



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ



- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При выборе чисел a, b и c важна лишь делимость на 2 и 7, поэтому для миним. значения будет достаточно чисел вида $2^x \cdot 7^y$, $x, y \in \mathbb{N}$

Пусть тогда

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$$

$$b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}, \text{ из условия следует:}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 23 \end{cases}$$

$$\text{и } \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 11 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 18 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 39 \end{cases}$$

сложив неравенства в каждой системе и получим:

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 55 \quad \text{и} \quad 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 68$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 27,5 \quad \text{и} \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$$

~~$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$~~

~~$abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$~~
 ~~$\min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{34}$~~ Пример, когда $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$:

~~$a = 2^{10} \cdot 7^{20}$~~

~~$b = 2^{5} \cdot 7^{19}$~~

~~$c = 2^{13} \cdot 7^{19}$~~

$$abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}$$

$$\text{м.к. } \beta_1 + \beta_3 \geq 39, \text{ но } 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \geq 7^{39}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 27,5, \text{ но м.к. } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \in \mathbb{N}_0, \text{ но}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28 \quad \text{и} \quad 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \geq 2^{28}$$

$$\text{м.к. } abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39} \quad \text{и} \quad \min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

пример:

$$a = 2^{10} \cdot 7^{20}$$

$$b = 2^5 \cdot 7^0 = 2^5$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{19}$$

тогда

$$a \cdot b = 2^{15} \cdot 7^{20} : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$b \cdot c = 2^{18} \cdot 7^{19} : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$a \cdot c = 2^{23} \cdot 7^{39} : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ сократима на m , тогда

$$\begin{cases} a+b : m \\ a^2-7ab+b^2 = (a+b)^2 - 9ab : m \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)^2 : m, \text{ т.к. } a+b : m \\ (a+b)^2 - 9ab : m \text{ по укл.} \end{cases} \Rightarrow 9ab : m$$

если $a : m$, то т.к. $a+b : m$, ^{знаем} $a+b-a = b : m$, то
знаем a и b сократимы на $m \Rightarrow$ ни a , ни b не
делятся на m _{противоречие}
при этом $9ab : m$

Если m - простое, то т.к. $\begin{cases} a \not: m \\ b \not: m \\ 9ab : m \end{cases} \Rightarrow 9 : m, m=3$

~~Если m - составное, то $a : p, b : q$ также это p, q
и 9 взаимно простые, ~~то~~ так как a и b взаимно простые
при этом $9pq : m$ т.е. $a = px, b = qx, p, q, 9, x \in \mathbb{N}$
 $a+b : m$ $px + qx = 9qz$ ~~Если m составное, то b не обязательно
простое делитель p в искомом~~~~

Если m составное, то пусть $m = pq$ и ~~тогда~~ $a : p$ тогда $a+b : pq$
 $a : p \Rightarrow$

$\Rightarrow b : p$, но a и b взаимно простые, противоречие \Rightarrow

\Rightarrow в разложении чисел a и b не входят никакие множители из m , значит в произв. $9ab : m$ число m
выделяется делителем $9 \Rightarrow \max(m) = 9$

пример: $\frac{a=2}{b=7} \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{2+7}{2^2-7 \cdot 2 \cdot 7+7^2} = \frac{9}{4-98+49} = \frac{9}{-45} = -\frac{1}{5}$ Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

корень $x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 0$, а значит $< 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, т.е. $\in \mathbb{R}^3$

корень $x = \frac{1}{9} < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, значит $\in \mathbb{R}^3$

Ответ: $x \in \left\{ \frac{1}{9}; \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2-6x+2 \geq 0 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$1-9x = 3x^2-6x+2 - 3x^2+3x+1$, значит
если $f(x) = 3x^2-6x+2$; $g(x) = 3x^2+3x+1$, то

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = f(x) - g(x) = (\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}) (\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}), \text{ м.к.}$$

I) если $f(x) = g(x)$, то

$$3x^2+2-6x = 3x^2+3x+1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

II) если $f(x) \neq g(x)$, то $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = 1$; $1 - \sqrt{g(x)} = \sqrt{f(x)}$

$$1 + g(x) - 2\sqrt{g(x)} = f(x)$$

$$1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{1+3x+3x^2} = 3x^2 - 6x + 2$$

$$9x = 2\sqrt{1+3x+3x^2} \quad \uparrow^2$$

$$81x^2 = 4(1+3x+3x^2)$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{12 \cdot 12 + 4 \cdot 4 \cdot 69}}{2 \cdot 69} = \frac{12 \pm \sqrt{4 \cdot 4 \cdot (9 + 69)}}{2 \cdot 69} = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

ОДЗ: $3x^2-6x+2 \geq 0$

$$3x^2-6x+2=0$$

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{36-24} + 6}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ м.к. ОДЗ: } x \in (-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$$

(м.к. $3x^2+3x+1 = 3(x^2+x+\frac{1}{3}) = 3(x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}) = 3((x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{12}) > 0$ при $x \in \mathbb{R}$)

$$\frac{6+2\sqrt{6}}{69} < \frac{6+2\sqrt{78}}{69} < \frac{6+2\sqrt{81}}{69} \quad \frac{22}{69} < \frac{6+2\sqrt{78}}{69} < \frac{24}{69} \quad \text{чтобы корни}$$

~~1 - \frac{\sqrt{3}}{3}~~ - начал мне ОДЗ, нужно чтобы $\frac{24}{69}$ было меньше $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ или

$\frac{22}{69}$ было больше $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ (не подх., м.к. $\frac{22}{69} < 1 < 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$), м.к. надо

увеличить $\frac{24}{69} \checkmark 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ $1 - \frac{\sqrt{3}}{3} > 1 - \frac{1,8}{3} = 0,4$

$\frac{8}{23} \checkmark 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\frac{8}{23} < \frac{8}{20} = 0,4 < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, значит

корень $x = \frac{6+2\sqrt{78}}{69}$ попадает в ОДЗ;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

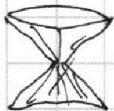
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



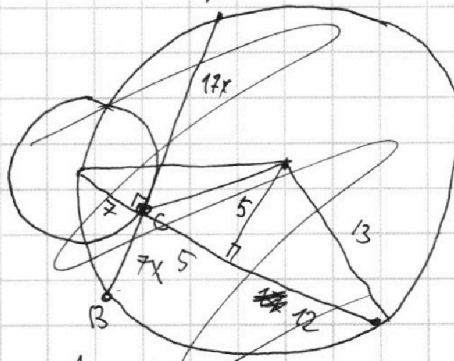
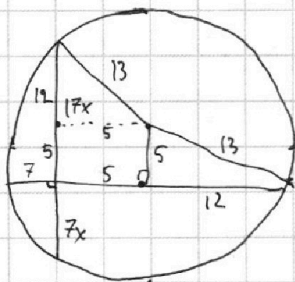
~~(1-9x)^2 = 3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}~~



$1 + 81x^2 - 18x = 6x^2 - 3x + 3 - 2\sqrt{\dots}$

$3x^2 + 3x + 1$

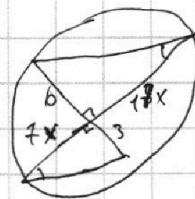
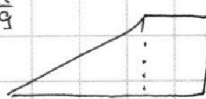
$\Delta = 9 - 12 < 0$



$\frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{k} + \frac{7}{2} + \frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{9}{4}k} = \frac{4}{9k}$

$16 \cdot 69 + 169$

$a = 7x, b = \dots = 4^2(69) + 4^2 \cdot 3^2 = 4^2(69+9) = 4^2(78)$



$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$

$a+b = 11k$

$a^2 - 7ab + b^2 = 11n$

$(a+b)^2 - 9ab = 11k^2 - 9ab = 11n$

$9ab = 11k^2 - 11n$

$ab = 11t$

$a+b = mx$

$\frac{12}{69} - \frac{4}{69}$

$\frac{-4}{69}$

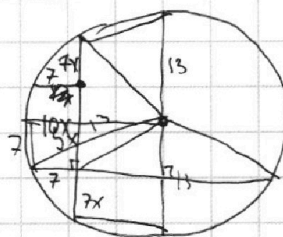
$4x \cdot 6 = 13x$

$a^2 - 7ab + b^2 = my$

$a^2 + 2ab + b^2 - 9ab = (a+b)^2 - 9ab = my$

$m^2x^2 - 9ab = my$

$9ab = m(mx^2 - y)$



$2 - 6x = 1 + 3x$

$1 = 9x$

$9ab = m^2z$

$9ab : m$

$a+b : m$

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$0 \leq 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

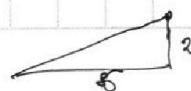
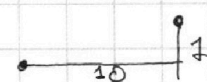
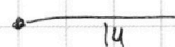
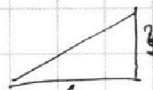
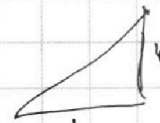
$x \in (-\infty; \dots)$

$3x^2 - 6x + 2 = 3 \cdot 5^2 - 1$

$\sqrt{3(x-1)^2 - 1}$

~~$\sqrt{3(x-1)^2 - 1}$~~

$\frac{3}{81} - \frac{6}{9} + 2 = \frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2$



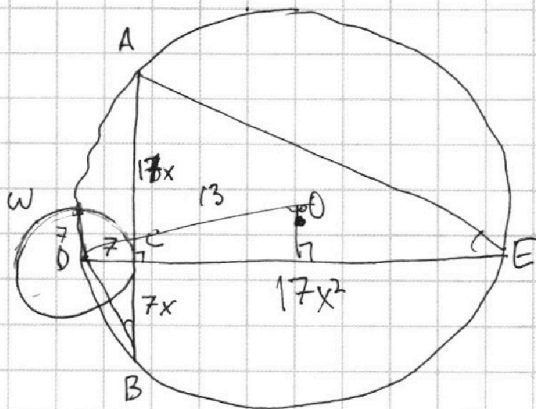
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

ЛМФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть центр ω это точка D, тогда $CD = R_\omega = 7$ и $DC \perp AB$ (п.к. AB касается ω)

2) Пусть $AC = 17x$, $CB = 7x$, тогда если $DC \cap \Omega = E$, то ~~тогда~~ ~~пересек~~ ~~хорд~~ DC и AB :

~~$AC \cdot CB = DC \cdot CE$, $17x \cdot 7x = CE \cdot 7$~~

~~$\angle AED = \angle ABD$ (опр. на хорду AD)~~

~~$\angle ACE = \angle DCB = 90^\circ$ (верт. углы)~~

~~$\Rightarrow \triangle DCB \sim \triangle ACE$ и в подобных Δ :~~

~~$\frac{17x}{CE} = \frac{7}{7x}$~~

~~$\frac{AC}{CE} = \frac{DC}{CB}$~~

~~$\frac{AC \cdot CB}{CE} = \frac{DC^2}{CB}$~~

2) $\angle AED = \angle ABD$ (опр. на хорду AD), в выпр. ΔDCB и ΔACE : $\operatorname{tg} \angle AEC = \frac{17x}{CE}$
 $\operatorname{tg} \angle CBD = \frac{7}{7x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{17x}{CE} = \frac{7}{7x}$, $CE = 17x^2$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$y_2 + 2x_2 - (y_1 + 2x_1) = 14$

$1 + 3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x + 1$

$f(x)$ $g(x)$

$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = 1$

~~$f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} = 1$~~

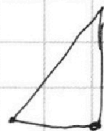
$2\sqrt{fg} = 1 + f + g$

$4fg = 1 + f + g + 2f + 2g + 2fg$

$1 + 3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x + 1$

$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 2 - 3x$

$4(3x^2 - 6x + 2) = 4 + 81x^2 - 36x$





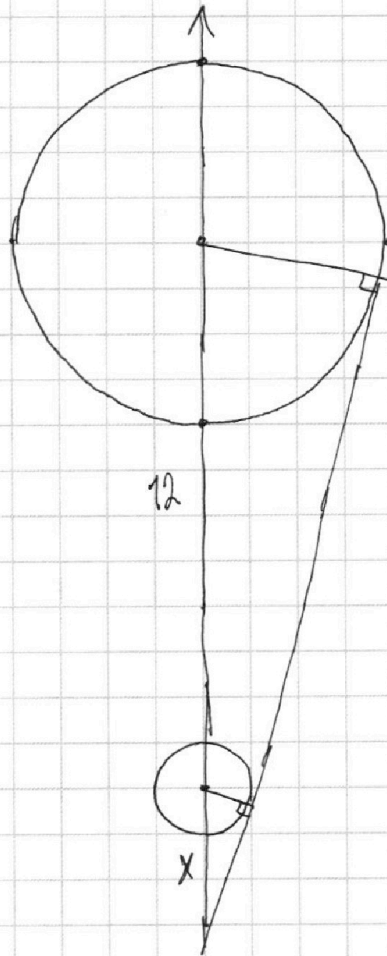
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = k 2^{15} 7^{11}$$

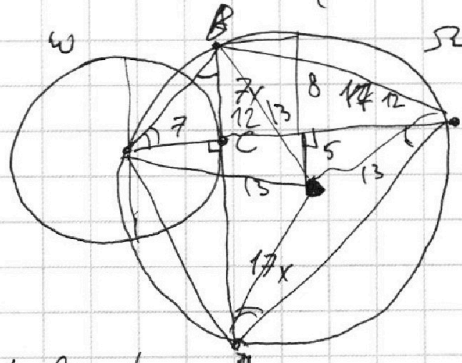
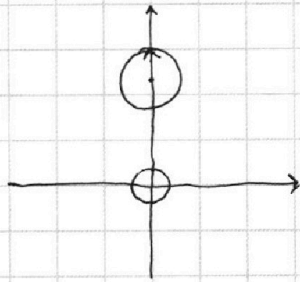
$$bc = m 2^{17} 7^{18}$$

$$ac = n 2^{23} 7^{39}$$

$$(abc)^2 = kmn 2^{55} 7^{58}$$

~~2/3~~

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} =$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 16 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y-2)^2 \leq 16 \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad | \cdot 2$$

$$36 - 3 \cdot 2 \cdot 4 = 4$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$a^2 - 7ab + b^2 =$$

$$49a^2b^2 - 4a^2b^2$$

Пусть $a = 2^x \cdot 7^y$

$$b = 2^x \cdot 7^y$$

$$c = 2^w \cdot 7^z$$

$$a = \frac{7 \pm 3 \sqrt{5}}{2}$$

~~$$\begin{cases} d+x=15 \\ d+y=11 \end{cases}$$~~

$$d + \beta = 15$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$d + \gamma = 23$$

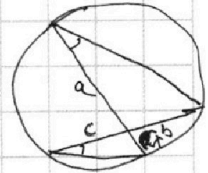
$$\begin{cases} \gamma - \beta = 8 \\ \beta + \gamma = 17 \end{cases}$$

$$2\gamma = 17$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{53}{2} = 26,5$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 29$$

$$20 \quad 19$$



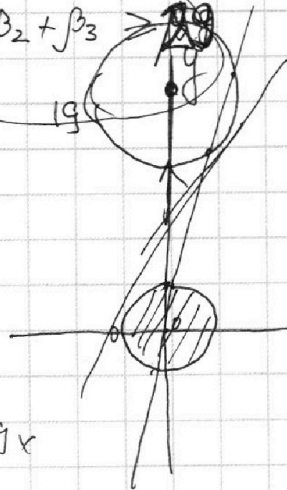
$$\frac{ac}{a^2} = \frac{bd}{b^2}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \implies ad = bc$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 16 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 y^2 \geq 1 \\ x^2 + (y-2)^2 \leq 16 \end{cases}$$

$$3x^2 - 4,5x + 1,5 = t$$

$$\sqrt{t - 4,5x + 0,5} - \sqrt{t + 4,5x - 0,5} = 1 - 9x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

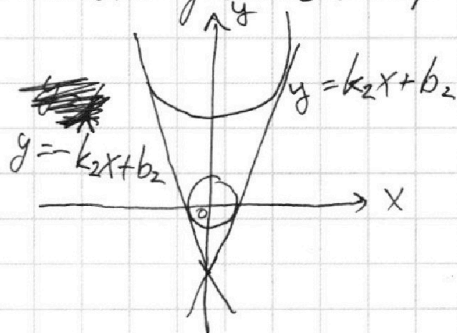
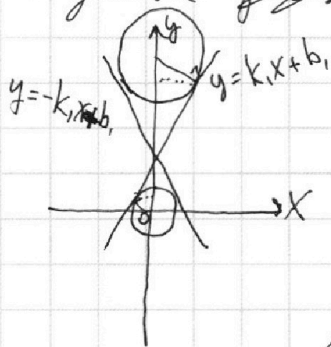
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

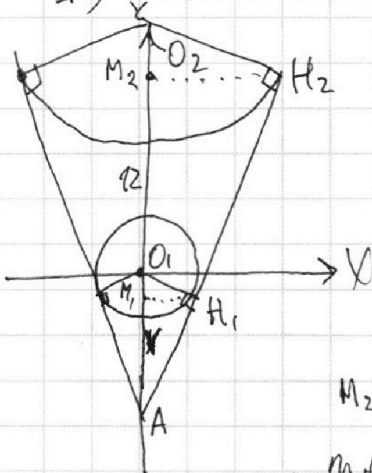
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Знаем, чтобы найти все значения a достаточно задать угловые коэффициенты, k прямых. ~~Знаем~~ Симметричные относ. оси Ox так как отсюда. Этим ось симметричны обе окружности, знаем ~~значения~~ у этих прямых обратные угловые коэф.:



I) касат. внешние



$\Delta AO_1M_1 \sim \Delta AO_2M_2$ (общую гипотенузу и прямой угол)

$AO_1 = x, O_1O_2 = 12, O_2M_2 = 4, O_1M_1 = 4$

тогда $\frac{x}{x+12} = \frac{1}{4} \quad 4x = x+12, x=4$

значит ~~уравнение~~ ~~уравнение~~ ~~уравнение~~ $b_1 = -4$

уравнение ~~$x^2 + y^2 = 4$~~ имеет 1 решение,

так как касат. пересекаются меньшейю ар. в 1 точке

M_2, M_1 высоты на Ox , $M_2M_2 \parallel Ox \parallel M_1M_1$

тогда $\frac{M_2M_2 - M_1M_1}{AM_1 - AM_2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

из уравн. (2) и из уравн. (2):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задает окружн. с центром $(0;0)$ и $R=1$
 уравнение $x^2 + (y-12)^2 = 16$ задает окружн. с центром $(0;12)$ и $R=4$

Из уравнения 2 следует что точки лежат всегда внутри/на гра-
 нце 1 круга и снаружи/на границе другого. так как на
 границе круги не пересекаются, то решениями могут быть

~~только точки на границе обоих окружн. так как~~
~~если точка снаружи обоих, то она не внутри ни~~
 только точки внутри обоих кругов (см. рис. 1),
 и граница с границей - решения

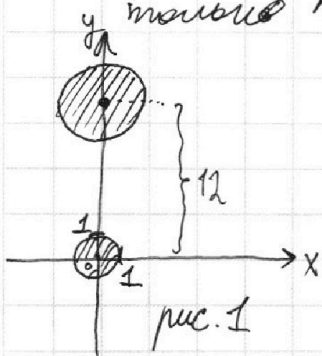


рис. 1

чтобы ~~граница~~ система имела ровно
 2 решения, нужно чтобы прямая
 $ax + y - 8b = 0$ пересекла по крайней мере
 одну из окружн. ровно в 1 точке, т.е.
 (касаясь только внутри окр. пересек. с границей)

~~уравнения: $\begin{cases} ax + y - 8b = x^2 + y^2 - 1 \\ ax + y - 8b = x^2 + (y-12)^2 - 16 \end{cases}$ имели ровно 1 решение~~

общая касат. к 2 кругам 4:

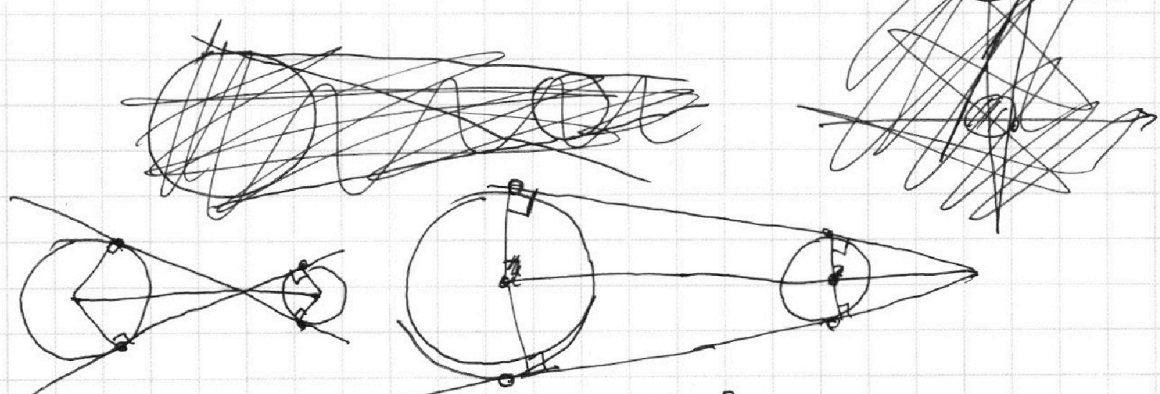


рис. 2

рис. 3

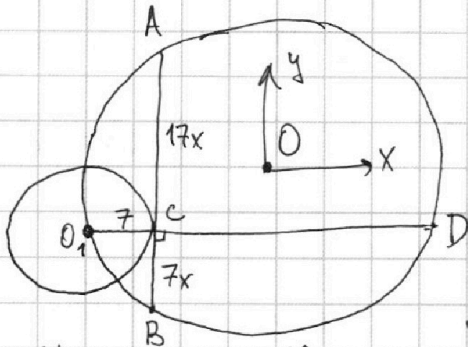
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть O, C , где O — центр ω , пересекает Ω в точке D , тогда $O, C = 7$ и $O, C \perp AB$, т.к. O, C касается AB , радиус ω \perp касательной

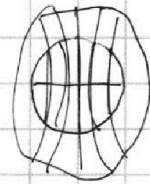
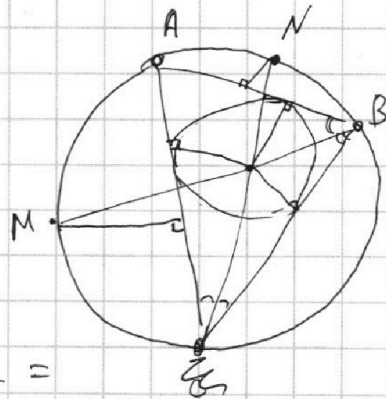
~~2) по дв. пересек. хорд:~~
Введем систему координат с центром в $(1, 0)$, ось $y \parallel AB$

тогда если $A = (x_1; y_1)$
 $B = (x_2; y_2)$

~~ось $x \parallel O_1 D$~~
 $O_1 = (x_2; y_3)$, $C = (x_1; y_3)$ то

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 7 \\ y_1 - y_3 = \frac{17}{7} \\ y_3 - y_2 = \frac{7}{7} \\ x_1^2 + y_1^2 = 13^2 \\ x_2^2 + y_2^2 = 13^2 \\ x_2^2 + y_3^2 = 13^2 \end{cases}$$

$$(x_1 - 7)^2 + y_3^2 = 13^2$$



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} =$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a - b}$$

$$1 - 9x = 3x^2 + 3x + 1$$

$$2 - 1 - 9x = 2 - 6x - 1 - 3x$$

$$a + b : m$$

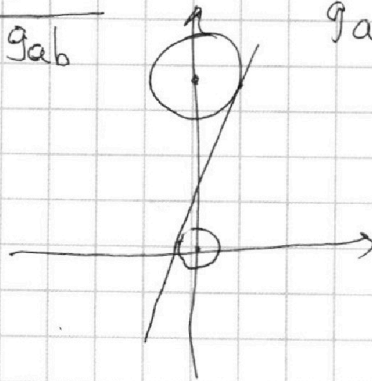
$$a : m$$

$$9ab : m$$

$$b : m$$

$$\Downarrow \\ 9 : m$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\text{OD3: } \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$1 - 9x = 2 - 1 - 3x - 6x = (2 - 6x) - (1 + 3x) = (2 - 6x) + 3x^2 - (1 + 3x) - 3x^2$$

$$= (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1), \text{ м.е.}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

Если $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$, м.е. $2 - 6x = 1 + 3x$, то

$$9x = 1 \text{ и } x = \frac{1}{9} \in \text{OD3}$$

Вместо:

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1$$

$$1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 3x^2 - 6x + 2$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 - 12x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 69}}{2 \cdot 69}$$

$$D = 144 + 4 \cdot 69 =$$

$$= 4^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 69 = 4^2(9 + 69)$$

$$= 4^2(78)$$

