(1+\sin^4(x) - 2\sin^2(x)) + \sin^5(x) - 10\sin^3(x) + 10\sin^5(x) =$

$5\sin(x) + 5\underline{\sin^5(x)} - 10\sin^3(x) + \underline{11\sin^5(x)} - 10\sin^3(x) =$

$16\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

лист 1/3 по ней

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 & (1) \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (2) \end{cases}$$

1-е уравнение однозначно задаёт x через y: $x=7b-3ay$ => чтобы система имела 4 решения, 2-е уравнение системы должно иметь 4 решения, а это равносильно:

$$\left[\begin{array}{ll} x^2+14x+y^2+45=0 & (\mathrm{I}) \\ x^2+y^2-9=0 & (\mathrm{II}) \end{array}\right.$$

=> (I) и (II) должны иметь по 2 корня, и все эти 4 корня должны быть различными.

(I): $x^2+14x+y^2+45=0$

$D=196-4y^2-180=16-4y^2$

$x_{1,2}=\dfrac{-14\pm2\sqrt{4-y^2}}{2}$

$\boxed{x_{1,2}=-7\pm\sqrt{4-y^2}}$

$16-4y^2>0$

$4-y^2>0$

$y^2<4$; $\boxed{-2<y<2}$

(II): $x^2+y^2-9=0$

$x^2=9-y^2$

$\boxed{x=\pm\sqrt{9-y^2}}$

$9-y^2>0$

$y^2<9$

$\boxed{-3<y<3}$

Совпадение корней:

$-7+\sqrt{4-y^2}\neq\sqrt{9-y^2}$

$\sqrt{4-y^2}\neq\sqrt{9-y^2}+7$

$4-y^2\neq9-y^2+49+14\sqrt{9-y^2}$

$54+14\sqrt{9-y^2}\neq0$ — но это верно всегда

$-7-\sqrt{4-y^2}\neq\sqrt{9-y^2}$

$7+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{9-y^2}\neq0$ — верно всегда.

$-7+\sqrt{4-y^2}\neq-\sqrt{9-y^2}$

$\sqrt{4-y^2}+\sqrt{9-y^2}\neq7$

~~$4-y^2+9-y^2+2$~~

$\sqrt{4-y^2}\neq7-\sqrt{9-y^2}$

$4-y^2\neq49+9-y^2-14\sqrt{9-y^2}$

$14\sqrt{9-y^2}\neq62$

$\sqrt{9-y^2}\neq\dfrac{31}{7}$

$9-y^2\neq\dfrac{961}{49}$; $y^2\neq9-\dfrac{961}{49}<0$ => верно всегда

$-7-\sqrt{4-y^2}\neq-\sqrt{9-y^2}$

$\sqrt{9-y^2}\neq7+\sqrt{4-y^2}$

$9-y^2\neq49+4-y^2+14\sqrt{4-y^2}$

~~$44+14\sqrt{4}$~~

$44+14\sqrt{4-y^2}\neq0$ — всегда верно

Значит, что если у нас получились 4 корня, то это действительно 4 различных корня.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

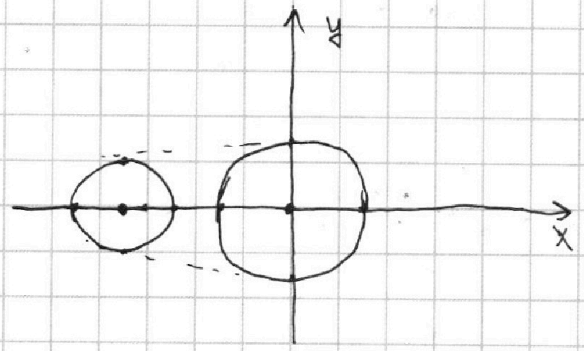
лист 2 из 3

~~Итак, у нас~~ $\begin{cases} -2<y<2 \\ -3<y<3 \end{cases} \Rightarrow$ $\boxed{-2<y<2}$

~~1-е уравнение перепишем в виде:~~

Перепишем 2-е уравнение в виде $\left[\begin{array}{l} x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=2^2 \\ x^2+y^2=3^2 \end{array}\right.$ — окружность с центром $(-7;0)$ радиуса 2
— окружность с центром $(0;0)$ радиуса 3.



1-е: $x+3ay-7b=0$

$x+3ay=7b$

$y=\dfrac{7b-x}{3a}$ — прямая при $a\neq0$

При $a=0$: $x=7b$ — пересекает окружности в 4 точках ~~при~~ ни при одном значении $x\neq$ $\boxed{a=0 \text{ не подходит}}$

Зафиксируем a. Тогда данное $y=\dfrac{-x}{3a}+\dfrac{7b}{3a}$ уравнение это прямые с фикс. угловым коэффициентом.
Она должна иметь 4 точки пересечения с окружностями, т.е. 2 с перв. и 2 со втор.
Случаи, когда прямые с фикс. угловым коэф. имеет 2 точки пересечения с окружностью, ограничены случаями касания прямой с таким угл. коэф с данной окружностью.

$x+3ay-7b=0$ Пусть, прямая ~~$y=kx+b$ касается~~

$-7\pm\sqrt{4-y^2}+3ay-7b=0$ ~~$y=k$~~ $y=kx+t$ касается окружности $x^2+y^2-9=0$,

тогда, ~~урав~~ система $\begin{cases} y=kx+t \\ x^2+y^2-9=0 \end{cases}$ имеет 1 решение $\Rightarrow$ у квадратного трехчлена

$x^2+(kx+t)^2-9=0$; $D=0$; $x^2+k^2x^2+2ktx+t^2-9=0$;

$x^2(k^2+1)+x\cdot2kt+t^2-9=0$; $4k^2t^2-4(t^2-9)(k^2+1)=0$

$k^2t^2+(9-t^2)(k^2+1)=0$. $k^2t^2+9k^2-k^2t^2+9-t^2=0$

$9k^2+9-t^2=0$. $t^2=9(k^2+1)$; $t=\pm3\sqrt{k^2+1}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Лист 3 из 3 по пис

Итак, прямая с угловым коэф. $k=-\frac{1}{3a}$ будет касаться 2-й окружности при свободном члене:

$$\left[\begin{array}{l} 3\sqrt{\frac{1}{9a^2}+1} \\ -3\sqrt{\frac{1}{9a^2}+1} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$-3\sqrt{\frac{1}{9a^2}+1} \le \frac{7b}{3a} \le 3\sqrt{\frac{1}{9a^2}+1} \qquad -\frac{9}{7}\sqrt{\frac{1}{9a^2}+1} \le \frac{b}{a} \le \frac{9}{7}\sqrt{\frac{1}{9a^2}+1}.$$

$$\begin{cases} -\frac{9}{7}\sqrt{\frac{1}{9a^2}+1} \le \frac{b}{a} \\ \frac{b}{a} \le \frac{9}{7}\sqrt{\frac{1}{9a^2}+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{b}{a} \ge 0 \\ \frac{b^2}{a^2} \le \left(\frac{1}{9a^2}+1\right)\cdot\frac{81}{49} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \frac{b}{a} \le 0 \\ \frac{b^2}{a^2} \le \frac{81}{49}\cdot\left(\frac{1}{9a^2}+1\right) \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{b}{a} \ge 0 \\ b^2 \le \left(\frac{1}{9}+a^2\right)\frac{81}{49} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \frac{b}{a} \le 0 \\ b^2 \le \frac{81}{49}\left(\frac{1}{9}+a^2\right) \end{array}\right. \end{cases}$$

Похожую же систему можно составить для второй окружности, и у системы из этих двух систем должно быть решение.

Для 2-й окружности:

$$\begin{cases} y=kx+t \\ x^2+14x+49+y^2=4 \end{cases}$$

$$x^2+14x+49+k^2x^2+2ktx+t^2-4=0$$

$$x^2(k^2+1)+x(2kt+14)+t^2+45=0$$

$D=0$

$$4k^2t^2+56kt+196-4(t^2+45)(k^2+1)=0$$

$$k^2t^2+14kt+49-k^2t^2-45k^2-t^2-45=0$$

$$14kt-45k^2-t^2+4=0$$

$$t^2-14kt+45k^2-4=0$$

$$D=196k^2-4(45k^2-4)=$$

$$4(49k^2-45k^2+4)=4(4k^2+4)=$$

$$16(k^2+1)$$

$$t_{1,2}=\frac{14\pm4\sqrt{k^2+1}}{2} \qquad t_{1,2}=7\pm2\sqrt{k^2+1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

лист 1 из 2 по ней

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4 \\ \log_7^4(y) + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$$

ОДЗ:
$$\begin{cases} 6x>0 \\ 6x\neq 1 \\ 36x^2>0 \\ 36x^2\neq 1 \\ y>0 \\ y\neq 1 \\ y^2>0 \\ y^2\neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>0 \\ x\neq \frac{1}{6} \\ x\neq 0 \\ x\neq \pm\frac{1}{6} \\ y>0 \\ y\neq 1 \\ y\neq 0 \\ y\neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &x\in(0;\tfrac{1}{6})\cup(\tfrac{1}{6};+\infty) \\ &y\in(0;1)\cup(1;+\infty) \end{aligned}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\log^4_{6x}(6x)}{\log^4_{6x}(7)} - 2\log_{6x}7 = \dfrac{\log_{6x}(343)}{2} - 4 \\ \dfrac{\log^4_y(y)}{\log^4_y(7)} + 6\log_y(7) = \dfrac{\log_y(7^5)}{2} - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\log^4_{6x}(7)} - 2\log_{6x}7 = \dfrac{3\log_{6x}(7)}{2} - 4 \quad (1) \\ \dfrac{1}{\log^4_y(7)} + 6\log_y(7) = \dfrac{5}{2}\log_y(7) - 4 \quad (2) \end{cases}$$

(1) Замена: $\log_{6x}7 = t$: $\quad \dfrac{1}{t^4} - 2t = \dfrac{3t}{2} - 4$; $\quad \dfrac{2}{t^4} - 4t = 3t - 8$

$\dfrac{2}{t^4} = 7t - 8$; $\quad \dfrac{7t^5 - 8t^4 - 2}{t^4} = 0$ $\quad$ ($t\neq 0$ всегда)

$\boxed{7t^5 - 8t^4 - 2 = 0}$ (I)

(2) Замена: $\log_y(7) = k$: $\quad \dfrac{1}{k^4} + 6k = \dfrac{5}{2}k - 4$ ($k\neq 0$ всегда)

$\dfrac{2}{k^4} + 12k = 5k - 8$; $\quad \dfrac{2}{k^4} + 7k + 8 = 0$; $\quad \dfrac{7k^5 + 8k^4 + 2}{k^4} = 0$

$\boxed{7k^5 + 8k^4 + 2 = 0}$ (II). ~~Сложим (I) и (II).~~

$(6x)^t = 7 \quad 6x = \sqrt[t]{7}$; $\quad x = \dfrac{\sqrt[t]{7}}{6}$; $\quad y^k = 7$; $y = \sqrt[k]{7}$

$xy = \dfrac{7^{\frac{1}{t}+\frac{1}{k}}}{6} = \dfrac{7^{\frac{k+t}{kt}}}{6}$

Сложим (I) и (II): $\cancel{7t^5 + 7k^5 - 8t^4 + 8k^4 = 0}$

$\cancel{7(k+t)(t^4 - kt^3 + k^2t^2 - k^3t + k^4) + 8(k^2+t^2)(k+t)(k-t) = 0}$

Пусть, $\dfrac{1}{t} = a$; $\dfrac{1}{k} = b$. Надо найти $a+b$. (I) и (II) перепишутся в виде:

$\dfrac{7}{a^5} - \dfrac{8}{a^4} - 2 = 0$; $\quad 7 - 8a - 2a^5 = 0$; $\quad \boxed{2a^5 + 8a - 7 = 0}$

$\dfrac{7}{b^5} + \dfrac{8}{b^4} + 2 = 0$; $\quad 7 + 8b + 2b^5 = 0$; $\quad \boxed{2b^5 + 8b + 7 = 0}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

лист 2 из 2 по ней

Сложим последние 2 уравнения:

$2a^5+2b^5+8a+8b=0$

$2(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)+8(a+b)=0$

$\cancel{(2+4)}\ (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^2+4)=0$

$\left[\begin{array}{l} a+b=0 \quad (I) \\ a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4+4=0 \quad \neq 0 \end{array}\right.$

При $a+b=0$

$xy=\frac{7^{a+b}}{6}=\frac{1}{6}.$

Ответ: $\frac{1}{6}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

лист 3 из 3 по ней

~~Ну, я считаю, что $t\geq 0$ (т.к. при замене A на B, B на A~~

При $t=0$: $\Delta y = x$; $\Delta x = 10$.

$x_2 = x_1 + 10 - t$

$y_2 = y_1 + 4t$

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 68 \\ 68x_1 + 17y_1 \geq 0 \\ -34x_1 + 544 - 7y_1 \geq 0 \end{cases}$$

$0 \leq y_1 + 4t \leq 68$

$68x_1 + 680 - 68t + 17y_1 + 68t$

$kx + b = 0$ $(2;68)$ $(19;0)$

$$\begin{cases} 2k + b = 68 \\ 19k + b = 0 \end{cases}$$

$68 - 2k = -19k$

$68 = -17k$; $k = -4$

$-8 + b = 68$

$b = 76$

$$\boxed{y = -4x + 76}$$

$kx + b = 0$ $(-17;68)$ $(0;0)$

$$\begin{cases} -17k + b = 68 \\ b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0 \\ k = -\frac{68}{17} = -4 \end{cases}$$

$$\boxed{y = -4x}$$

Т.е. попадание точки $(x;y)$ внутрь парал. равносильно системе:

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 68 \\ -4x - y \leq 0 \\ -4x + 76 - y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq y \leq 68 \\ 4x + y \geq 0 \\ 4x + y \leq 76 \end{cases}$$

$x_2 = x_1 + 10 - t$

$y_2 = y_1 + 4t$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 68 \\ 4x_1 + y_1 \geq 0 \\ 4x_1 + y_1 \leq 76 \\ 0 \leq y_1 + 4t \leq 68 \\ 4x_1 + 40 - 4t + y_1 + 4t \geq 0 \\ 4x_1 + 40 - 4t + y_1 + 4t \leq 76 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 68 \\ 4x_1 + y_1 \geq 0 \\ 4x_1 + y_1 \leq 76 \\ 0 \leq y_1 + 4t \leq 68 \\ 4x_1 + y_1 \geq -40 \\ 4x_1 + y_1 \leq 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq 4x_1 + y_1 \leq 36 \\ 0 \leq y_1 \leq 68 \\ 0 \leq y_1 + 4t \leq 68 \end{cases}$$

Каждой тройке $(x_1;y_1;t)$ соответствует ~~решение~~ пара из пар. точек.

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 68 \\ -\frac{y_1}{4} \leq x_1 \leq \frac{36 - y_1}{4} \\ -\frac{y_1}{4} \leq t \leq \frac{68 - y_1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 68 \\ -\frac{y_1}{4} \leq x_1 \leq 9 - \frac{y_1}{4} \\ -\frac{y_1}{4} \leq t \leq 17 - \frac{y_1}{4} \end{cases}$$

Рассмотрим все случаи остатков y_1 при делении на 4.

1) $y_1 \equiv_4 0 \Rightarrow -k \leq x_1 \leq 9 - k$ — 10 значений

$y_1 = 4k$ $\quad -k \leq t \leq 17 - k$ — 18 значений —

Всего тогда $\underline{18 \cdot 10 = 180}$ значений

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

лист 3 из 3 по ней

② $\cancel{y_1 \equiv_6 1}$ $y_1 \equiv_4 r$; $\cancel{r \neq 0}$ $r \not\equiv_4 0$

$y_1 = 4k + r$

$-\frac{4k-r}{4} \le x_1 \le 9 - \frac{4k-r}{4}$

$-k - \frac{r}{4} \le x_1 \le 9 - k - \frac{r}{4}$; x_1 целое $\Rightarrow$

$-k \le x_1 \le 9 - k - 1$

$-k \le x_1 \le 8 - k$ - 9 значений

- Аналогично для t 17 значений $\Rightarrow$ всего $17 \cdot 9 = 153$ значение

Среди значений y_1 (от 0 до 68) - всего их 69

есть 18 кратных 4 и $69 - 18 = 51$ - не кратных. Тогда всего

пар $18 \cdot 180 + 51 \cdot 153 = 3240 + 7803 = 11\,043$.

Ответ: 11 043.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

лист 1 из 3 по пей

$4(x_2-x_1)+y_2-y_1=40$; $x_2-x_1=k$, $y_2-y_1=l$

$4k+l=40$; $l \vdots 4$; $l=4t$

$4k+4t=40$

$k+t=10$ $\quad \boxed{l=4t,\ k=10-t}$

~~k может принимать значения~~

$|k| \le 19+17=36$

$|l| \le 68-0=68.$ $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} -36 \le 4t \le 36 \\ -68 \le 10-t \le 68 \end{array}\right.$

t целое!

$\left[\begin{array}{l} -9 \le t \le 9 \\ -58 \le t \le 78 \end{array}\right.$ $\quad \boxed{-9 \le t \le 9}$

Что значит, что точка $(x;y)$ лежит внутри пары.

Во-первых это значит, что $0 \le y \le 68.$

Теперь посчитаем уравнения сторон пары, не параллельных оси x:

$kx+b=0$ $(2;68)$ $(19;0)$

$\begin{cases} 2k+b=68 \\ 19k+b=0 \end{cases}$ $\quad 68-2k=-19k$

$68=-17k$

~~$34=-7k$~~

$k=-\frac{34}{7}$

~~$b=68$~~ $-\frac{68}{7}+b=68$

$b=68\left(1+\frac{1}{7}\right)=\frac{68\cdot 8}{7}=\frac{544}{7}$

$-\frac{34}{7}x+\frac{544}{7}=y$

$\boxed{\cancel{-\frac{34}{7}x+\frac{544}{7}\ge 0}}$ $\quad -\frac{34}{7}x+\frac{544}{7}-y \ge 0$

~~$-34x+544 \ge 0$~~ $\quad \boxed{-34x+544-7y \ge 0}$

$kx+b=0$; $(-17;68)$ $(6;0)$

$\begin{cases} b=0 \\ -17k=68 \end{cases}$; $k=-\frac{68}{17}$

$-\frac{68}{17}x=y$

$-\frac{68}{17}x-y \le 0$

~~$-68x$~~

$\boxed{68x+17y \ge 0}$

$\boxed{4x+y \ge 0}$

Итак, лежание точки $(x;y)$ внутри пары равносильно системе:

$$\begin{cases} 0 \le y \le 68 \\ 68x+17y \ge 0 \\ -34x+544-7y \ge 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$-3{,}5$

$x^2+14x+y^2+45=0$ (1)

(1): $D=196-4y^2-180=16-4y^2$

$x^2+y^2-9=0$ (2)

$x_{12}=\dfrac{-14\pm2\sqrt{4-y^2}}{2}$: $\boxed{x_{12}=-7\pm\sqrt{4-y^2}}$

(2): $\boxed{x_{12}=\pm\sqrt{9-y^2}}$

3,5

K=3

$x=7b-3ay$

$(x+7)^2+y^2-4=0$

$\frac{1}{2}\log$

$x=\sqrt[6]{\frac{7}{6}}$

$y=\sqrt[k]{7}$

$\frac{4\cdot2^5}{7^5}-\frac{8\cdot2^4}{7^4}=$

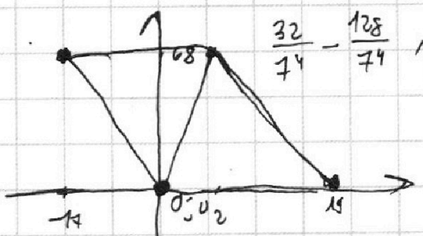
$\frac{32}{7^4}-\frac{128}{7^4}$

$\sqrt{9-y^2}+3ay=7b$

$t=0$:

$\log_{6x}(7)=0$

$6x^0=7$



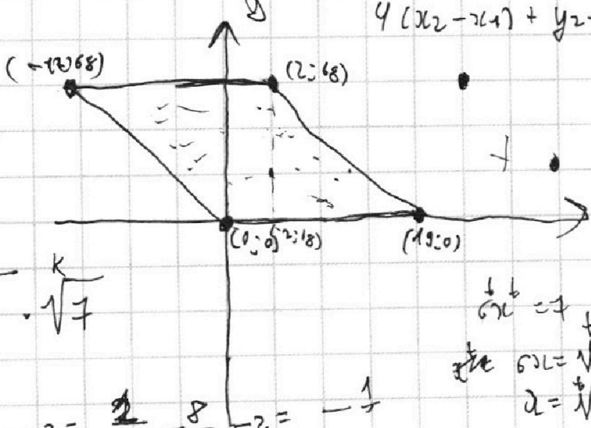
$6x^t=7$

$y^k=7$

$x+3ay=7b$

$4x_2-4x_1+y_2-y_1=40$

$4(x_2-x_1)+y_2-y_1=40$



$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

$xy=\sqrt[t]{\frac{7}{6}}\cdot\sqrt[k]{7}$

$6x^t=7$

$6x=\sqrt[t]{7}$

$x=\sqrt[t]{7}$

$4\cdot32-8\cdot16=2$

$\frac{4}{7^5}-\frac{8}{7^4}-2=\frac{2}{7^4}-\frac{8}{7^4}-2=-\frac{1}{7}$

$-4\cdot32+8\cdot16+2$

$-\frac{y_1}{4}\le9-\frac{y_1}{4}$

153 × 51 = 153, 765, 7803

68 | 4, 17

7803 + 3240 = 11043

17 × 9 = 153

18 × 18 = 144, 18

68 × 8 = 544

49 × 9 = 441

31 × 31 = 31, 93

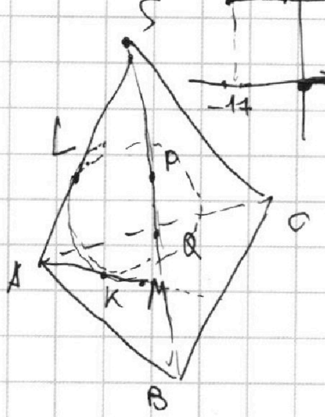
41 + 13 = 62

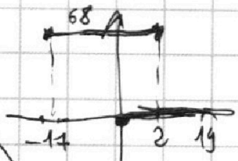
17 × 4 = 68

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





$\frac{3\pi}{2\cdot 5}$

$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

$\sin(3x) = \sin(2x+x) =$

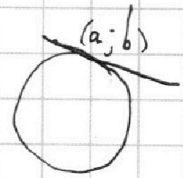
$\sin(2x)\cdot\cos(x) + \cos(2x)\cdot\sin(x) =$

$2\sin(x)\cos^2(x) + \cos^2(x)\cdot\sin(x) -$

$\sin^3(x) =$

$\cos^2(x)$

$\boxed{3\sin(x)\cdot\cos^2(x) - \sin^3(x)}$



$\cos(3x) = \cos(2x+x) =$

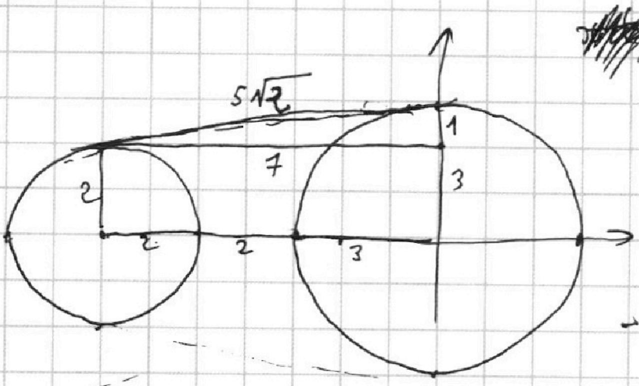
$\cos(2x)\cdot\cos(x) - \sin(2x)\cdot\sin(x) =$

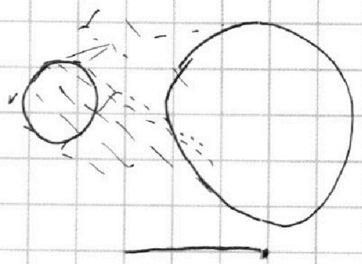
$\cos^3(x) - \sin^2(x)\cdot\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) =$

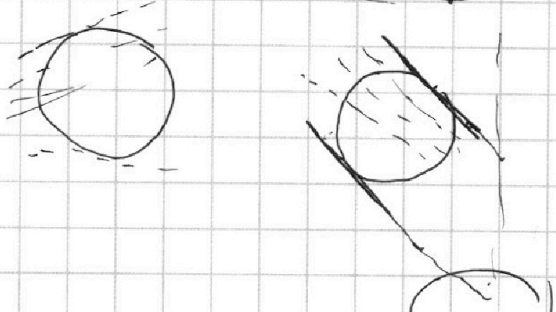
$Kx+b =$

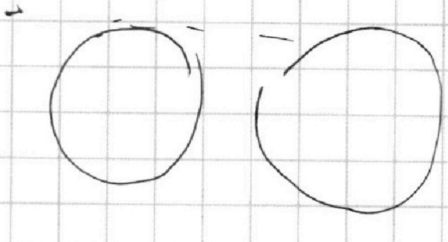
50 $5\sqrt{2}$

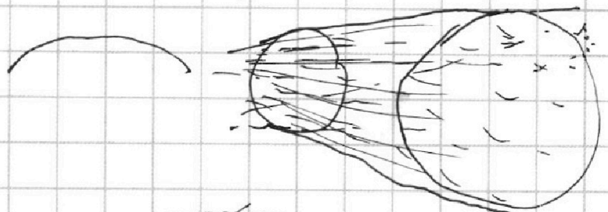
$16x^5 - 20x^3 + 5x = y$

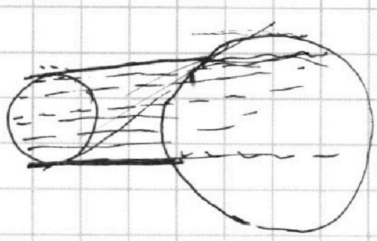












$4(a-b) + c = 40$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!