



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

9

Пусть $a = 2^x \cdot 7^y$; $b = 2^z \cdot 7^w$; $c = 2^m \cdot 7^n$

Тогда
$$\begin{cases} x+z \geq 14 \\ z+m \geq 17 \\ x+n \geq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 14-z \\ z \geq 17-m \\ m \geq 20-x \end{cases} \Rightarrow 2(x+z+m) \geq 51$$

Так как x, z, m целые
 $u \geq 0$, то
 $x+z+m \geq 26$

Пример, когда $x+z+m = 26$:

$$x=9; z=5; m=12$$

$$x+z=14$$

$$z+m=17$$

$$x+n=20$$

и

$$y+w \geq 10$$

$$w+n \geq 17$$

$$y+n \geq 17$$

и

$$y+n+w \geq 37$$

Пример, когда $y+n+w = 37$:

$$y=17; w=0; n=20$$

$$17+0 \geq 10$$

$$0+20 \geq 17$$

$$17+20 \geq 37$$

Итак $\min abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~а) б)~~ Если $\frac{a}{b}$ - целая дробь, то $\text{НОД}(a; b) = 1$

Тогда нам нужно найти максимальный

$$\text{НОД}(a+b; a^2+b^2-bab), \quad a^2+b^2-bab = (a+b)^2 - 2ab$$

Если a и b взаимно просты, то у числа $a+b$ нет
никаких общих делителей с числом a и b , значит

$\text{НОД}(a+b; ab) = 1$. Помогает на выражение $(a+b)^2 - 2ab$
любого делителя $a+b$: $(a+b)^2 - 2ab \equiv 0 - 2 \equiv -2$.

Имеем максимальное число m , на которое можно
сократить $a+b$ и a^2+b^2-bab не больше

больше: Пример для $m=8$: сокращаем на 8

$$\frac{5+3}{5^2-6 \cdot 5 \cdot 3+3^2} = \frac{8}{21-90} = \frac{8}{-69} \Rightarrow \frac{1}{-8}$$

Ответ: 8.

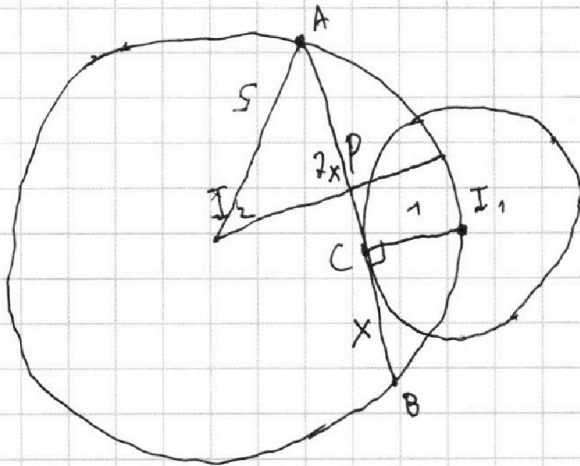
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $BC=x$, тогда $AC=7x$. Попробуем отрезок AI_1 :

Т.к. AB - диаметр, то $\angle ACI_1 = 90^\circ$, значит $AI_1 = \sqrt{1+49x^2}$.

Проведем радиус CI_2 точки I_2 , который перпендикулярен хорде AB в центре P .

$AP=PB=4x$ и $\angle I_2PA = 90^\circ$. Обозначим $\angle I_2AP$ за α и

$\angle CAI_1$ за β найдем $\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \beta, \cos \beta$:

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+49x^2}}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{5}$$

Найдем $\cos(\alpha+\beta)$:

$$\cos \alpha = \frac{4x}{\sqrt{1+49x^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{4x}{5}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{28x^2}{5\sqrt{1+49x^2}} - \frac{\sqrt{25-16x^2}}{5\sqrt{1+49x^2}}$$

$I_2I_1=5$, так I_1 лежит на CI_2 .

Углы $\angle I_2I_1A$ выразим по т. косинусов стороны I_1I_2 :

$$25 = 25 + 1 + 49x^2 - 2 \left(\frac{28x^2}{5\sqrt{1+49x^2}} - \frac{\sqrt{25-16x^2}}{5\sqrt{1+49x^2}} \right) \cdot 5 \cdot \sqrt{1+49x^2}$$

Отсюда:

$$0 = 1 + 49x^2 - 56x^2 + 2\sqrt{25-16x^2} \Rightarrow 7x^2 - 1 = 2\sqrt{25-16x^2} \Rightarrow 49x^4 - 14x^2 + 1 =$$

$$= 900 - 64x^2 \quad \text{Пусть } x^2 = a, \text{ тогда ур-е имеет вид: } 49a^2 + 50a - 99 = 0$$

$$D = 2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 \quad \text{или } a = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{98}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Отсюда $X = \frac{-50 + \sqrt{2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{98}$
ищем $AB = 8 \sqrt{\frac{-50 + \sqrt{2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{98}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\text{Пусть } a = \frac{2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1}{2} =$$

$= 2x^2 - 1,5x + 2$; ~~тогда~~ Тогда наше ур-е имеет
виз:

$$\sqrt{a - 3,5x + 1} - \sqrt{a + 3,5x - 1} = 2 - 7x$$

возведем всё в квадрат:

$$2a - 2\sqrt{a^2 - (3,5x + 1)^2} = (7x - 2)^2$$

$$2a - \sqrt{4a^2 - (7x - 2)^2} = (7x - 2)^2$$

$$\text{пусть } b = 7x - 2:$$

$$2a - \sqrt{4a^2 - b^2} = b^2 \Rightarrow 2a - b^2 = \sqrt{4a^2 - b^2} \text{ (оба возведем}$$

$$\text{в квадрат: } 4a^2 - 4ab^2 + b^4 = 4a^2 - b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^4 - b^2(4a - 1) = 0 \Rightarrow b^2(b^2 - 4a + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (7x - 2)^2 ((7x - 2)^2 - 4a + 1) = 0$$

Сначала решим это ур-е и потом проверим корни на
исходном:

$$1) 7x - 2 = 0$$

$$7x = 2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$2) 49x^2 - 24x + 4 + 1 - 8x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$41x^2 - 12x - 3 = 0$$

$$49x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$D = 64 + 12 \cdot 49$$

$$x_1 = \frac{8 + \sqrt{64 + 12 \cdot 49}}{82}$$

$$41x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$D = 64 + 4 \cdot 41$$

$$x_1 = \frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 41}}{82}$$

$$x_2 = \frac{8 - \sqrt{64 + 4 \cdot 41}}{82}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Проверим $x = \frac{2}{7}$:

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$D = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1.5$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup (1.5; +\infty)$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$D < 0$$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} - \frac{10}{7} + 3} + 3 - \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + \frac{4}{7} + 1} = 0$$

$$2 \cdot \frac{4}{49} - \frac{10}{7} + 3 = 2 \cdot \frac{4}{49} + \frac{4}{7} + 1$$

$$2 = 2. \quad \checkmark$$

$$2) \quad x_1 = \frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82}$$

$$2 - 7 \cdot \left(\frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82} \right) < 0.$$

$$\sqrt{2 \cdot \left(\frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82} \right)^2}$$

$$\text{можно } 2 - 2 \cdot \left(\frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82} \right) > 0.$$

$$\text{нормально } \sqrt{2 \cdot \left(\frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82} \right)^2}$$

$$-5 \cdot \frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82} + 1 - \sqrt{2 \cdot \left(\frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82} \right)^2} + 2 \cdot \frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82}$$

< 0 , а значит верно как подходить. Так корни

x_1, x_2, x_3 можно считать корнями уравнения

$$\left| \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right| = |2 - 7x| \quad \text{и} \quad \frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82} < \frac{8 + 24}{82} < 1$$

$$3) \quad x_2 = \frac{8 - \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82} < 0$$

$$7x_2 < 0, \text{ можно } 2 - 7x_2 > 0, \text{ следовательно}$$

$$2x_2^2 - 5x_2 + 3 > 2x_2^2 + 2x_2 + 1, \text{ нормально этот корень}$$

можно как подходить и $x_2 \notin [1; 1.5]$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{7}, \frac{8 + \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82}, \frac{8 - \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 47}}{82}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

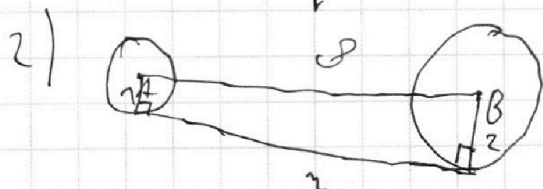
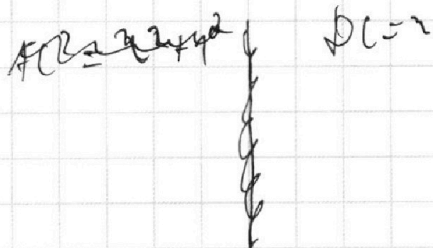
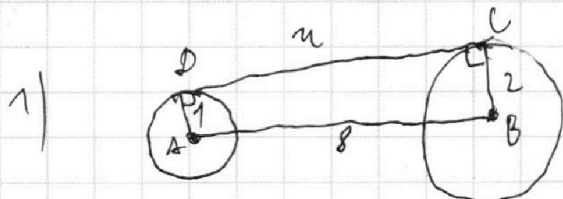
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

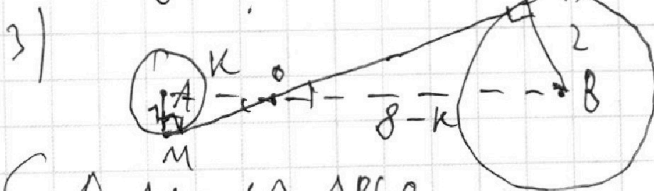
Необходимо, чтобы было ровно 2 решения, то
прямая $y = ax + 10$ ^{параллельна} касательна ^{одну} обеим окружностям. Тогда хорды ^в касательные этих
окружностей и помитали все возможные
значения a :



Или 2 касательных

пересеку, значит в этом случае

$$a = -\frac{\sqrt{63}}{8}$$

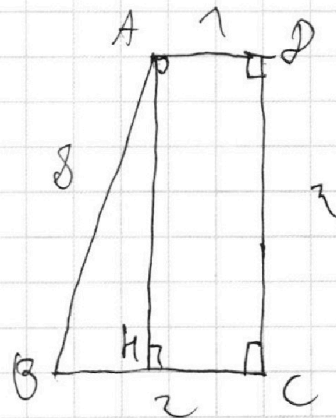


$$\begin{cases} \Delta AMO \sim \Delta BCO \\ \text{по 2 углам} \\ AO = k; OB = 8 - k. \end{cases} \Rightarrow \frac{8-k}{k} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{8-k}{k} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{8}{k} - 1 = 2$$

$$\frac{8}{k} = 3, k = \frac{8}{3}$$



$AC = AD$, так $ADCH$ -
прямоугольник.

$$\text{значит } AC = \sqrt{64 - 4} = \sqrt{60}$$

$BC = 2 - CH$, $CH = AD$, так
 $ADCH$ - прямоугол., значит

$$AC = \sqrt{64 - 4} = \sqrt{60}$$

равносильно найдем
 k - центр
касательной a :

для этого найдем
уравнение касательной

$$y = ax, \text{ где } B$$

$$\text{точке } x=0, y=10$$

получим $0 = a \cdot 10$ или $x=8$

$$y \neq \text{равно } \sqrt{63}$$

$$\sqrt{63} = 8a$$

$$a = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

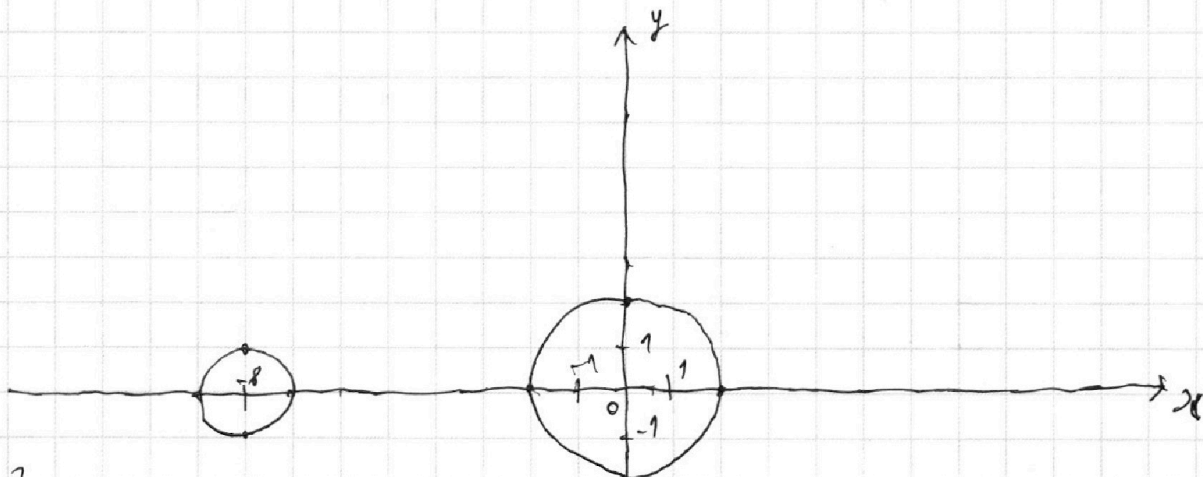
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$



Заметим, что две точки $(x; y)$

~~на~~ находятся ~~внутри~~
одной из окружностей
(они ~~ни~~ никак не пересекаются),
то она подходит условию:

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

Т.к ~~для~~ одной ~~такой~~ она ~~находится~~ одна точка
будет положительна, а другая ≤ 0 .

Значит если прямая $y = ax + 10b$ пересекает одну
окружность в двух точках, то тогда решений будет
бесконечно много. Если же прямая $y = ax + 10b$
не проходит через окружности или же касается
только одной из них, то тогда решений ≤ 1 .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Известно } MO^2 = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 1} ; \quad CO^2 = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 4}$$

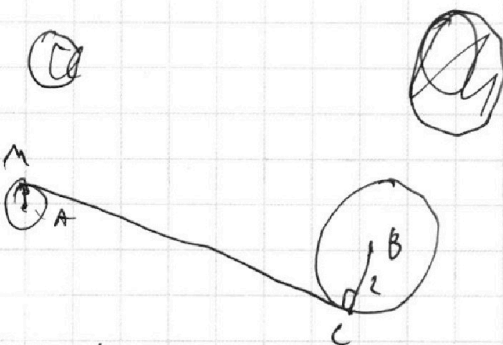
$$\text{Отсюда } CM = 3 \sqrt{\frac{64-9}{9}} = \sqrt{55}$$

Найдём a :

$$\sqrt{55} = 8a$$

$$a = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

4)



Скорее всего 4 симметричны третьей, поэтому $a = -\frac{\sqrt{55}}{8}$

Других общих касательных у этих окружностей нет, значит мы нашли все значения a , поэтому это уравнение $70b$ в $y = ax + 70b$ может параллельно перенести касательную кривую в любую точку параллельной касательной.

$$\text{Ответ: } a = \pm \frac{\sqrt{55}}{8}; \quad \pm \frac{\sqrt{55}}{8}; \quad \pm \frac{\sqrt{63}}{8}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

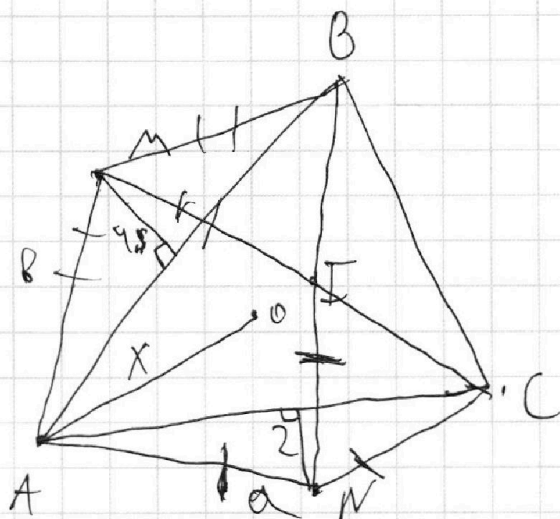
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



O - центр
отклонной

по длине O отрезков $NI = NC = AN$ и $IM = MB =$
 $= AM$. Пусть $OA = x$, тогда $AC^2 = 2x^2 - 2 \cos B x^2$
и $AN^2 = 2x^2 - 2 \cos B x^2$, $AC^2 = 2AN^2 + 2 \cos B \cdot AN^2 =$
 $= (4x^2 - 4 \cos B x^2) (1 + \cos B)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2a - b^2 = \sqrt{4a^2 - b^2} + \frac{a^2 - b^2}{2a + b}$$

$$4a^2 - 4ab^2 + b^4 = 4a^2 - b^2$$

$$b^4 - 4ab^2 + (4a - 1) = 0$$

$$b^2(b^2 - 4a) - b^2(b^2 - 4a)$$

$$955 = 9hl + 0.2h = 2.8 + 0.2h + b^2$$

$$955 - 2.8 = 0.2h + b^2$$

$$952.2 = 0.2h + b^2$$

$$4761 = h + 5b^2$$

$$4761 - 5b^2 = h$$

$$4761 - 5b^2 + 3b^2 = 0$$

$$4761 - 2b^2 = 0$$

$$2b^2 = 4761$$

$$b^2 = 2380.5$$

$$b = 48.78$$

$$2a - \sqrt{4a^2 - b^2} = b^2$$

$$2a - \sqrt{4a^2 - b^2} - b^2 = 0$$

$$2a - \sqrt{4a^2 - b^2} = b^2$$

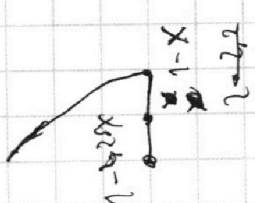
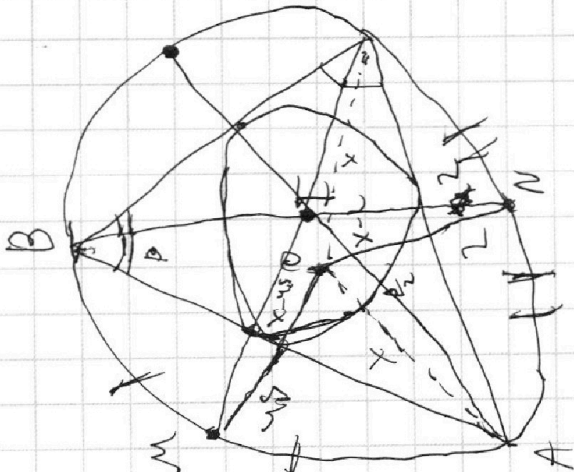
$$2a - b^2 = \sqrt{4a^2 - b^2}$$

$$4a^2 - 4ab^2 + b^4 = 4a^2 - b^2$$

$$b^4 - 4ab^2 + b^2 = 0$$

$$b^2(b^2 - 4a + 1) = 0$$

$$b^2 = 0 \text{ or } b^2 = 4a - 1$$



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 7x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 - 28x + 49x^2$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 28x - 49x^2 = 4 - 28x + 49x^2$$

$$-47x^2 + 23x - 1 = 0$$

$$47x^2 - 23x + 1 = 0$$

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{23^2 - 4 \cdot 47 \cdot 1}}{2 \cdot 47}$$

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 188}}{94}$$

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{341}}{94}$$

$$x = \frac{23 + \sqrt{341}}{94} \text{ or } x = \frac{23 - \sqrt{341}}{94}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

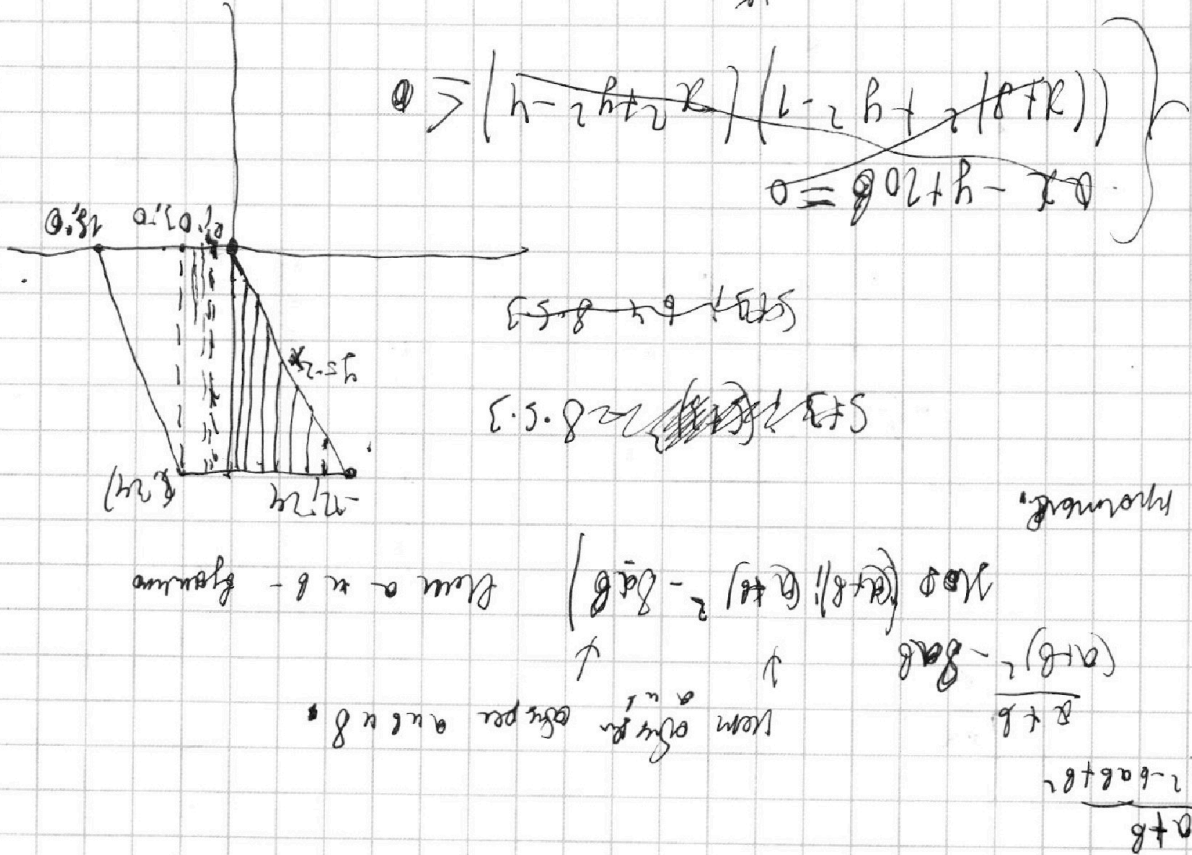
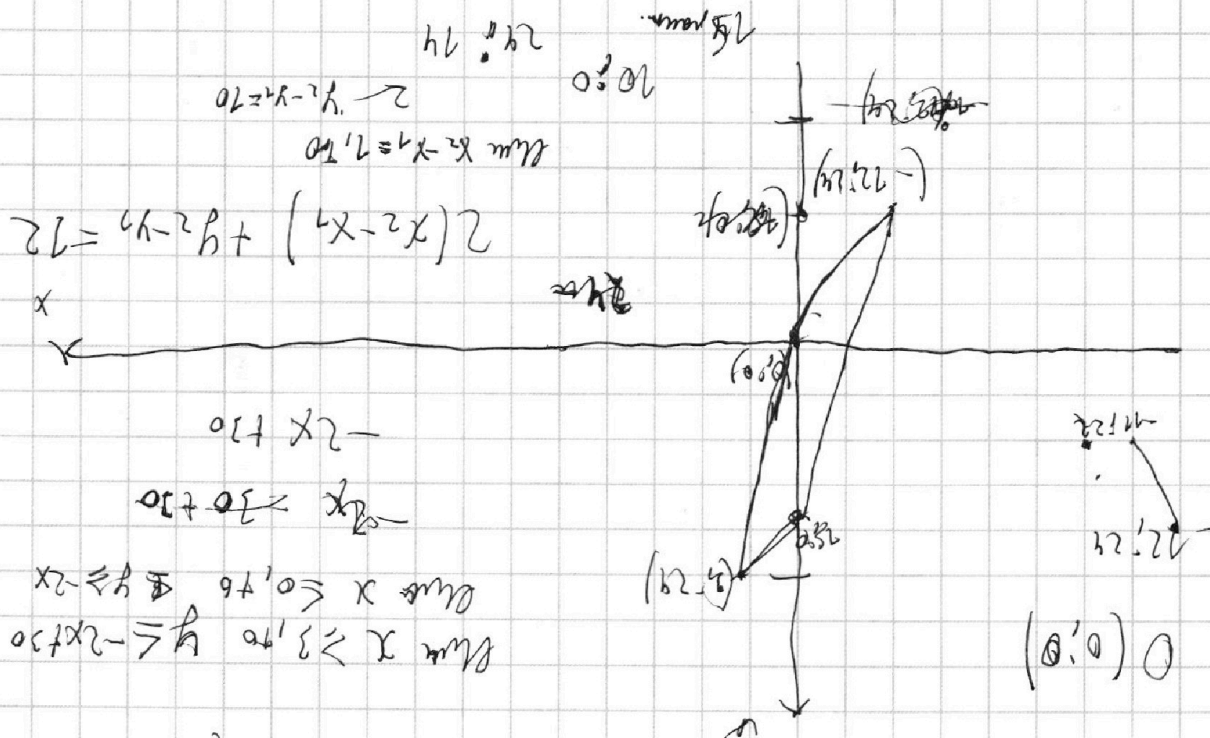
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



a, b делится на $2^m \cdot 7^{10}$
 l, c делится на $2^{17} \cdot 7^{17}$
 o, e делится на $2^{20} \cdot 7^{37}$

$a, b, c \min = ?$

$a = 2^x \cdot 7^y$

$b = 2^z \cdot 7^w$

$c = 2^m \cdot 7^n$

~~$x+z \geq 14$~~

~~$z+w \geq 17$~~

$x+z \geq 14$

$z+w \geq 17$

$x+m \geq 20$

$\min x+y+z$

$m-x \geq 3$

$x+m \geq 20$

~~$x+m \geq x+z$~~

$2x+z \geq 20$

$2x \geq 17$

$x_{\min} = 9$

$m_{\min} = 12$

$z_{\min} = 5$

26

$x+z \geq 14$

$z+m \geq 17$

$x+m \geq 20$

~~$x+z \geq 14$~~

$z \geq 14-x$

~~$m \geq 17-x$~~

$x \geq 20-m$

$x+z+m \geq 51 - x - z - m$

$2(x+z+m) \geq 51$

$x+z+m \geq \frac{51}{2}$

$x+z+m \geq 26$

$y+w \geq 10$

$w+n \geq 17$

$y+n \geq 37$

$y \geq 10-w$

~~$w \geq 17-n$~~

$w \geq 17-n$

$y+17-n \geq 10$

$y \geq n-7$

~~$n \geq 37-y$~~

$y \geq 37-n$

$y = 10-w$

$w = 10-w+n = 17$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

$\frac{a+b}{(a-b)^2-3ab}$

$\frac{a+b}{(a-b)^2-3ab}$

$(a-b)^2-3ab$

нов. пор $(a+b)(a-b)^2-3ab)^2$

$(a+b)(a-b)^2-3ab$

$y \geq 10-w$

$w \geq 17-n$

$n \geq 37-y$

$2(y+w+n) \geq$

≥ 64

$y+w+n \geq 32$

$y+w+n \geq 37$

~~$y+w+n$~~

$17+20$

$\frac{a}{b}$ - неопределенно

нов. пор $m \geq ?$

нов. пор $(a, b) = ?$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

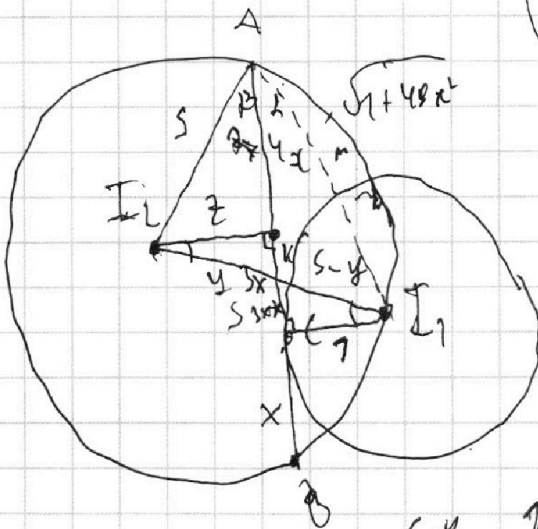
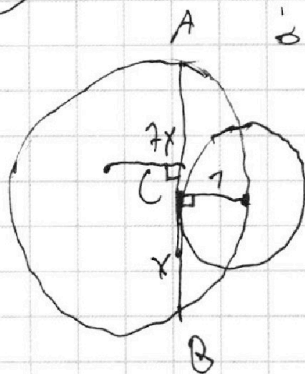
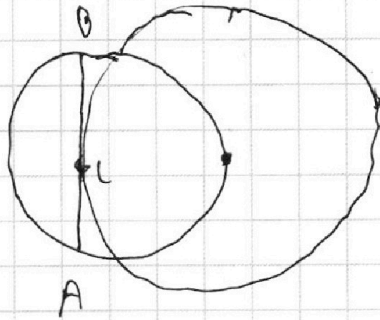
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

$AC:LB=7$

$AB=?$



$$a - 3,5x + 1 + \sqrt{a + 7,5x - 1} + \sqrt{25 - 16x^2} = 7$$

$$2x^2 + 2ax + 1 = 2 - 7x$$

$$2x^2 - 5x + 1 + 2\sqrt{25 - 16x^2} = 1$$

$$2x^2 - 5x + 1 + 2\sqrt{25 - 16x^2} = 1$$

$$2x^2 - 5x + 1 + \sqrt{25 - 16x^2} = 1$$

$$\sqrt{25 - 16x^2} = 5 - 2x$$

$$25 - 16x^2 = 25 - 20x + 4x^2$$

$$-16x^2 = -20x + 4x^2$$

$$-20x^2 + 20x = 0$$

$$-20x(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ or } x = 1$$

$$z = \sqrt{25 - 16x^2}$$

$$m = \sqrt{1 + 49x^2}$$

$$\frac{1}{5-x} = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{y}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+49x^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{5}$$

$$\frac{5-x}{k} = \frac{1}{z} = \frac{3x-k}{k}$$

$$\frac{5-x-k}{k} = \frac{1}{\sqrt{25-16x^2}}$$

$$k = (5-x-k)\sqrt{25-16x^2}$$

$$k^2 = (5-x-k)^2(25-16x^2)$$

$$k^2 = (8x^2 - 6xk + k^2)(25-16x^2)$$

$$25 = 25 + 149x^2 - 2 \cdot \left(\frac{28x^2}{5\sqrt{1+49x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{1+49x^2}} \right) \cdot 5\sqrt{1+49x^2}$$

$$25 - 149x^2 - 56x^2 + 8x = 0$$

$$72x^2 - 8x - 7 = 0$$

$$D = 64 + 2016 = 2080$$

$$D = 40\sqrt{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+49x^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{4x}{5}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{28x^2}{5\sqrt{1+49x^2}} - \frac{4x}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$((x+2)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$\frac{y}{1-\cos\beta} - \frac{y}{1-\cos\alpha} \cdot \cos\beta = \frac{y}{1-\cos\beta} - \frac{y}{1-\cos\alpha} \cdot \cos\alpha$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\sqrt{2b^2 + 2\cos\beta b^2}$$

$$2\sqrt{2+2\cos\beta} \cdot \frac{b}{2} = 2\sin\frac{\beta}{2} \cdot \frac{b}{2}$$

$$AB = 4$$

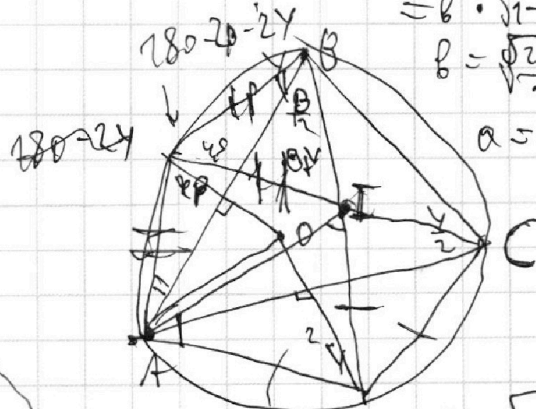
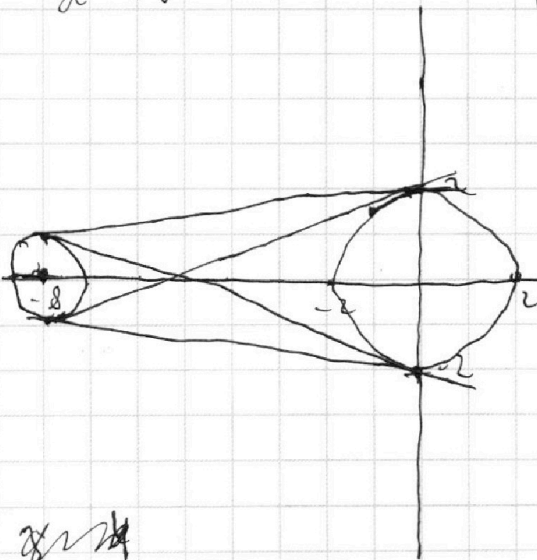
$$b\sqrt{2+2\cos\beta} = b \cdot 2 \cdot \sin\frac{\beta}{2}$$

$$\sqrt{2+2\cos\beta} =$$

$$= b \cdot \sqrt{1-\cos^2\frac{\beta}{2}}$$

$$b = \frac{\sqrt{2+2\cos\beta}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\beta}{2}}}$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{1-\cos\alpha}}$$



$$AI = \sqrt{a^2 - \frac{y}{1-\cos\alpha} - 2 \cdot \cos\beta \cdot \frac{2}{1-\cos\alpha}}$$

$$AI =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{1-\cos\beta} - 2 \cos\alpha \cdot \frac{2}{1-\cos\beta}}$$

$$y = ax + b$$

$$(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = 12$$

$$14 - 1 = 63$$

$$\sqrt{63}$$

$$y = ax + b$$

$$-\sqrt{63} = a \cdot 8$$

$$a = \frac{-\sqrt{63}}{8}$$

$$\sqrt{64 - 9} = \sqrt{55}$$

$$2x_2 - 2x_1 = 12 - y_2 + y_1 - \sqrt{55} = -8a$$

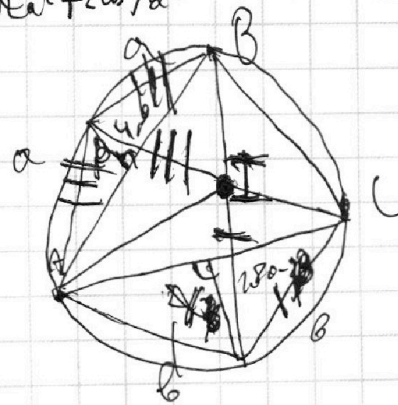
$$2x_2 - 2x_1 = 12 - a \cdot 2x_2 + a + a \cdot 2x_1 + b$$

$$2(x_2 - x_1) = 12 - a(2x_2 - 2x_1) + a + b$$

$$AI =$$

$$AB = \sqrt{a^2 + 2\cos\alpha a^2}$$

$$AC = \sqrt{b^2 + 2\cos\beta b^2}$$



$$280 - 2\beta - 2\gamma$$

$$a^2 \left(\frac{\sin^2\frac{\beta}{2} \cdot b^2}{2} + \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot c^2}{2} \right)$$

$$(280 - 2\beta - 2\gamma) \left(\frac{\sin^2\frac{\beta}{2} \cdot a^2}{2} + \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot b^2}{2} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

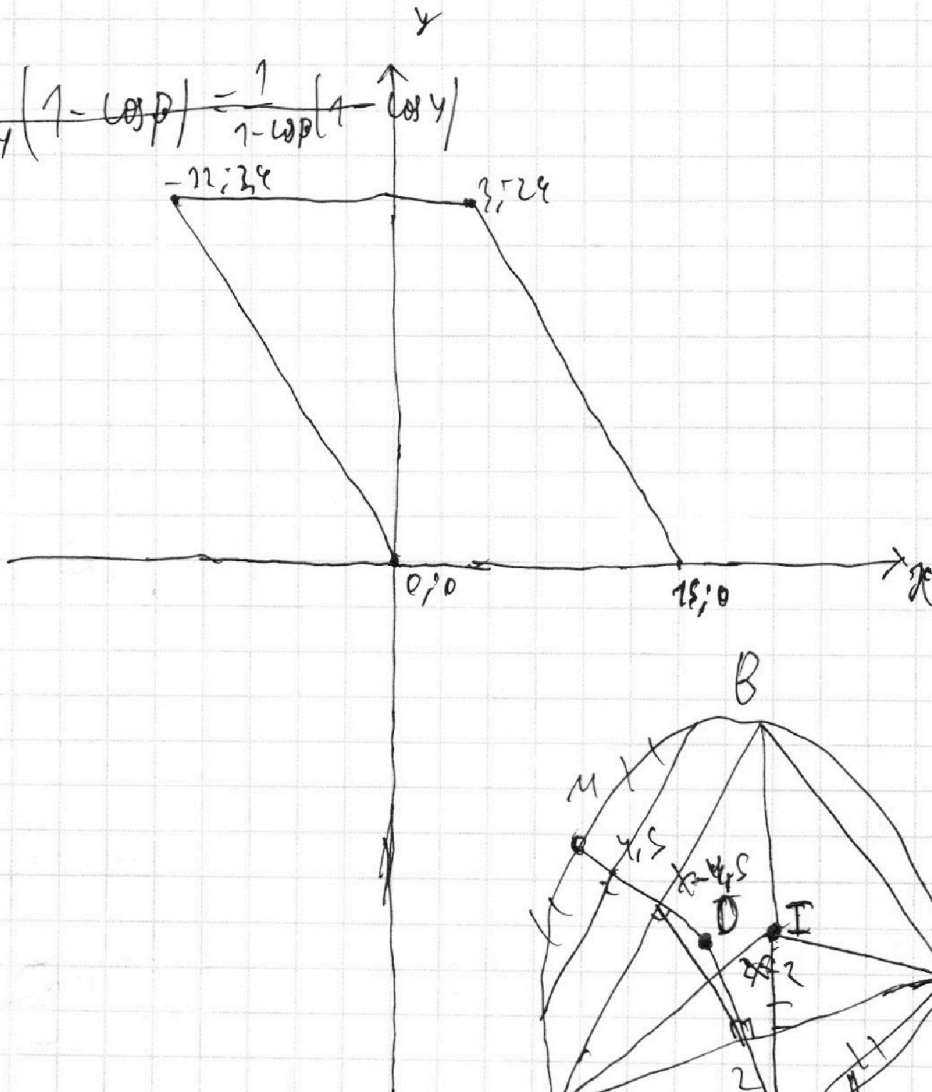
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{1-\cos \gamma} - \frac{\cos \beta}{1-\cos \beta} = \frac{1}{1-\cos \beta} - \frac{1}{1-\cos \beta} \cdot \cos \gamma$$

$$\frac{1}{1-\cos \gamma} (1-\cos \beta) = \frac{1}{1-\cos \beta} (1-\cos \gamma)$$



$$(x_2 - x_1) = \Delta x$$

$$x_2 - x_1$$

$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+1)^2 + y^2 - 1) / (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$\cos \alpha = 1 - x$$

$$\cos \beta = 1 - 2,25x$$

$$\cos \gamma = \cos \pi$$