



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



√ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

√ 2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

√ 4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

√ 6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab : 2^{14} 7^{10}; \quad bc : 2^{17} 7^{17} \quad \text{и} \quad ac : 2^{20} 7^{37}$$

$$\left. \begin{array}{l} ab \geq 2^{14} 7^{10} \\ bc \geq 2^{17} 7^{17} \\ ac \geq 2^{20} 7^{37} \end{array} \right\} \rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq 2^{51} 7^{64}$$

а если ст. в возм. 2-и 6-и $\frac{51}{2}$ $\frac{64}{6}$ меньше

$\frac{51}{2}$, то получим при ато реше.

Заметим, что $ac : 7^{37} \Rightarrow abc : 7^{37}$, т.е. если $\sqrt{7}$ видно в abc в ст. то 32 до 36, то мы не получим $\frac{51}{2}$ и $\frac{64}{6}$ \Rightarrow мин оценка следующая: $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$

Пример: на $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$
Пусть $b = 2^6$; $a = 2^8 \cdot 7^{10}$; $c = 2^{12} \cdot 7^{27}$

$$\text{Тогда: } abc = (2^8 \cdot 2^6 \cdot 2^{12}) \cdot (7^{10} \cdot 7^{27}) = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$ab = 2^8 \cdot 7^{10} \cdot 2^6 = (2^{14} \cdot 7^{10}) : (2^{14} \cdot 7^{10})$$

$$bc = 2^6 \cdot 2^{12} \cdot 7^{27} = (2^{18} \cdot 7^{27}) : (2^{17} \cdot 7^{17})$$

$$ac = 2^8 \cdot 7^{10} \cdot 2^{12} \cdot 7^{27} = (2^{20} \cdot 7^{37}) : (2^{20} \cdot 7^{37})$$

Примеры не получены \Rightarrow оценка была.

Кли: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2 Ответ: 8

Если $\frac{a}{b}$ — несократима, где $a, b \in \mathbb{N}$, то $\text{НОД}(a; b) = 1$, т.е. у a и b нет общих простых множителей.

Пусть $(a+b) : m$ и $(a^2 - 2ab + b^2) : m$, найдем, что и требуется в задаче, максимально-возможное значение m .

$$(a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = (a+b)^2 - 2ab : m, \text{ где}$$

$$\text{имеем: } \begin{cases} (a+b) : m \\ 2ab : m \end{cases}$$

Если мы предположим, что $b : m$, то a будет кратно m , следовательно, a и b уже не взаимно просты.

В общем случае, $(a+b) : m$, если a к примеру, если a делится на m и b делится на m , то a будет кратно m и b будет кратно m , следовательно, a и b уже не взаимно просты.

В общем случае, $(a+b) : m$, если a к примеру, если a делится на m и b делится на m , то a будет кратно m и b будет кратно m , следовательно, a и b уже не взаимно просты.

Таким образом, $2ab : 1, 2, 4, 8$ и числа, которые в разложении имеют простые делители a и b (если a и $b : 2$, то $2, 4$ и 8 могут числел. с 2 делится. числами). Из всех этих чисел $(a+b)$ делит только те, которые в разложении не имеют делителей a и b \Rightarrow если a и $b : 2$, то $\text{НОД}(a+b; 2ab) = 1$, если оба числа нечетные, то $\max[\text{НОД}(a+b; 2ab)] = 8$. Приведем пример: $a = 3; b = 13$;

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{13} \text{ — несократ.}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 2ab} = \frac{3+13}{16^2 - 2 \cdot 3 \cdot 13} = \frac{16}{16^2 - 2 \cdot 39} = \frac{2}{32 - 39} = \frac{2}{-7}$$

Ответ: 8

2/7

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

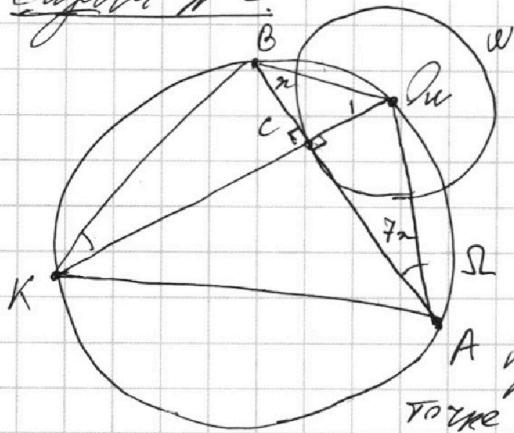
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №3.



$$AC : CB = 7 : 1$$

$AB = ?$

$$r_\omega = 1; \quad r_\Omega = 5$$

Решение:

Пусть $AC = 7x$; тогда $CB = x$ и $AB = 2x$.

По условию AB касается $\omega \Rightarrow$
 $\Rightarrow O_\omega C = r_\omega = 1$ и $O_\omega C \perp AB$.

Прямая $O_\omega C$ пересекает Ω в точке K .

$\angle BKO_\omega = \angle BKC = \angle O_\omega AB = \angle O_\omega AC$, поскольку они опираются на 1 дугу BO_ω .

~~$\triangle BKC \sim \triangle O_\omega AC$ по 2 углам ($\angle BCK = \angle O_\omega CA = 90^\circ$ и $\angle BKC = \angle O_\omega AC$) $\Rightarrow \frac{BC}{CO_\omega} = \frac{KC}{AC}$~~

Воспользуемся KO_ω и AB — перпендикулярными хордами,
 $KC \cdot CO_\omega = AC \cdot CB$

$AC \cdot CB = 1 \cdot KC$, т.е. $7x^2 = KC$ (используя, конечно).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №4

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad \text{пробуем } \frac{2}{7}$$

если $2 - 7x = 2$

$$x = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{2}{7} - \frac{5 \cdot \frac{2}{7}}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2 \cdot \frac{2}{7}}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$

Заметим, что $(2x^2 + 2x + 1) + (2 - 7x) = 2x^2 - 5x + 3 \Rightarrow$

\Rightarrow если $2 - 7x = 0$, то $2x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 5x + 3 \Rightarrow$

\Rightarrow и если $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0 = 2 - 7x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{2}{7}$ — 1 из решений. (оказалось единственным решением)

Теперь обратимся ко всем ост. случаям:

$$\frac{2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x$$

$$\frac{2 - 7x}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x \quad \left| \cdot \frac{1}{2 - 7x}, \text{ если } 2 - 7x = 0, \text{ мы уже разобрали} \right.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 1 \quad | (\dots)^2 \text{ все } \geq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + 2x^2 + 2x + 1 = 4 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 0$$

$$2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 3x - 4x^2 - 3 \quad (1)$$

Теперь заметим, что левая часть ≥ 0 , а правая < 0 :

$-4x^2 + 3x - 3 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ (1) нет решений.

Остался единственный случай $x = \frac{2}{7}$ Ответ: $x = \frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

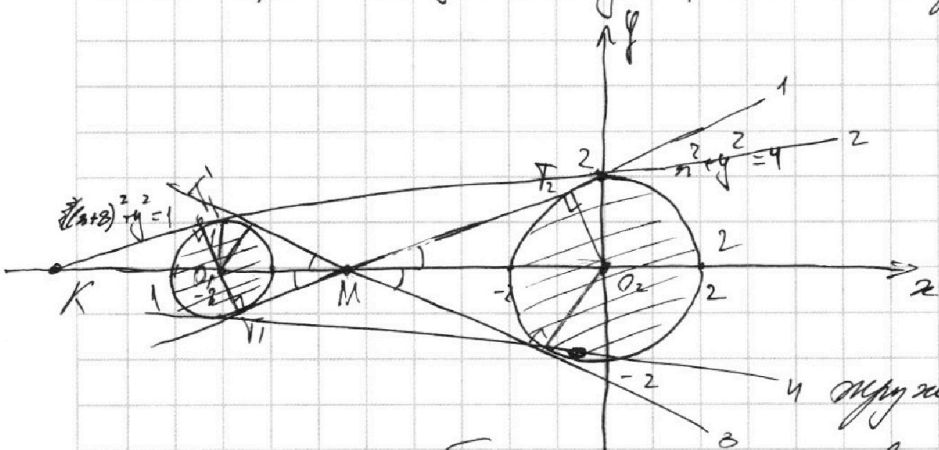


Задача №6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+2)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \text{ имеет только 2 реал.}$$

Найдем, что 1) $ax - y + 10b = 0 \rightarrow$ прямая с уг. $y = ax + 10b$

2) $((x+2)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$ - 2 ~~функции~~ ^{круга}



Если $(x; y)$ не принадлежит окр., то $((x+2)^2 + y^2 - 1) > 0$ и $(x^2 + y^2 - 4) > 0 \rightarrow$ не подходит

Если $(x; y)$ на 1 из 2 окружностей, то 1 из

имеется обратн. в 0 и угл. вычислено.

Если $(x; y)$ в 1 из кругов, то 1 множ. > 0 , другое < 0 , следовательно все произв. $\leq 0 \rightarrow$ верно.

Если $y = ax + 10b$ пересекает 2 или 1 окружность в 2 точках, то решений > 2 , ведь все точки принадлежат, нахот. Внутри окружности тоже найдутся.

Если ~~прямая~~ $y = ax + 10b$ не пересекает окр., то очевидно, решений нет совсем.

Если $y = ax + 10b$ касается только 1 окр., то реш. 1. \rightarrow

$\rightarrow y = ax + 10b$ должна касаться обеих окружностей - это сделать невозможно.

У 2-ух окружн. может быть только 4 общие касат., они находятся на расстоянии друг от друга (схема) - 2 внешн. 2 внутренн.

Нужно найти число коэффициентов у этих условий.

1) Заметим внутренн.: достаточно найти угл. коэф. 1-ой, чтоб найти коэф. 3 (они симметричны только знаком, поск. симметричны отн. оси OX, как и обе окружн.).

Точ. T_1 и T_2 - соответственно точки касатн 1 и 2 окружностей. M - т. перес. \neq касат. №1 оси OX.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

O_1 и O_2 — центры окр. 1 и 2 соств.

$\Delta O_1 T_1 M \sim \Delta O_2 T_2 M$ по двум углам (1 верш. : $\angle O_1 M T_1 = \angle O_2 M T_2$

и 2 углами из того, что касаются $T_1 T_2$ — касаясь, а $O_1 T_1$ и $O_2 T_2$ — радиусы).

Тогда $O_1 M : M O_2$ как $O_1 T_1$ и $O_2 T_2 = 1 : 2$

$$O_1 M + M O_2 = 8 = 3 M O_2 \Rightarrow M O_2 = \frac{8}{3} = \frac{16}{6}$$

Тогда $ax + 10b$ не содержит точки $(-\frac{16}{3}; 0)$

$$-a \frac{16}{3} + 10b = 0$$

$$16a = 30b \Rightarrow 8a = 15b \Rightarrow b = \frac{8a}{15}$$

Теперь найдем такие a и b , что

$y = ax + 10b$ и $x^2 + y^2 = 4$ имеют 1 р-н. (т.е. касаются).

$$\begin{cases} y = ax + \frac{16}{3}a \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + a^2 x^2 + 2a^2 \frac{16}{3}x + \frac{256}{9}a^2 = 4$$

$$x^2(a^2 + 1) + \frac{32}{3}a^2 x + (\frac{256}{9}a^2 - 4) = 0$$

$\Delta = 0$ — условие р-н.

$$\frac{256}{9}a^4 - (a^2 + 1)(\frac{256}{9}a^2 - 4) = \frac{256a^4}{9} - \frac{256a^2}{9} + 4$$

$$+ 4a^2 - \frac{256a^2}{9} + 4 = 0 \quad | \cdot 9$$

$$36a^2 - 256a^2 + 36 = 0$$

$$220a^2 = 36$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{36}{220}} = \pm \sqrt{\frac{18}{110}} = \pm \sqrt{\frac{9}{55}} = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

\Rightarrow если вознаеи в таком, что $10b = \frac{16}{3}a$, то касаются.

2) Теперь найдем р-н. кас. внешней касаясь:

из двух касаясь r^2 (соств. и r^2 по симметрии) пересек. ось OX в точке K . T_1' — точка касания

касаясь r^2 окр. 1. Тогда $\Delta O_2 T_2 K \sim \Delta O_1 T_1' K$ по двум углам (углы при $\angle O_2 T_2 K$ и $\angle O_1 T_1' K$ и $\angle O_2 K T_2$).

Поэтому $\frac{O_1 K}{O_2 K} = \frac{O_1 T_1'}{O_2 T_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow O_1 K = \frac{1}{2} O_2 K$, т.е. O_1 — середина

$$O_2 K, O_1 O_2 = 8 \Rightarrow O_2 K = 16 \text{ и } O_1 K = 8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Получим, что касат. 2 пересек. ось Ox в т. $(-16; 0)$, т.е.

$$-16a + 10b = 0$$

$$10b = 16a$$

Теперь найдем такие a , что $\begin{cases} y = ax + 10b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ имеет 1 реш.

$$\begin{cases} y = ax + 16a \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + a^2x^2 + 32ax + 256a^2 - 4 = 0$$

$$(касательная) \quad x^2(a^2+1) + 32ax + 256a^2 - 4 = 0$$

$$D/4 = 0 = 256a^4 - (256a^2 - 4)(a^2 + 1) = 256a^4 - 256a^4 -$$

$$- a^256a^2 + 4a^2 + 4 = 4a^2 + 4 - 256a^2 = 0$$

$$\begin{array}{r} 252 \overline{) 4} \\ -24 \overline{) 63} \\ \hline 12 \end{array}$$

$$252a^2 = 4$$

$$63a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{1}{63}} \quad \begin{array}{l} + - N^2 \\ - - N^2 \end{array}$$

Отсюда же, взяв b также, что $10b = 16a$, мы получим касательные.

Мы получили все 4 возможные касат. y и 2 пересек. ось Ox .
Т.е. что должны были касат. y и 2 пересек. ось Ox .
Итак, следовательно, это эти значения a - единств. возможные.

$$\text{Отв: } a = \pm \sqrt{\frac{1}{63}} ; \pm \sqrt{\frac{3}{55}}$$

Продолжение 6-й задачи.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

~~min~~ $\min\{abc\} - ?$

$ab: 2^{14} 7^{10}, bc: 2^{17} 7^{17}$

$ac: 2^{20} 7^{37}$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 14 \\ a_7 + b_7 = 10 \\ a_7 + c_7 = 17 \\ b_2 + c_2 = 17 \\ a_2 + c_2 = 20 \\ a_7 + c_7 = 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 14 \\ b_2 + c_2 = 17 \\ a_2 + c_2 = 20 \\ a_2 = 20 - c_2 \\ 20 - c_2 + b_2 = 14 \\ b_2 - c_2 = -6 \\ b_2 + c_2 = 17 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2b_2 = 11 \\ b_2 = \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \end{cases}$$

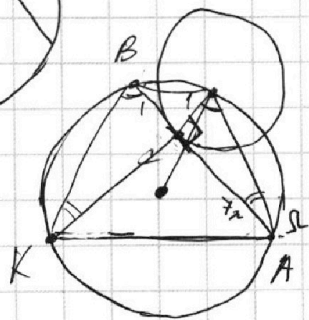
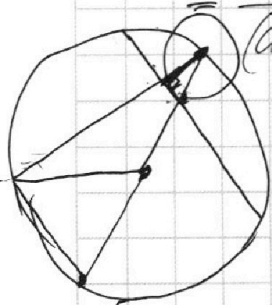
$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 17 - c_2 \geq 14 \\ b_2 \geq 17 - c_2 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \\ b_2 \geq 17 - c_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} a_2 - c_2 \geq -3 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \\ b_2 \geq 17 - c_2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2a_2 \geq 17 \\ b_2 \geq 17 - c_2 \end{cases}$$

$a_2 \geq 9 \Rightarrow a_2 + c_2 \geq 9 + c_2 \geq 20 \Rightarrow c_2 \geq 11$

$\frac{a}{b}$ - несопр. $a, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2 - 2ab} = \frac{a+b}{(a-b)^2 - 2ab} = \frac{a+b}{a^2 + 2ab + b^2 - 2ab} = \frac{a+b}{a^2 + b^2}$$



$\frac{AC}{CB} = \frac{1}{4} : 1$

$\frac{r_2}{CK} = \frac{r}{1} \Rightarrow r_2 = CK \cdot \frac{r}{1} = CK \cdot 7$

$r_2^2 = CK^2 = 7$

$r^2 = 1 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow 8r = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

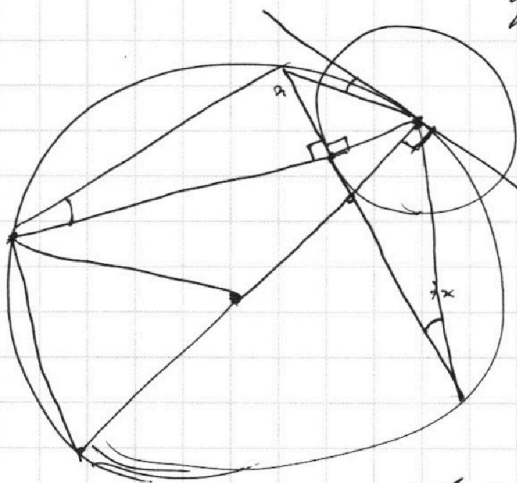
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик



~~$(2a^2 - 5a + 3) = 4a$~~

$$\sqrt{2a^2 - 5a + 3} = 2 - 7a + \sqrt{2a^2 + 2a + 1}$$

$$2 - 7a + \sqrt{2a^2 + 2a + 1} \geq 0$$

$$7a - 2 \leq \sqrt{2a^2 + 2a + 1}$$

$\frac{a}{b}$ - нескр.
~~а+б~~

$$\frac{2a^2 - 5a + 3 - 2a^2 - 2a - 1}{\sqrt{2a^2 - 5a + 3} + \sqrt{2a^2 + 2a + 1}} = 2 - 7a$$

$$\frac{2 - 7a}{-2a^2 - 5a + 3} = 1$$

$$2\sqrt{(2a^2 - 5a + 3)(2a^2 + 2a + 1)} = 3a - 4a^2 - 3$$

$$\begin{cases} 2a^2 - 5a + 3 \geq 0 \rightarrow 2(a-1)(a-\frac{3}{2}) \geq 0 \\ 3a - 4a^2 - 3 \geq 0 \rightarrow \end{cases}$$

$$-4a^2 + 3a - 3 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot (-3) \cdot (-4) = 9 - 48 < 0$$

~~$\frac{a+b}{a+b} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{a+b} = a+b - \frac{2ab}{a+b}$~~

$\frac{2ab}{a+b} : m$
 ~~$\frac{2ab}{a+b}$~~ у а и б нет общих множителей.
 $\frac{3}{5}$ - нескр. $\sqrt{}$
 $a=3 \quad b=5$

$$\frac{\frac{2ab}{a+b}}{\frac{a^2 + 6ab + b^2}{16^2 - 8 \cdot (13+3)}} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 2ab} = \frac{8}{8^2 - 8 \cdot 8} = \frac{1}{8}$$



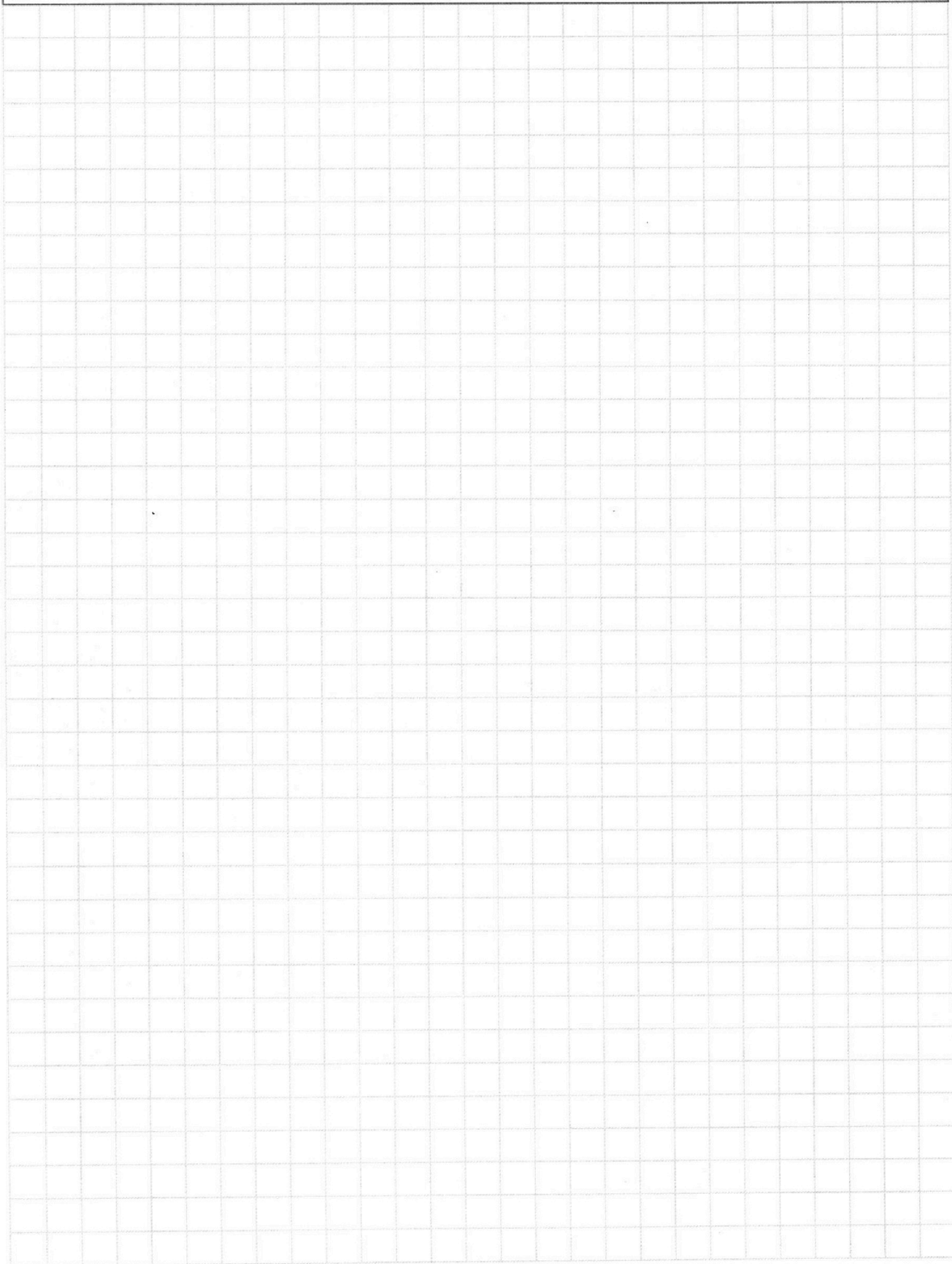
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

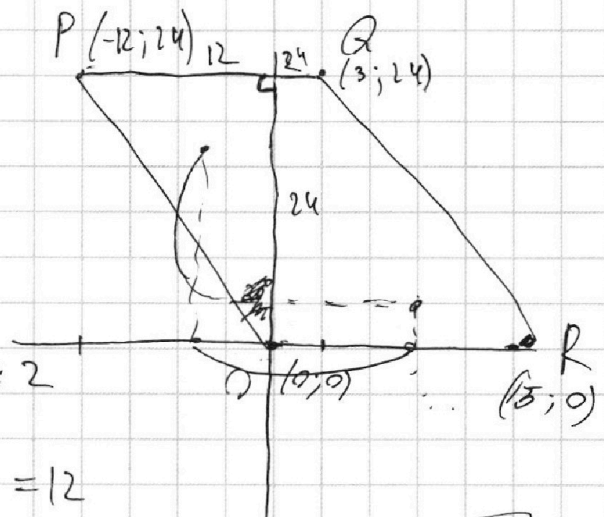
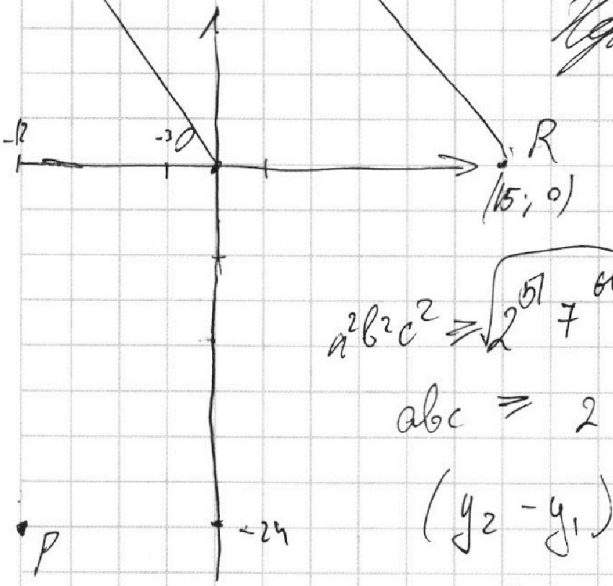
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Кернел



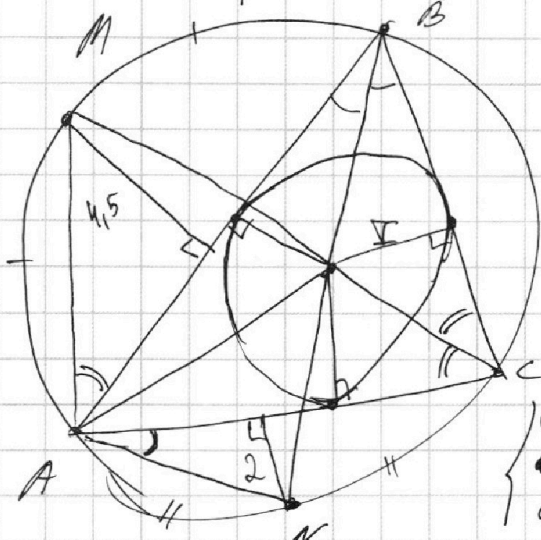
$2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 12$

$2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1$

$\frac{144 + 576}{720} = \frac{720}{720}$

~~$12^2 + 24^2$~~

$12^2 + 24^2 = 12^2 + 4 \cdot 12^2 = 12^2 \sqrt{12 \cdot 5} = 12\sqrt{5}$



$abc = 2^{30} \cdot 7^{37}$
 $abac = 2^{30} \cdot 7^{37} \Rightarrow b = 1$

$a = 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $c = 2^{17} \cdot 7^{17}$

$a_2 + b_2 \geq 14$
 $b_2 + c_2 \geq 17$
 $a_2 + c_2 \geq 20$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq ?$
 $a_2 \geq 14 - b_2$
 $a_2 + b_2 + c_2 \geq 31 - b_2$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \rightarrow$

$b = 1$

~~$a \cdot 2^b \geq 2^{14} \cdot 7^{10}$~~

$2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \geq 51$
 $a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{51}{2}$
 $a_2 + b_2 + c_2 \geq 26$

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №1.

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} ab : 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases}$$

Пусть a_2, b_2, c_2 — степени в разложении 2-и в числе a, b и c соответственно.
Аналогично a_7, b_7 и c_7 , только для 7.

Оценка:

1) Из $ab : 2^{14}$; $bc : 2^{17}$; $ac : 2^{20}$ следует, что

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \end{cases} \quad + \rightarrow \quad 2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \geq 51$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{51}{2} > \frac{51}{2}$$

Легко $\frac{51}{2} \notin \mathbb{N}$, а 26 — ближайший к $\frac{51}{2}$ натурал.

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 26$$

2) Из $ab : 7^{10}$; $bc : 7^{17}$ и $ac : 7^{37}$ следует:

$$\begin{cases} a_7 + b_7 \geq 10 \\ b_7 + c_7 \geq 17 \\ c_7 + a_7 \geq 37 \end{cases} \quad + \rightarrow \quad 2a_7 + 2b_7 + 2c_7 \geq 64$$

$$a_7 + b_7 + c_7 \geq 32$$

Итого оценка снизу: $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$, но $a_7 + b_7 + c_7 \geq 37$
 $> 32 \Rightarrow$ миним. оценка на $a_7 + b_7 + c_7$ — это 37.

Итого оценка сверху: $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$, если $abc < 2^{26} \cdot 7^{37}$, то степени в разложении 7-и или 2-и будут меньше 26 и 37 или 20 соответственно, а это невозможно из разложения выше.

Пример: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ где $b = 2^6$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \quad a_2 + c_2 = 20$$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$a = 2^8 \cdot 7^{10}$$

$$a = 7^{10} \cdot 2^8 \quad c = 7^{27}$$

$$abc = 2^6 \cdot 2^{12} \cdot 7^{27} = 2^{18} \cdot 7^{27} = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((a+b)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

ум. только 2 реч.

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2}$$

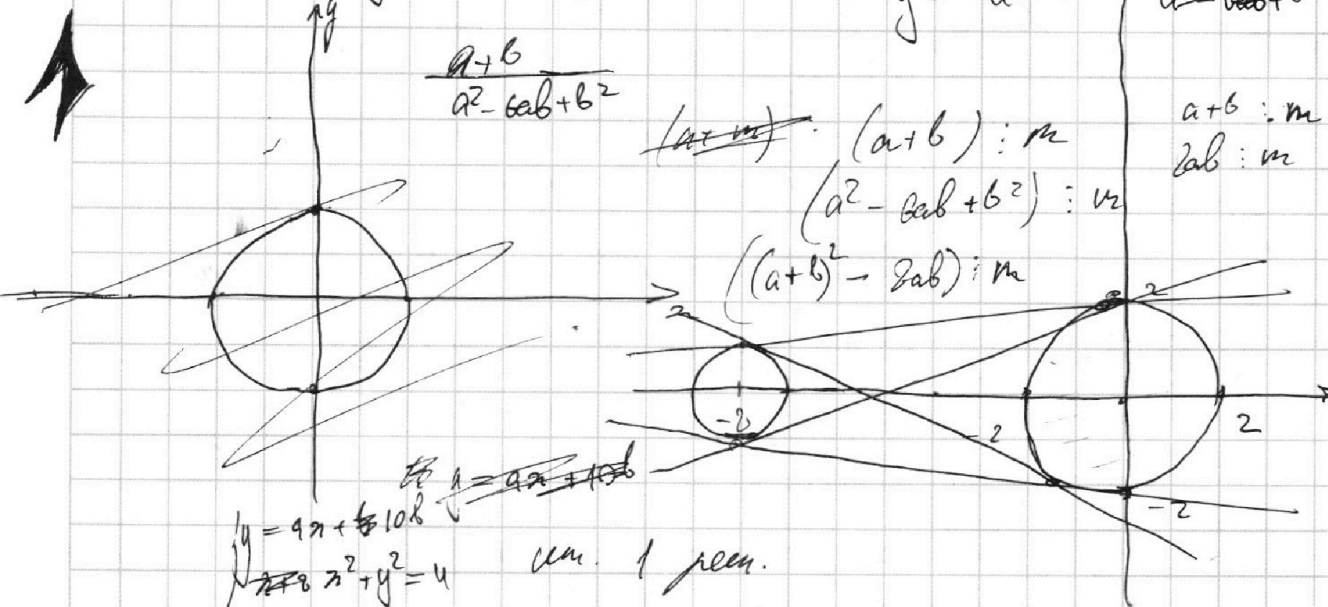
$$y = ax + 10b$$

$$a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned} a+b &: m \\ 2ab &: m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b) &: m \\ (a^2 - 2ab + b^2) &: m \end{aligned}$$

$$(a+b)^2 - 2ab : m$$



$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

ум. 1 реч.

$$x^2 + a^2x^2 + 2 \cdot 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$x^2(a^2 + 1) + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$D/4 = 100a^2b^2 - (100b^2 - 4)(a^2 + 1) =$$

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + b^2 &= 100a^2b^2 - 100a^2b^2 - 100b^2 + 4a^2 + 4 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2 - 2b^2 = (a - 3b)^2 - b^2 = 4a^2 - 100b^2 + 4 = 0 \\ & a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

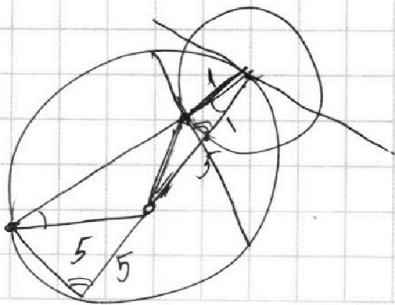
$$\frac{2}{1} = \frac{n+8}{n}$$

$$\begin{aligned} 2n &= n+8 \\ n &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2) \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \\ 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (a+b) &: m \\ 2ab &: m \end{aligned}$$



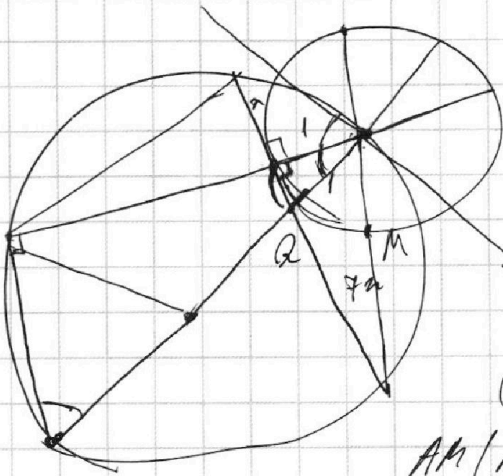
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{OQ+1} = \frac{OQ}{10} \quad OQ^2 = CR$$

$$g = AQ \cdot QB \quad OQ^2 = \frac{1}{2}(AQ+QB)$$

$$7n \cdot OQ^2 = AM \cdot (AM+2)$$

$$(AM+1)^2 = 49n^2 + 1$$

$$AM(AM+2) = (AM+1-1)(AM+1+1) = (AM+1)^2 - 1$$

$$\sqrt{2n^2 - 5n + 3} - \sqrt{2n^2 + 2n + 1} = 2 - 7n$$

$$\sqrt{2n^2 - 5n} = 5n$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{2n^2 + 2n + 1} = 9$$

$$2 - 7n \geq 0$$

$$2 - 7n = 6$$

$$2n^2 - 5n + 3 \geq 0$$

$$D = 25 - 24 = 1 \Rightarrow n = \frac{5 \pm 1}{4} = 1; \frac{3}{2}$$

$$n \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

$$2n^2 + 2n + 1 \geq 0$$

$$(n^2 + 2n + 1) + n^2 = (n+1)^2 + n^2 > 0$$

$$-\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{a+b} = a + \sqrt{a}$$

$$a+b = a^2 + 2a\sqrt{a} + a$$

$$b = a^2 + 2a\sqrt{a}$$

$$a^2 + 2a\sqrt{a} - b = 0$$

$$\sqrt{a+b} = b + \sqrt{a}$$

$$a+b = b^2 + 2b\sqrt{a} + a$$

$$b = b^2 + 2b\sqrt{a}$$

$$b^2 + 2\sqrt{a}b - b = 0$$

$$2 - 7n = 1 - 2\sqrt{2n^2 + 2n + 1}$$

$$1 - 7n = -2\sqrt{2n^2 + 2n + 1}$$

$$7n = 2\sqrt{2n^2 + 2n + 1} + 1$$

$$b(b + 2\sqrt{a} - 1) = 0$$

$$b = 0$$

$$b = 1 - 2\sqrt{a}$$

$$\sqrt{a-b} - \sqrt{a} = b$$

$$b = 2 - 7n$$

$$a = 2n^2 + 5n + 3$$

$$\sqrt{a-b} = \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a-b} = b$$

$$\sqrt{a} = b + \sqrt{a-b}$$

$$a = b^2 + 2b\sqrt{a-b} + a - b$$

$$b(b + 2\sqrt{a-b} - 1) = 0$$

$$\frac{7n}{OQ} = \frac{1}{7n}$$

$$(7n^2 + 1)7n = 7n^3 + 7n$$