



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-14;42)$ ,  $Q(6;42)$  и  $R(20;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



## Задача 11

Ясно, что т.к. нам нужно наименьшее  
произведение, то среди делителей  $a, b, c$   
не должно быть других чисел, кроме 2, 3, 5.  
Тогда представим ~~мы~~  $a, b, c$  след. образом:

$$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$$

$$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$$

$$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$$

Значит из условий получим следующее

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + b_1 \geq 9 \\ a_1 + c_1 \geq 19 \\ b_1 + c_1 \geq 14 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 42$$

$\Downarrow$   
 $a_1 + b_1 + c_1 \geq 21$

$$\left. \begin{array}{l} a_2 + b_2 \geq 10 \\ b_2 + c_2 \geq 13 \\ a_2 + c_2 \geq 18 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 41$$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 20,5$

$$\left. \begin{array}{l} a_3 + b_3 \geq 10 \\ b_3 + c_3 \geq 13 \\ a_3 + c_3 \geq 30 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 53$$

$a_3 + b_3 + c_3 \geq 26,5$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что т.к.  $a, b$  и  $c$  натуральные, то степеням  $y$  их множителей тоже натуральные, а значит получаем

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 \geq 21 \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 21 \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 24 \end{cases}$$

~~наименьшее значение~~  
~~знак  $abc = 2 \cdot 3 \cdot 5$~~

$a_1 + b_1 + c_1 = 21$  и выполнение всех условий достигается при  $a_1 = 4$   
 $b_1 = 2$   
 $c_1 = 15$

$a_2 + b_2 + c_2 = 21$  и выполнение всех условий достигается при  $a_2 = 8$   $b_2 = 2$   $c_2 = 11$

Поскольку из того, что  $a, c$  делится на  $2 \cdot 3 \cdot 5$ ,

$a_3 + c_3 \geq 30 \Rightarrow$  ~~выполнение~~  $a_3 + c_3 = 30$  и выполнение всех условий достигается при  $a_3 = c_3 = 15$ ;  $b_3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  наименьшее значение  $abc = 2^{a_1+b_1+c_1} \cdot 3^{a_2+b_2+c_2} \cdot 5^{a_3+b_3+c_3}$   
 $= 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3)  $\text{am } -\pi \text{ go } 0:$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

4)  $\text{am } 0 \text{ go } \pi:$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

5)  $\text{am } \pi \text{ go } 2\pi:$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x - \frac{3\pi}{2}$$

$$5\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = 3\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{4}$$

Ответ:  $x_1 = -\frac{3\pi}{2}$

$$x_2 = -\frac{4\pi}{3}$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{2}$$

$$x_4 = \frac{\pi}{3}$$

$$x_5 = \frac{3\pi}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3  
аргумента  $5 \arcsin(\cos x) = 5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$

может принимать значения в промежутке  $[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -3\pi \leq x \leq 2\pi$$

рассмотрим как раскрывается  ~~$\arcsin(\frac{\pi}{2} - x)$~~   
 $\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$  в зависимости от  $x$ :

1) от  $-3\pi$  до  $-2\pi$ :

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{5\pi}{2} + x \Rightarrow \text{решим уравн.}$$

$$5(\frac{5\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -12\pi$$

$$x = -3\pi$$

2) от  $-2\pi$  до  $-\pi$ :

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = -x - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(-x - \frac{3\pi}{2}) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = -8\pi$$

$$x = -\frac{4\pi}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если модуль касат. касательной прямой  
будет больше, то как бы мы не двигаем  
эту прямую, она не пересечет обе окр.

Из подобия  $\triangle O_1BA$  и  $\triangle O_2CA$  можно найти  
координ. т. А:  $\frac{O_1A}{O_2A} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow A\left(\frac{18}{5}; 0\right)$

$$\cos \angle BO_1A = \frac{O_1B}{O_1A} = \frac{5}{6} \Rightarrow B_x = \frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{5}{2}$$

$$B_y = \sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow \text{касат. кас. прямой}$$

$$\frac{B_y - A_y}{B_x - A_x} = \frac{\frac{\sqrt{11}}{2}}{\frac{18}{5} - \frac{5}{2}} = \frac{-20}{\sqrt{11}} = -\frac{a}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{40}{\sqrt{11}}$$

и у второй обшей касат. тоже самое,  
только другой знак  $\Rightarrow \frac{20}{\sqrt{11}} = -\frac{a}{2} \Rightarrow a_2 = -\frac{40}{\sqrt{11}}$

$$\Rightarrow \text{ответ: } \left(-\frac{40}{\sqrt{11}}; \frac{40}{\sqrt{11}}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

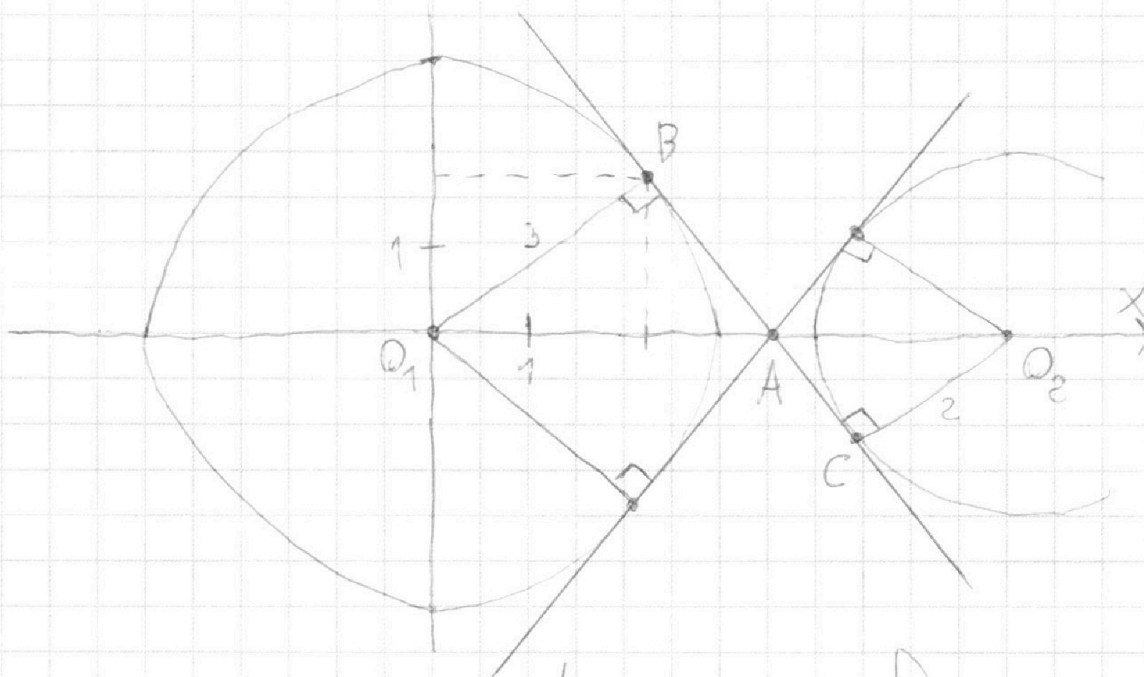
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \Rightarrow \text{прямая } y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} \\ [(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)]=0 \end{cases}$$

$\Downarrow$                        $\Uparrow$                        $\rightarrow y^2 + (x-6)^2 = 2^2$



То, что параметр  $b$  может быть любой значит что мы можем вращать прямую вверх-вниз. и решения будет когда прямая пересекает обе окружности. На рисунке изображен случай когда прямая касается окружностей.



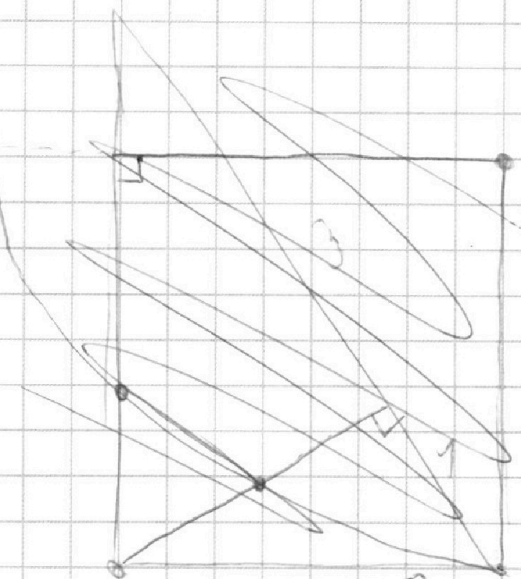
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 15

первое равенство преобразуется в

$$\log_3^4 x + \frac{4}{2} \log_3 x + 8 = 0 \Rightarrow \log_3^5 x + 8 \log_3 x + \frac{4}{2} = 0$$

второе в

$$\log_3^4 5y - \frac{4}{2} \log_3 5y + 8 = 0 \Rightarrow \log_3^5 5y + 8 \log_3 5y - \frac{4}{2} = 0$$

$\Rightarrow$  обе функции убывающие  $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} t = \log_3 x \\ k = \log_3 5y \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow t^5 + k^5 + 8(t+k) = 0 \Rightarrow$  каждому значению  $t$  соответствует лишь одно знач.  $k$  и это  $t = -k$

$$8 \log_3 x + 8 \log_3 5y = 0$$

$$\log_3 x \cdot 5y = 0 \Rightarrow 5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{aligned} A_y = 0 &\Rightarrow 0 = -3A_x + 33 \Rightarrow A_x = 11 \\ B_y = 42 &\Rightarrow 42 = -3B_x + 33 \Rightarrow B_x = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

~~A~~ A(11; 0); ~~B(42; 3)~~ B(-3; 42)

$$\begin{array}{r} \times 36 \\ 744 \\ -128 \\ \hline 16 \end{array}$$

$y = -3x + 33 \Rightarrow$  если целым  $x$ , то целым  $y \Rightarrow$

$$\frac{a^2 x^2}{4} - \frac{3abx}{2} + \frac{9b^2}{4} + x^2 = 9$$

$$x^2 \left( \frac{4+a^2}{4} \right) - x \cdot \frac{3ab}{2} + \frac{9b^2}{4} - 9 = 0$$

$$D=0 = \frac{9a^2 b^2}{4} - \frac{(4+a^2)(9b^2 - 36)}{4}$$

$$9a^2 b^2 - 36b^2 - 9a^2 b^2 + 36a^2 + 144 = 0$$

$$4 - b^2 - a^2 = 0$$

$$x^2 \left( \frac{4+a^2}{4} \right) - x \cdot \left( \frac{3ab}{2} - 12 \right) + \frac{9b^2}{4} + 32 = 0$$

$$D=0 = \frac{9a^2 b^2}{4} + 236ab + 144 - \frac{(4+a^2)(9b^2 + 128)}{4}$$

$$36ab + 144 - 9b^2 - 32a^2 - 128 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$$

$$a_1 + b_1 \geq 9$$

$$a_2 + b_2 \geq 10$$

$$a_3 + b_3 \geq 10$$

$$a_1 + b_1 \geq 9$$

$$b_1 + c_1 \geq 14$$

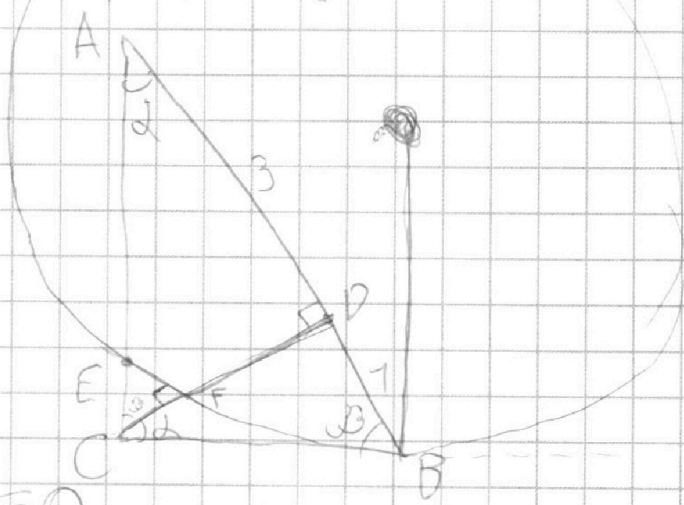
$$a_1 + c_1 \geq 19$$

b	a	c
2	8	11

$$\frac{\text{tg} \alpha}{\text{tg} \beta} = 3$$

$$2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 12$$

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 2 \quad \text{or} \quad 1$$



$$\log_3^4 x + \frac{1}{2} \log_x 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 5y - \frac{1}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0$$

$$\Delta y = -3 \Delta x + 33$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

~~$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$~~

~~$$5\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 2\pi n + t - \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$2\pi = 2\pi n + 6t$$~~

~~$$-6t = 2\pi(n-1)$$~~

~~$$t = \frac{\pi k}{3} \quad 0 - \pi:$$~~

~~$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$2\pi = 6x$$~~

~~$$x = \frac{\pi}{3}$$~~

~~$$\pi - 2\pi:$$~~

~~$$5\left(\frac{\pi}{2} + x - 2\pi\right) = x + \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$4x = 8\pi$$~~

~~$$x = 2\pi$$~~

$$-\frac{5\pi}{2} \geq 5 \arcsin \geq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \geq x \geq 2\pi$$

$$\cos x = \cos t$$

$$x = \pm t + 2\pi n$$

~~$$5\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -t + 2\pi n + \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$2\pi = 2\pi n + 4t$$~~

~~$$-4t = 2\pi(n-1)$$~~

~~$$t = -\frac{\pi k}{2}$$~~

~~$$-\pi - 0:$$~~

~~$$5\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$4x = -2\pi$$~~

~~$$x = -\frac{\pi}{2}$$~~

~~$$-2\pi - \pi:$$~~

~~$$5\left(-x + \frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = x + \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$6x = -8\pi$$~~

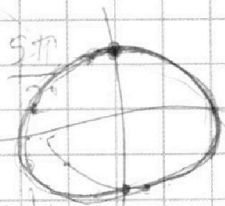
~~$$x = -\frac{4\pi}{3}$$~~

~~$$-3\pi - 2\pi:$$~~

~~$$5\left(\frac{\pi}{2} + x + 2\pi\right) = x + \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$4x = -12\pi$$~~

~~$$x = -3\pi$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



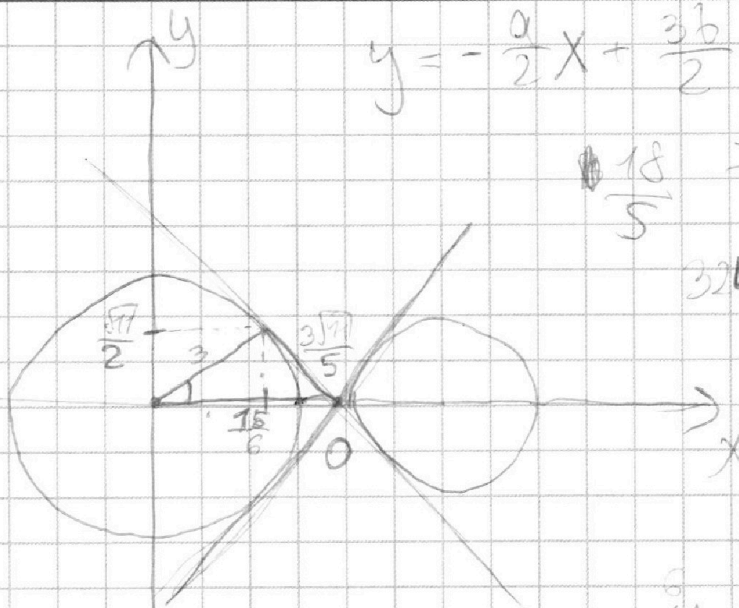
$$\frac{324}{56}$$

$$\frac{99}{36} + \frac{125}{36}$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$$

$$\frac{18}{5} \quad \frac{3\sqrt{11}}{5}$$

$$324 -$$



$$\left(-\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}\right)^2 + x^2 = 9$$

$$\left(-\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}\right)^2 + x^2 - 12x + 36 = 4$$

$$\frac{a^2 x^2}{4} - \frac{3abx}{2} + \frac{9b^2}{4} + x^2 = 9$$

$$\log_3^4 x + 8 = -\frac{4}{2} \log_3 x$$

$$-\log_3^5 x + 8 \log_3 x + \frac{4}{2} = 0$$

$$\log_3^5 5y + 8 \log_3 5y - \frac{4}{2} = 0$$

$$\log_3^5 x = \log_3^5 5y +$$

$$x^5 + 8x + \frac{4}{2} = 0$$

$$y^5 + 8y + \frac{4}{2} = 0$$

$$\Delta y = -42 - 42$$

$$\Delta x = -20 - 20$$

$$\frac{18}{5} \quad \frac{15}{6} = \frac{108 - 45}{30} = \frac{11}{10}$$

$$x^5 + y^5 + 8(x+y) = 0$$

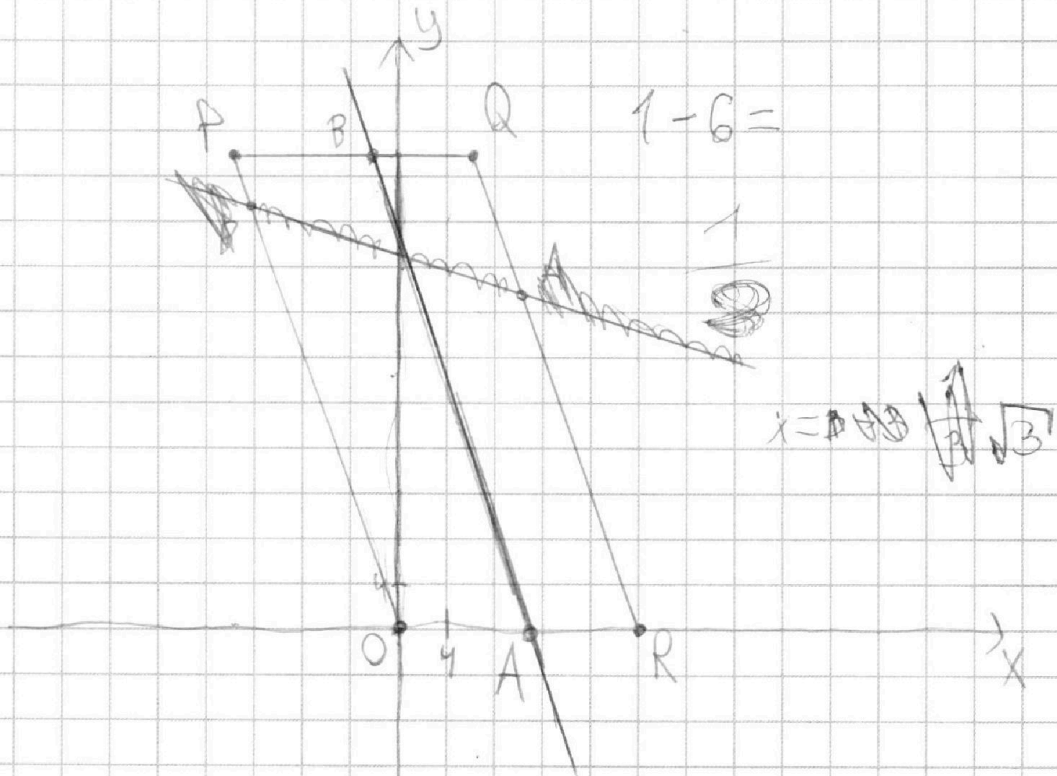
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



уравнение  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$  можно  
представить в виде  $\Delta y = -3\Delta x + 33$ , а  
значит  $y$  эту удовлетворяют все  
точки, лежащие на прямой (подчеркнуто)  
 $y = -3x + 33$ , проведем ее на рисунке.

~~уравнение прямой  $QR$  имеет вид~~  
~~из координат этих точек~~  
Найдем координаты  $A$  и  $B$  - точки пере-  
сечения нашей прямой с  $OR$  и  $PQ$  соотв.