



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

9

Пусть  $a = 2^x \cdot 7^y$ ;  $b = 2^z \cdot 7^w$ ;  $c = 2^m \cdot 7^n$

Тогда 
$$\begin{cases} x+z \geq 14 \\ z+m \geq 17 \\ x+n \geq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 14-z \\ z \geq 17-m \\ m \geq 20-x \end{cases} \Rightarrow 2(x+z+m) \geq 51$$

Так  $x, z, m$  целые  
 $u \geq 0$ , то  
 $x+z+m \geq 26$

и

$$\begin{aligned} y+w &\geq 10 \\ w+n &\geq 17 \\ y+n &\geq 37 \end{aligned}$$

Пример, когда  $x+z+m = 26$ :

$$x=9; z=5; m=12$$

$$\begin{aligned} x+z &= 14 \\ z+m &= 17 \\ x+n &= 21 \end{aligned}$$

и

$$y+n+w \geq 37$$

Пример, когда  $y+n+w = 37$ :

$$y=17; w=0; n=20$$

$$17+0 \geq 10$$

$$0+20 \geq 17$$

$$17+20 \geq 37$$

Итак  $\min abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Ответ:  $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~а) б)~~ Если  $\frac{a}{b}$  - целая дробь, то  $\text{НОД}(a; b) = 1$

Тогда нам нужно найти максимальный

$$\text{НОД}(a+b; a^2+b^2-bab), \quad a^2+b^2-bab = (a+b)^2 - 2ab$$

Если  $a$  и  $b$  взаимно просты, то у числа  $a+b$  нет  
никого общего делителя с числом  $a$  и  $b$ , значит

$\text{НОД}(a+b; ab) = 1$ . Помогим на выражение  $(a+b)^2 - 2ab$   
любого делителя  $a+b$ :  $(a+b)^2 - 2ab \equiv 0 - 2 \equiv -2$ .

Итак, максимальное число  $d$ , на которое можно  
поделить  $a+b$  и  $a^2+b^2-bab$  не больше

больше. Пример для  $m=8$ :  $d=8$

$$\frac{5+3}{5^2-6 \cdot 5 \cdot 3+3^2} = \frac{8}{1-90} = \frac{8}{-64} \Rightarrow \frac{1}{-8}$$

Ответ: 8.

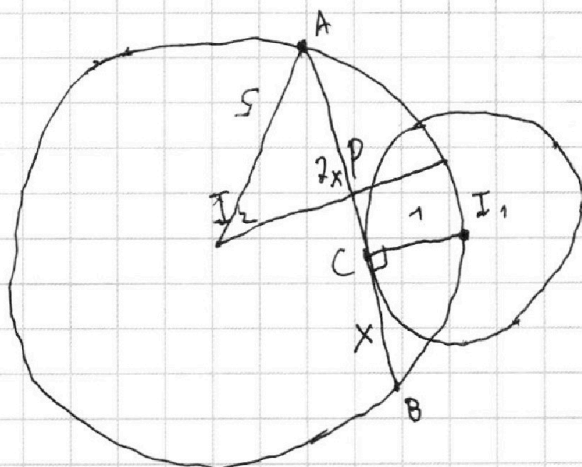
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $BC=x$ , тогда  $AC=7x$ . Попробуем отрезок  $AI_1$ :

Т.к.  $AB$  - диаметр, то  $\angle ACI_1=90^\circ$ , значит  $AI_1=\sqrt{1+49x^2}$ .

Проведем радиус из точки  $I_2$ , который перпендикулярен хорде  $AB$  в точке  $P$ , длина  $OP$  перпендикуляр  $AB$  в точке  $P$ .

$AP=PB=4x$  и  $\angle I_2PA=90^\circ$ . Обозначим  $\angle I_2AP$  за  $\alpha$  и

$\angle CAI_1$  за  $\beta$  найдем  $\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \beta, \cos \beta$ :

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+49x^2}}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{5}$$

Найдем  $\cos(\alpha+\beta)$ :

$$\cos \alpha = \frac{4x}{\sqrt{1+49x^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{4x}{5}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{28x^2}{5\sqrt{1+49x^2}} - \frac{\sqrt{25-16x^2}}{5\sqrt{1+49x^2}}$$

$I_2I_1=5$ , так  $I_1$  лежит на  $W$ .

Из  $\triangle I_2I_1A$  выразим по т. Пифагора сторону  $I_1I_2$ :

$$25 = 25 + 1 + 49x^2 - 2 \left( \frac{28x^2}{5\sqrt{1+49x^2}} - \frac{\sqrt{25-16x^2}}{5\sqrt{1+49x^2}} \right) \cdot 5 \cdot \sqrt{1+49x^2}$$

Отсюда:

$$0 = 1 + 49x^2 - 56x^2 + 2\sqrt{25-16x^2} \Rightarrow 7x^2 - 1 = 2\sqrt{25-16x^2} \Rightarrow 49x^4 - 14x^2 + 1 =$$

$$= 900 - 64x^2$$

Пусть  $x^2=a$ , тогда ур-е имеет вид:  $49a^2 + 50a - 99 = 0$   
 $D = 2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99$   
 $a_{1,2} = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{98}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Отсюда  $X = \frac{-50 + \sqrt{2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{98}$   
найдём  $AB = 8 \sqrt{\frac{-50 + \sqrt{2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{98}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\text{Пусть } a = \frac{2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1}{2} =$$

$= 2x^2 - 1,5x + 2$ ; ~~тогда~~ Тогда наше ур-е имеет  
вид:

$$\sqrt{a - 3,5x + 1} - \sqrt{a + 3,5x - 1} = 2 - 7x$$

возведем всё в квадрат:

$$2a - 2\sqrt{a^2 - (3,5x + 1)^2} = (7x - 2)^2$$

$$2a - \sqrt{4a^2 - (7x - 2)^2} = (7x - 2)^2$$

$$\text{пусть } b = 7x - 2:$$

$$2a - \sqrt{4a^2 - b^2} = b^2 \Rightarrow 2a - b^2 = \sqrt{4a^2 - b^2} \text{ (оба возведем}$$

$$\text{в квадрат: } 4a^2 - 4ab^2 + b^4 = 4a^2 - b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^4 - b^2(4a - 1) = 0 \Rightarrow b^2(b^2 - 4a + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (7x - 2)^2 ((7x - 2)^2 - 4a + 1) = 0$$

Сначала решим это ур-е и потом проверим корни на  
исходном:

$$1) 7x - 2 = 0$$

$$7x = 2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$2) 49x^2 - 24x + 4 + 1 - 8x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$41x^2 - 12x - 3 = 0$$

$$49x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$D = 64 + 12 \cdot 49$$

$$x_1 = \frac{8 + \sqrt{64 + 12 \cdot 49}}{82}$$

$$41x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$D = 64 + 4 \cdot 41$$

$$x_1 = \frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 41}}{82}$$

$$x_2 = \frac{8 - \sqrt{64 + 4 \cdot 41}}{82}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Проверим  $x = \frac{2}{7}$ :

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$D = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1.5$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup (1.5; +\infty)$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$D < 0$$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} - \frac{10}{7} + 3} + 3 - \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + \frac{4}{7} + 1} = 0$$

$$2 \cdot \frac{4}{49} - \frac{10}{7} + 3 = 2 \cdot \frac{4}{49} + \frac{4}{7} + 1$$

$$2 = 2$$

$$2) x_1 = \frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82}$$

$$2 - 7 \cdot \left( \frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82} \right) < 0$$

$$\sqrt{2 \cdot \left( \frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82} \right)^2}$$

$$\text{можно } 2 - 2 \cdot \left( \frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82} \right) > 0$$

$$\text{нормально } \sqrt{2 \cdot \left( \frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82} \right)^2}$$

$$-5 \cdot \frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82} + 1 - \sqrt{2 \cdot \left( \frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82} \right)^2} + 2 \cdot \frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82}$$

$< 0$ , а значит перепись как подходить. Так корни

$x_1, x_2, x_3$  можно считать нормальными уравнениями

$$\left| \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right| = |2 - 7x| \quad \text{и} \quad \frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82} < \frac{8 + 24}{82} < 1$$

$$3) x_2 = \frac{8 - \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82} < 0$$

$$7x_2 < 0, \text{ можно } 2 - 7x_2 > 0, \text{ следовательно}$$

$$2x_2^2 - 5x_2 + 3 > 2x_2^2 + 2x_2 + 1, \text{ нормально этот корень}$$

можно как подходить и  $x_2 \notin [1; 1.5]$

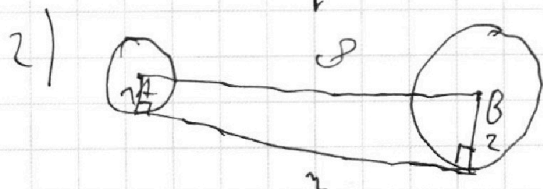
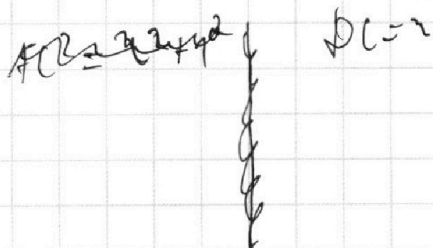
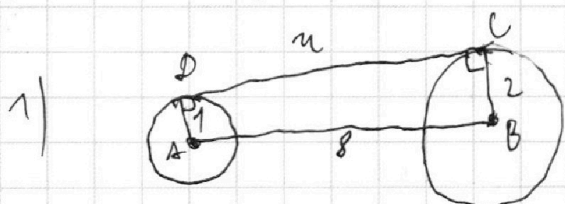
$$\text{Ответ: } \frac{2}{7}, \frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82}, \frac{8 - \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82}$$



- 1  2  3  4  5  6  7

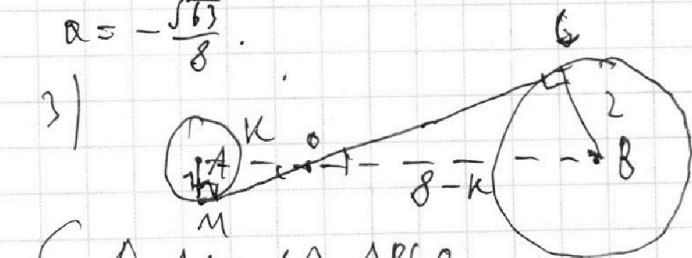
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Необходимо, чтобы было ровно 2 решения, то есть  
 уравнения  $y = ax + 10$  в <sup>длина</sup> касательных обеих окружностей.  
 Радиусы обеих окружностей <sup>длины</sup> перпендикулярны этим  
 окружностям и поместим все возможные  
 значения  $a$ :



Углы  $2$  смежные  
 вертикалы, значит в этом случае

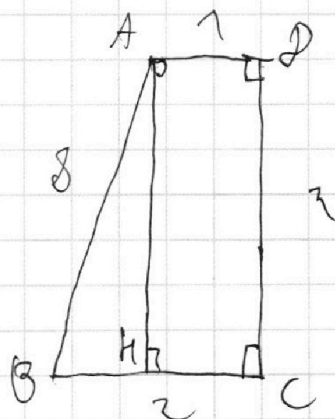
$$a = -\frac{\sqrt{3}}{8}$$



$$\begin{cases} \triangle AAO \sim \triangle BCO \\ \text{по 2 углам} \\ AO = k; OB = 8 - k. \end{cases} \Rightarrow \frac{8-k}{k} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{8}{k} - 1 = 2$$

$$\frac{8}{k} = 3, k = \frac{8}{3}$$



$AK = AD$ , так  $ADCH$  -  
 прямоугольник.

значит  $AC = \sqrt{64 - 4} = \sqrt{60}$

$BH = 2 - CH$ ,  $CH = AD$ , так  
 $ADCH$  - прямоугол., значит

$$AC = \sqrt{64 - 4} = \sqrt{60}$$

рациональные коэффициенты  
 $k$  - целым  
 показателем  $a$ :

для этого пол-  
 номы равны

$$y = ax, \text{ где } 8$$

точке  $x=0, y=0$  и

точке  $x=8, y=0$

$y =$  равно  $\sqrt{60}$

$$\sqrt{60} = 8a$$

$$a = \frac{\sqrt{60}}{8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

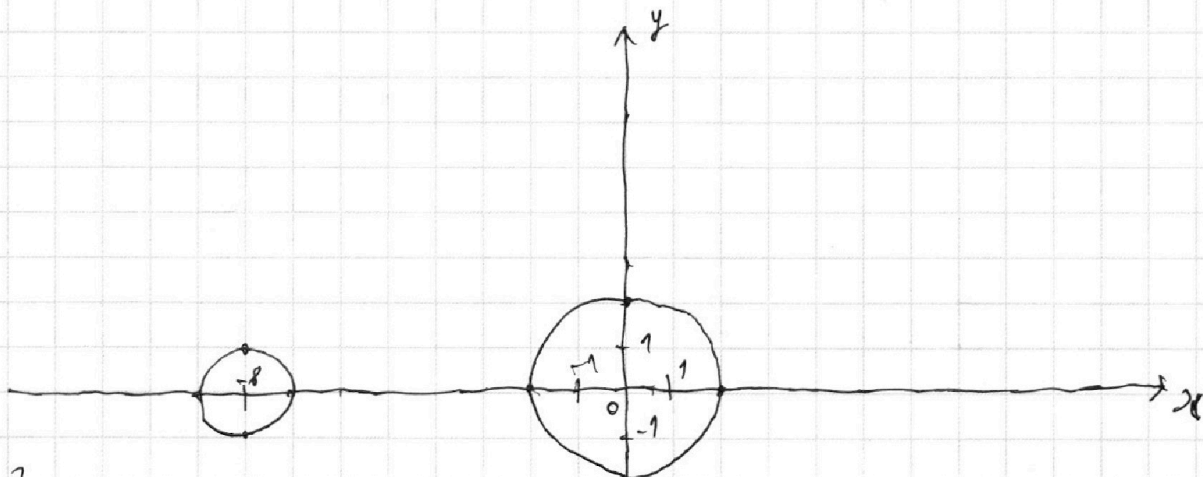
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$



Заметим, что две точки  $(x; y)$

~~на~~ находятся внутри  
одной из окружностей  
(они никак не пересекаются),  
то она подходит условию:

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

Т.к ~~для одной точки она находится одна точка~~  
будет положительна, а другая  $\leq 0$ .

Значит если прямая  $y = ax + 10b$  пересекает одну  
окружность в двух точках, то тогда решений будет  
бесконечно много. Если же прямая  $y = ax + 10b$   
не проходит через окружности или же касается  
только одной из них, то тогда решений  $\leq 1$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Известно } MO^2 = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 1} ; \quad CO^2 = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 4}$$

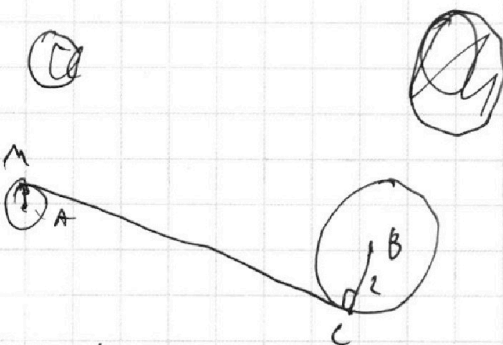
$$\text{Отсюда } CM = 3 \sqrt{\frac{64-9}{9}} = \sqrt{55}$$

Найдём  $a$ :

$$\sqrt{55} = 8a$$

$$a = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

4)



Скорее всего 4 симметричны третьей, поэтому  $a = -\frac{\sqrt{55}}{8}$

Других общих касательных у этих окружностей нет, значит мы нашли все значения  $a$ , поэтому это уравнение  $70b$  в  $y = ax + 70b$  может параллельно перенести касательную кривую в любую кривую параллельной касательной касательной.

$$\text{Ответ: } a = \pm \frac{\sqrt{55}}{8}; \quad \pm \frac{\sqrt{55}}{8}; \quad \pm \frac{\sqrt{63}}{8}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

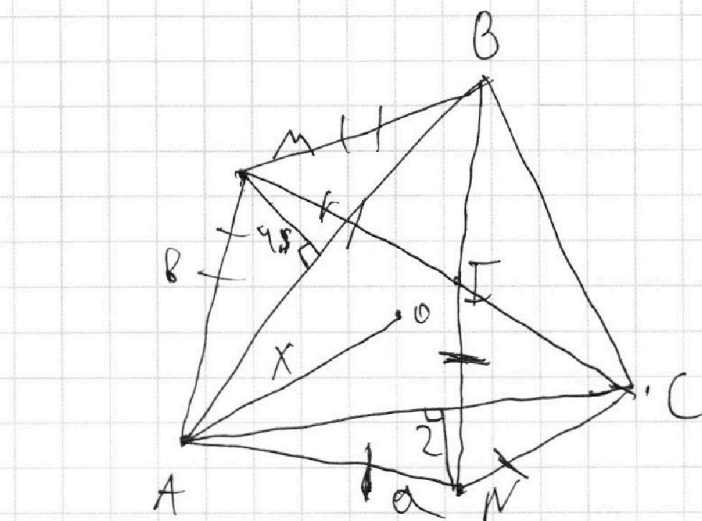
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



O - центр  
отмеченой

по длине окружности  $NI = NC = AN$  и  $IM = MB =$   
 $= AM$ . Пусть  $OA = x$ , тогда  $AC^2 = 2x^2 - 2 \cos B x^2$   
и  $AN^2 = 2x^2 - 2 \cos B x^2$ ,  $AC^2 = 2AN^2 + 2 \cos B \cdot AN^2 =$   
 $= (4x^2 - 4 \cos B x^2) (1 + \cos B)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2a-b^2 = \sqrt{4a^2 - b^2} + \sqrt{4a^2 - b^2}$$

$$4a^2 - 4ab^2 + b^4 = 4a^2 - b^2$$

$$b^4 - 4ab^2 + (4a-1) = 0$$

$$b^2(b^2 - 4a) - (4a-1) = 0$$

$$955 = 9hl + 0.2h = 2.8 + 0.2h + b^2$$

$$955 - 2.8 = 0.2h + b^2$$

$$952.2 = 0.2h + b^2$$

$$4761 = h + 5b^2$$

$$4761 - 5b^2 = h$$

$$2a - \sqrt{4a^2 - b^2} = b^2$$

$$2a - \sqrt{4a^2 - b^2} - b^2 = 0$$

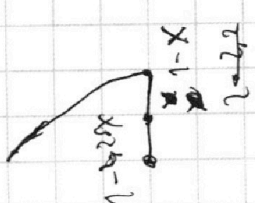
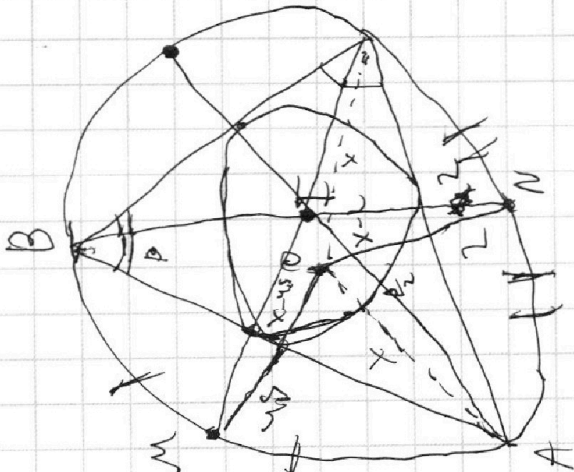
$$2a - \sqrt{4a^2 - b^2} = b^2$$

$$2a - \sqrt{4a^2 - b^2} - b^2 = 0$$

$$b = 2x$$

$$5b^2 = 20x^2$$

$$4761 - 20x^2 = h$$



$$\sqrt{2x^2 - 54 + 9} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 = 2 - 7x - 2$$

$$4x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$2a - 2\sqrt{4a^2 - b^2} = b^2$$

$$2a - 2\sqrt{4a^2 - b^2} - b^2 = 0$$

$$2a - 2\sqrt{4a^2 - b^2} = b^2$$

$$2a - \sqrt{4a^2 - b^2} = \frac{b^2}{2}$$

$$25 - 4 \cdot 6 = 24$$

$$x^2 - 4x + 4 + x^2 - x - 7$$

$$2a - 2\sqrt{4a^2 - b^2} = b^2$$

$$2a - 2\sqrt{4a^2 - b^2} - b^2 = 0$$

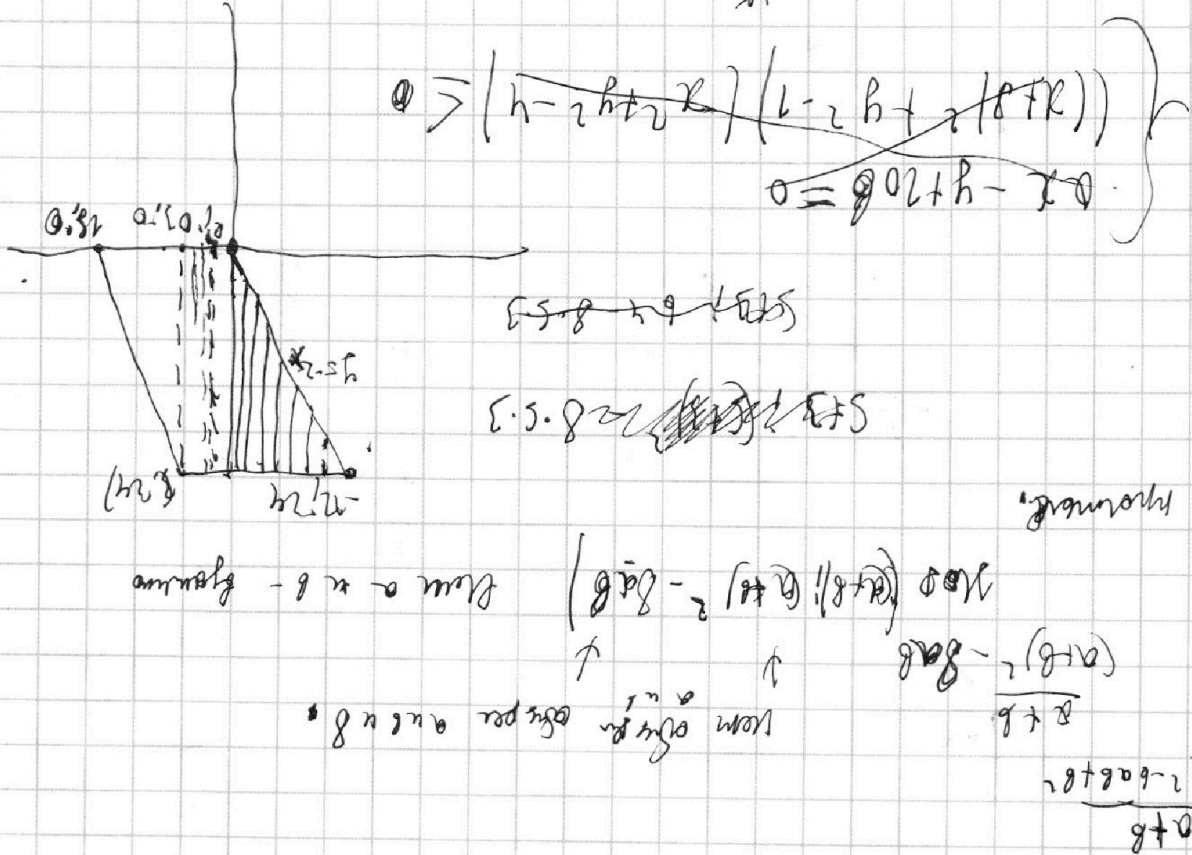
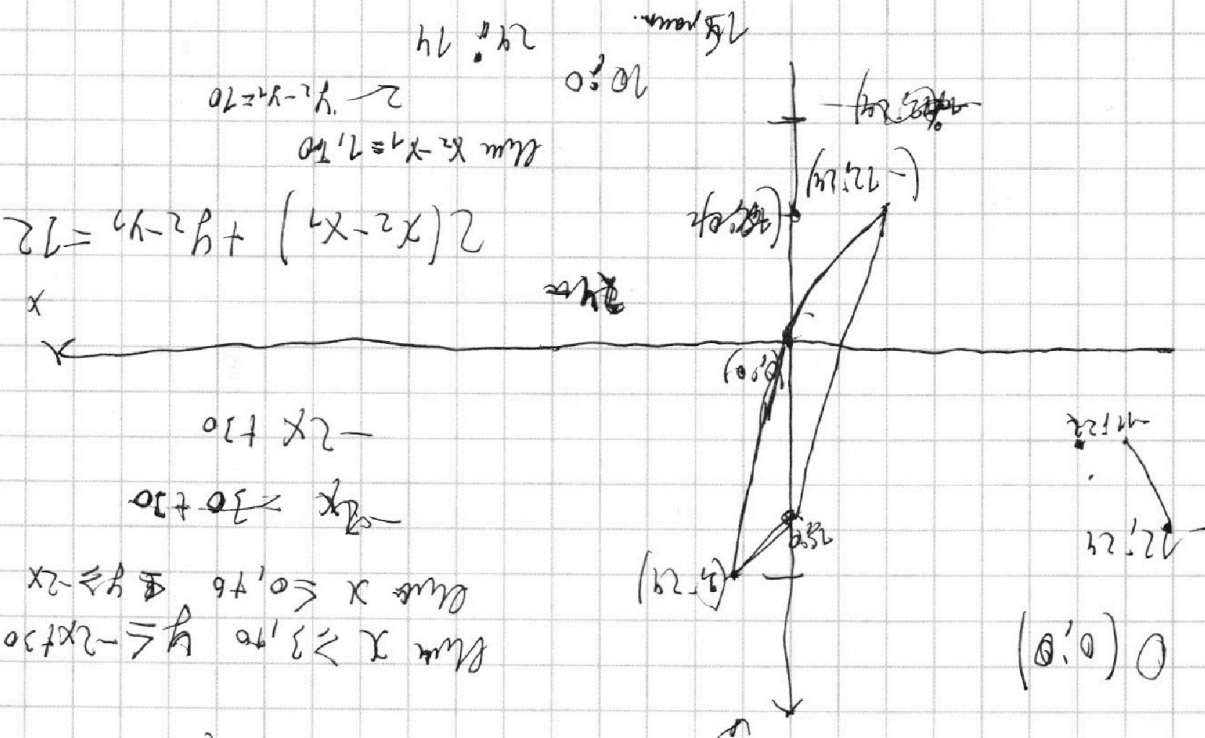
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a, b$  делится на  $2^k \cdot 7^{10}$   
 $l, c$  делится на  $2^{17} \cdot 7^{17}$   
 $o, e$  делится на  $2^{20} \cdot 7^{37}$

$a, b, c \min = ?$

$a = 2^k \cdot 7^x$

$b = 2^l \cdot 7^y$

$c = 2^m \cdot 7^z$

~~$x+z \geq 14$~~

~~$z+m \geq 17$~~

$x+z \geq 14$

$z+m \geq 17$

$x+m \geq 20$

$\min x+y+z$

$m-x \geq 3$

$x+m \geq 20$

~~$x+m \geq x+z$~~

$2x+z \geq 20$

$2x \geq 17$

$x_{\min} = 9$

$m_{\min} = 12$

$z_{\min} = 5$

26

$x+z \geq 14$

$z+m \geq 17$

$x+m \geq 20$

~~$x+z \geq 14$~~

$z \geq 14-x$

~~$m \geq 17-x$~~

$x \geq 20-m$

$x+z+m \geq 51 - x - z - m$

$2(x+z+m) \geq 51$

$x+z+m \geq \frac{51}{2}$

$x+z+m \geq 26$

$y+w \geq 10$

$w+n \geq 17$

$y+n \geq 37$

$y \geq 10-w$

~~$w \geq 17-n$~~

$w \geq 17-n$

$y+17-n \geq 10$

$y \geq n-7$

~~$n \geq 37-y$~~

$y \geq 37-n$

$y = 10-w$

$w = 10-w+n = 17$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

$\frac{a+b}{(a-b)^2-3ab}$

$\frac{a+b}{(a-b)^2-3ab}$

$(a-b)^2-3ab$

Нов. кор  $(a+b)(a-b)^2-3ab)^{3/2}$

$(a+b)(a-b)^2-3ab$

$y \geq 10-w$

$w \geq 17-n$

$n \geq 37-y$

$2(y+w+n) \geq$

$\geq 64$

$y+w+n \geq 32$

$y+w+n \geq 37$

~~$y+w+n \geq 37$~~

$17+20$

$\frac{a}{b}$  - неопределенно

наим. м.д.

кор  $(a, b) = 7$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

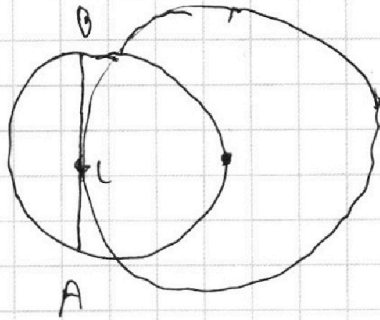
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

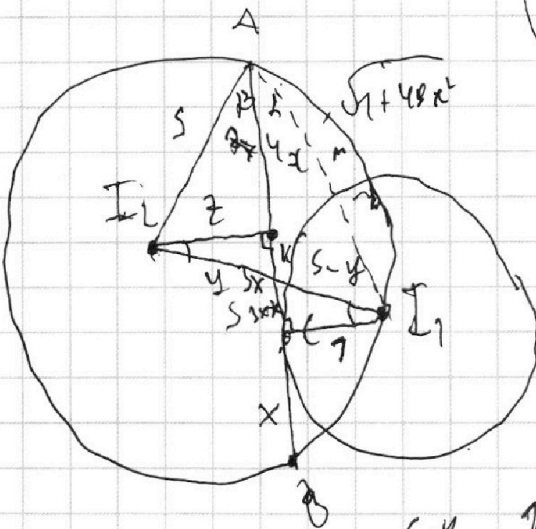
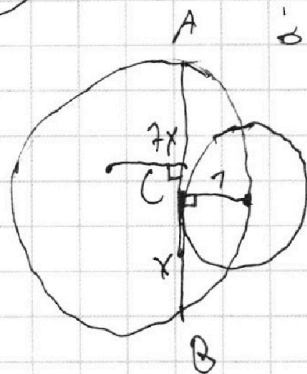


№4

$AC:LB=7$



$AB=?$



$$a - 3,5x + 1 + \sqrt{a + 7,5x - 1} + \sqrt{2a^2 - 14,8x - 1} = 5$$

$$2x^2 + 2ax + 1 = 2 - 7x$$

$$2x^2 - 5x + 1 + 2x^2 + 2ax + 1 =$$

$$2x^2 - 7,5x + 2 = a$$

$$z = \sqrt{25x^2 + 2x} \sqrt{25 - 16x^2}$$

$$m = \sqrt{1 + 49x^2}$$

$$\frac{1}{5-y} = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{y}$$

$$\frac{5-y}{y} = \frac{1}{z} = \frac{3x-k}{K}$$

$$\frac{3x-k}{K} = \frac{1}{\sqrt{25-16x^2}}$$

$$K = (3x-k) \sqrt{25-16x^2}$$

$$K^2 = (3x-k)^2 (25-16x^2)$$

$$K^2 = (9x^2 - 6xk + k^2) (25-16x^2)$$

$$25 = 25 + 149x^2 - 2 \cdot \left( \frac{28x^2}{5\sqrt{149x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{149x^2}} \right) \cdot 5 \sqrt{149x^2}$$

$$1 + 49x^2 - 56x^2 + 8x = 0 \quad 5 = 64 + 49x^2 = 64 + 28 = 92 \quad 50 = \sqrt{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+49x^2}}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{7x}{\sqrt{1+49x^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{4x}{5}$$

$$\cos(\alpha + \beta) =$$

$$= \frac{28x^2}{5\sqrt{149x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{149x^2}} \cdot \frac{4x}{5} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left( (x+2)^2 + y^2 - 1 \right) (x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$\frac{y}{1-\cos\beta} - \frac{y}{1-\cos\alpha} \cdot \cos\beta = \frac{y}{1-\cos\beta} - \frac{y}{1-\cos\alpha} \cdot \cos\alpha$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\sqrt{2b^2 + 2\cos\beta b^2}$$

$$2\sqrt{2+2\cos\beta} \cdot \frac{b}{2} = 2\sin\frac{\beta}{2} \cdot \frac{b}{2}$$

$$AB = 4$$

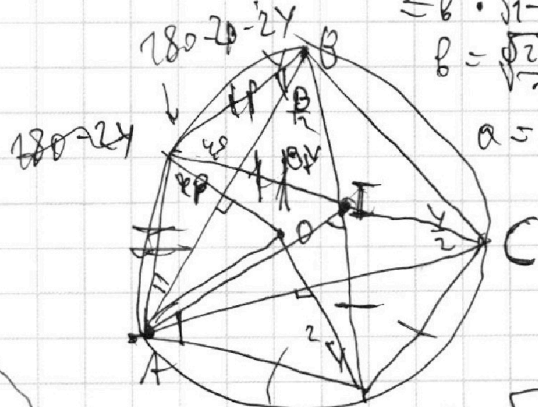
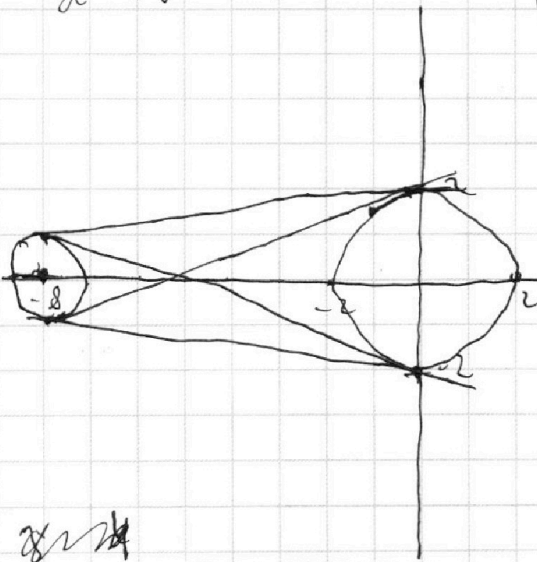
$$b\sqrt{2+2\cos\beta} = b \cdot 2 \cdot \sin\frac{\beta}{2}$$

$$\sqrt{2+2\cos\beta} =$$

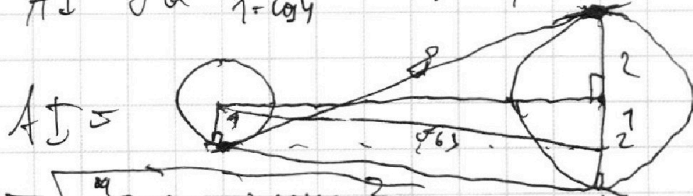
$$= b \cdot \sqrt{1-\cos^2\frac{\beta}{2}}$$

$$b = \frac{\sqrt{2+2\cos\beta}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\beta}{2}}}$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{1-\cos\alpha}}$$



$$AI = \sqrt{a^2 x_1^2 + \frac{y_1^2}{1-\cos\alpha} - 2 \cdot \cos\beta \cdot \frac{2}{1-\cos\alpha}}$$



$$AI = \sqrt{\frac{4}{1-\cos\beta} - 2 \cos\alpha \cdot \frac{2}{1-\cos\alpha}}$$

$$y = ax + b$$

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 12$$

$$14 - 1 = 63$$

$$\sqrt{63}$$

$$y = ax + b$$

$$-\sqrt{63} = a \cdot 8$$

$$a = \frac{-\sqrt{63}}{8}$$

$$\sqrt{64 - 9} = \sqrt{55}$$

$$2x_2 - 2x_1 = 12 - y_2 + y_1 - \sqrt{55} = -8a$$

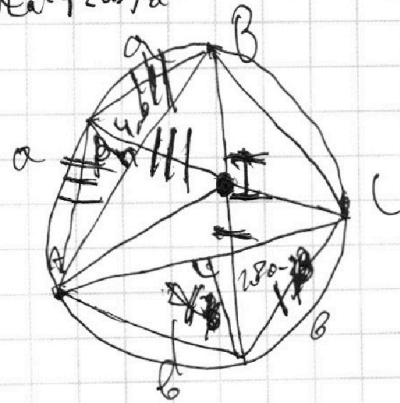
$$2x_2 - 2x_1 = 12 - a(2x_2 + 2x_1) + a = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$2(2x_2 - 2x_1) = 12 - a(2x_2 + 2x_1) + a$$

$$AI =$$

$$AB = \sqrt{a^2 + 2\cos\alpha a^2}$$

$$AC = \sqrt{2b^2 + 2\cos\beta b^2}$$



$$2\beta - 2\gamma$$

$$a^2 \left( \frac{\sin^2\frac{\beta}{2} \cdot b^2}{2} + \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot a^2}{2} \right)$$

$$+ \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot a^2}{2} + \frac{\sin^2\frac{\beta}{2} \cdot b^2}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

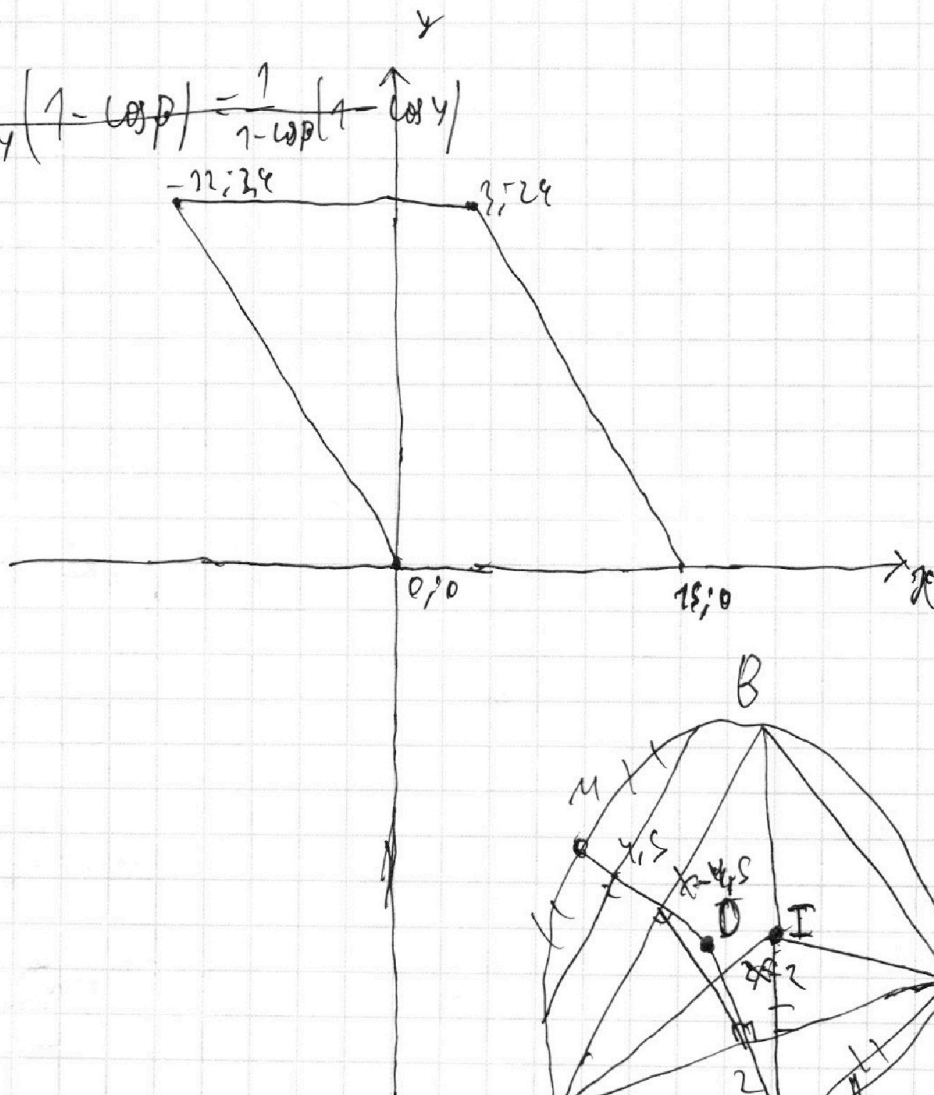


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{1-\cos \gamma} - \frac{\cos \beta}{1-\cos \beta} = \frac{1}{1-\cos \beta} - \frac{1}{1-\cos \beta} \cdot \cos \gamma$$

$$\frac{1}{1-\cos \gamma} (1-\cos \beta) = \frac{1}{1-\cos \beta} (1-\cos \gamma)$$



$$(x_2 - x_1) = \pi$$

$$x_2 - x_1$$

$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+1)^2 + y^2 - 1) / (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$\cos \alpha = 1 - x$$

$$\cos \beta = 1 - 2,25x$$

$$\cos \gamma = \cos \pi$$