



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1.

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\left. \begin{matrix} ab : 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot k \\ bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot h \\ ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot m \end{cases} \quad | \quad k, h, m \in \mathbb{N}$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot k \cdot h \cdot m$$

слева квадрат nat. числа \Rightarrow

\Rightarrow справа все степени четны $\Rightarrow k \cdot h \cdot m : 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow k, h, m \geq 2 \Rightarrow$ пусть без общности

$k=2$.

Пусть:

$$\begin{cases} a : 7^x \\ b : 7^y \\ c : 7^z \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} x, y, z \in \mathbb{Z}; \\ x, y, z \geq 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} x, y, z - \text{макс. степени} \\ \text{вхождения } 7 \text{ в } a, b, c. \end{matrix}$$

$$\begin{cases} ab : 7^{x+y} \\ bc : 7^{y+z} \\ ac : 7^{x+z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 7^{x+y} \cdot h = 7^{15} \cdot k \\ bc = 7^{y+z} \cdot l = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot h \\ ac = 7^{x+z} \cdot i = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot m \end{cases} \quad h, l, i \in \mathbb{N}; h, l, i \neq 7$$

$$y = \frac{(x+y+y+z) - (x+z)}{2} = \frac{11+18-39}{2} = -5$$

$$\begin{cases} x+y=11 \\ y+z=18 \\ x+z=39 \end{cases}$$

Но $y \geq 0$. Противоречие, т.е.

такой ~~системы уравнений~~ 7^{10} ~~не существует~~ (или наоборот), тогда $x+z$ была меньше.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Ищем без параметра (общее) h~~

Пусть:

$$\begin{cases} ab = 7^{x+y} \cdot h \\ bc = 7^{y+z} \cdot l \\ ac = 7^{x+z} \cdot i = 7^{x+z+10} \cdot ee, e/7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = 11 \\ y+z = 18 \\ x+z+10 = 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = 11 \\ y+z = 18 \\ x+z = 29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 11 \\ y = 0 \\ z = 18 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{система линейная, решений не } \infty \\ \Rightarrow \text{решений } [1]. \end{array} \right)$$

\rightarrow ко $7^{x+z} : 7^{39}$

~~$ab = 7^{11} \cdot h$
 $bc = 7^0 \cdot l$
 $ac = 7^{39} \cdot i = 7^{23} \cdot 7^{16} \cdot m$
 $e = 2^{23} \cdot n$~~

$x+z \geq 39$

Увеличить нужно на $39-29=10$

Увеличим z на 10:

$m = n = 1$

$$\begin{cases} x = 11 \\ y = 0 \\ z = 28 \end{cases}$$

$$abc = \sqrt[2]{2^{55} \cdot 7^{38}} \cdot k \cdot m \cdot n = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

при:

$$\begin{cases} a = 2^{11} \cdot 7^{10} \\ b = 2^5 \cdot 7^0 \\ c = 2^{12} \cdot 7^{28} \end{cases}$$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2} \cdot \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-2ab}$$

$$\begin{cases} (a+b) : m \\ (a+b)^2 - 2ab : m \end{cases}$$

$$2ab : m$$

Пусть:

$$\begin{cases} a \equiv k, \text{ тогда} \\ b \equiv m-k \end{cases} \quad (\text{где } k \geq 0, k < m, k \in \mathbb{N})$$

$$(a+b)^2 - 2ab \equiv 0$$

$$-2ab \equiv 0$$

$$2ab \equiv 0$$

$$2k(m-k) \equiv 0$$

$$2mk - 2k^2 \equiv 0$$

:m

$$-2k^2 \equiv 0$$

$$2k^2 : m$$

Пусть: $\text{НОД}(m; k) = d, d > 1$.

Тогда $a \equiv k \Rightarrow a : d$ (м.к. $m:d, k:d$)

$b \equiv m-k \Rightarrow b : d$ (м.к. $m:d, k:d$), тогда $(a, b) > d$

$> 1 \Rightarrow \frac{a}{b}$ сократима, противоречие.

Тогда $\text{НОД}(m; k) = 1, 2k^2 : m \Rightarrow 2 : m$ (следствие)

$= 0$). $2 : m \Rightarrow m \leq 2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть: } m = 9.$$

$$\text{При } a = 2, b = 7:$$

$$\frac{9}{49 - 98 + 4} = -\frac{9}{45} = -\frac{1}{5}.$$

$$\text{Ответ: } 9.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4.

Пусть: $a = 3x^2 + 3x + 1$, $b = 1 - 9x$. Тогда:

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$\begin{cases} a+b = a+b^2+2b\sqrt{a} \\ \sqrt{a}+b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = b^2 + 2\sqrt{a} \\ b = 0 \\ \sqrt{a} + b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a} = \frac{1-b}{2} \quad (2) \\ b = 0 \quad (1) \\ \sqrt{a} + b \geq 0 \end{cases}$$

1) $b = 0$

$$1 - 9x = 0$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$a = 3x^2 + 3x + 1 = \frac{3}{81} + \frac{3}{9} + 1 = \frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{10}{27} + 1 = \frac{37}{27} > 0$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a} = 0$$

0 = 0
Верно.

$$2) \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \frac{1 - (1 - 9x)}{2}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = \frac{81x^2}{4}$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x + 4 = 0$$

$D = 144 - 4 \cdot 69 < 0$. Нет реш.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $\frac{1}{9}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



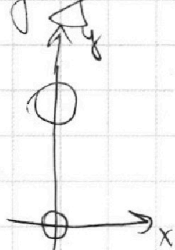
№6.

$$\begin{cases} ax+by-8=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

Каждое неравенство выполняется $\Leftrightarrow (x,y)$

лежит либо в кругу с ц. $(0;0)$ и $r=1$, либо

в кругу с ц. $(0;12)$ и $r=4$.



П.к. два решения, но две
точки прямой $ax+by-8=0$

лежат в кругах. П.к. прямая не

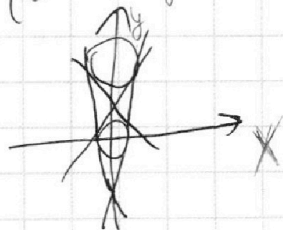
может пересек. один круг в двух

точках, то она пересекает каждую

точку. Значит, она обеда касательная

к ним. Такие касательных по 2 пары симмет-

ричных (относ. Oy)





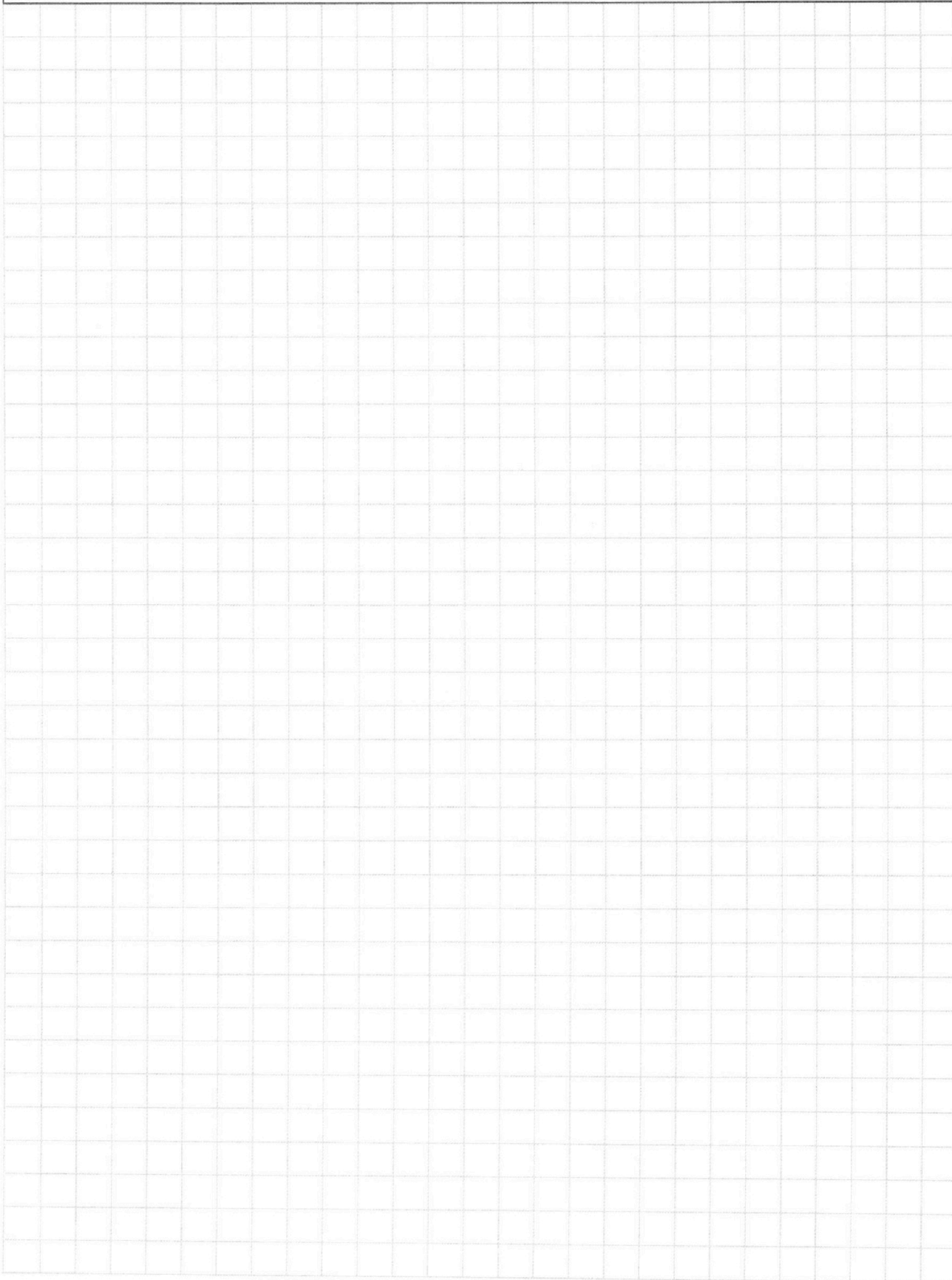
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_1^2 + (y_1 - 12)^2 = 16$$

$$\frac{y_1}{x_1}$$

$$1 + \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 - 24\left(\frac{y_1}{x_1}\right) + 144 = 16$$

$$400 + 160 + 36 = 596$$

$$= 400 + 116 = 516$$

$$t^2 - 24t + 129 = 0$$

$$D = 576 - 516 = 60$$

$$t = \frac{24 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 12 \pm \sqrt{15}$$

$$b_1 x_1 x_0 (x_1 - x_0) = \frac{b_1 x_0^2 (x_1^2 - x_0^2)}{\sqrt{64b^2 - 1} (x_0^2 (x_1^2 - x_0^2) - x_1^2 x_0^2)}$$

$$\frac{y_1}{x_1} = 12 \pm \sqrt{15}$$

$$b x_1^2 x_0^2 \pm x_1^2 \sqrt{(64b^2 - 1)(x_0^2 - 1)} = b_1 x_0^2 x_1 \pm x_0^2 \sqrt{(64b^2 - 1)(x_1^2 - 1)}$$

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ ax_0 + y_0 = 8b \end{cases}$$

$$a = \frac{6x_0 \pm \sqrt{(64b^2 - 1)(x_0^2 - 1)}}{4x_0^2}$$

$$x_0^2 + (ax_0 - 8b)^2 = 1$$

$$\frac{6x_1 \pm \sqrt{(64b^2 - 1)(x_1^2 - 1)}}{x_1^2}$$

$$x_0^2 + a^2 x_0^2 - 16abx_0 + 64b^2 = 1$$

$$256b^2 x_0^2 + 4 - 256b^2 - 4x_0^2 =$$

$$= 256(b^2 - 1) + 4(1 - x_0^2) =$$

$$= (256b^2 - a)(x_0^2 - 1)$$



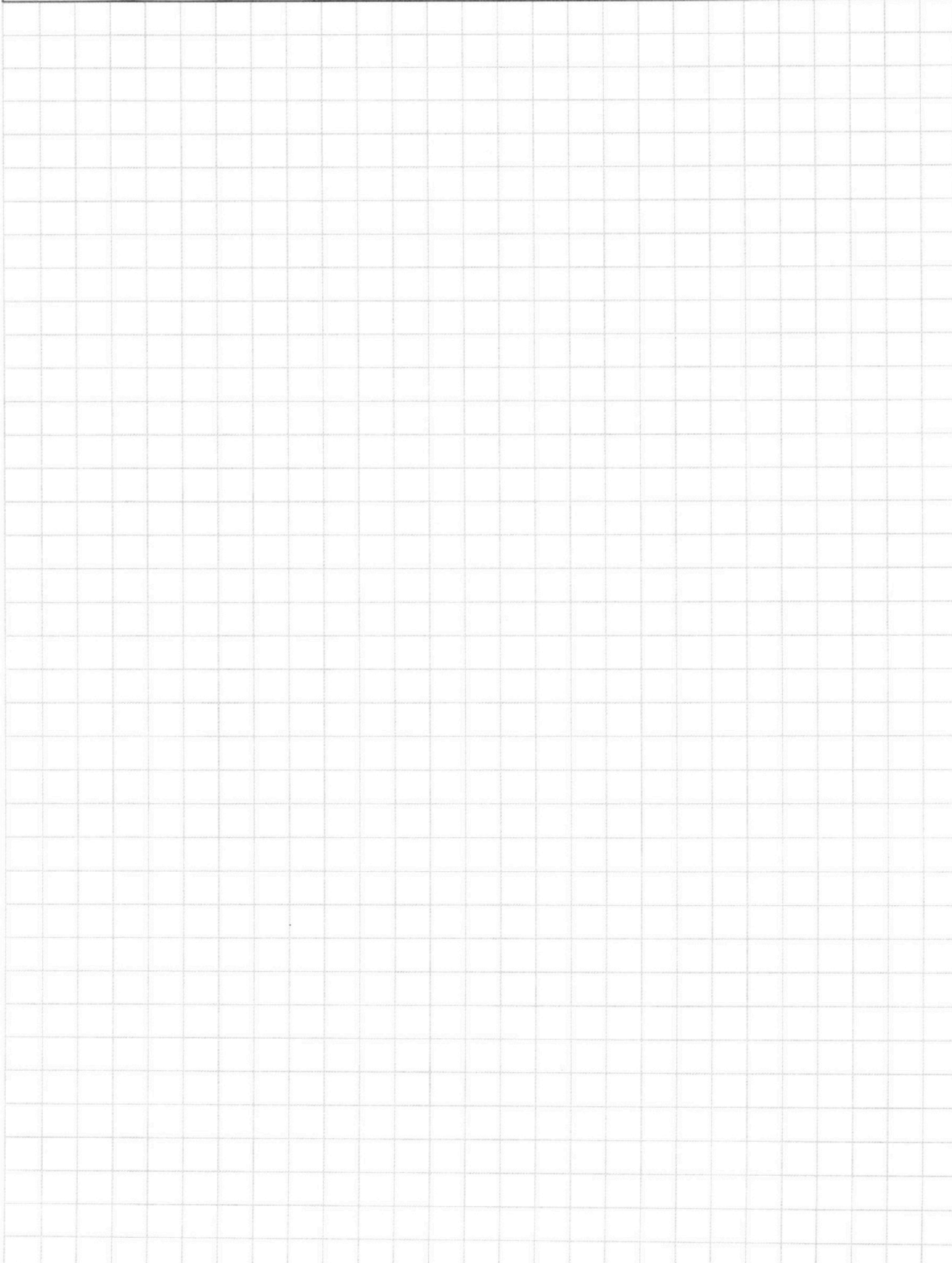
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

33
18



$$m \sqrt{169^2 - 182 + 4}$$

$m=9$

$$\frac{7+2}{49-98+4}$$

$(9ab):m$
 $(a+b):m$

$\frac{9}{49}$

$$169 - 637 + 49$$

$b \equiv m-k$

$9ab \equiv m$

$9k(m-k) \equiv 0$

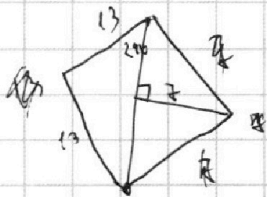
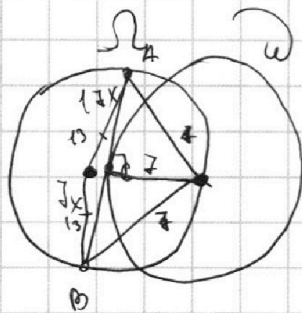
$9mk - 9k^2 \equiv 0$
 $h (9k^2) \equiv m$

$9ab : m$

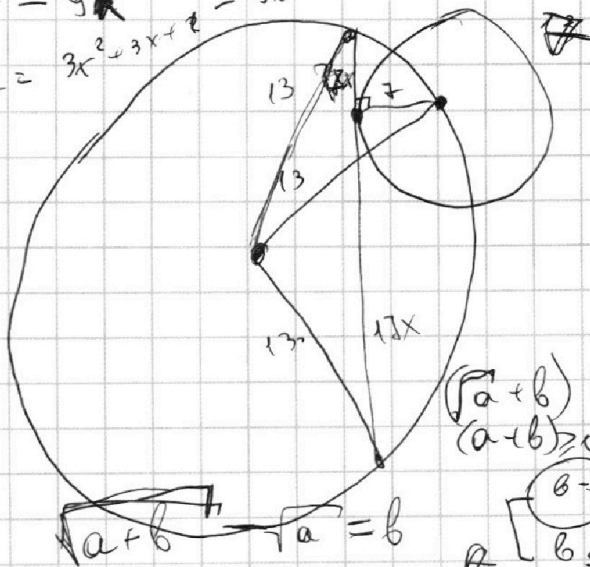
$9ab = mk$

$(a+b) = mn$

$49x^2 + 49 = k^2$
 $289x^2 + 49 = m^2$



$mn^2 - 9k$
 $3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 - 3x + 2 - 9x + 1$



$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$t = 3(x+1)^2$

$\sqrt{t-1} = \dots$

$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$

$x = \frac{-28\sqrt{3}}{6}$

$(a+b) \geq 0$
 $(a-b) \geq 0$

$b \leq 1$

$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$a+b = a + 2b\sqrt{a} + b^2$

$1 = 2\sqrt{a} + \sqrt{a} = \frac{1-b}{2}$

$(ax+y-8b=0)$
 $(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-1)$

$(a+b) : 5$
 $(a^2 - 7ab + b^2) : 5$

$((a+b)^2 - 9ab) : m$

$\frac{49}{49}$
 $\frac{147}{49}$
 3

$mk : 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab = 2^{16} \cdot 7^{11} \cdot k = x$
 $bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot n = y$
 $ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot m = z$

$2 \cdot 49 = 98$
 $2 \cdot 3 = 6$
 $3 \cdot 7 = 21$
 $49 \cdot 3^4 = 441$

$abc = \sqrt{\frac{xy}{z} \cdot \frac{xz}{y} \cdot \frac{yz}{x}} = \sqrt{xyz}$
 $abc = \sqrt{2^{55} \cdot 7^{68} \cdot n \cdot m}$

$\frac{k}{m-k} (k+m-k) = 0$

$5k = 2 \cdot m$
 $m = 5$
 $k = 5k^2$
 $(5k^2) : m$

$a = 2^{11} \cdot 7^{21}$
 $b = 2^{17} \cdot 7^{18}$
 $c = 2^{23} \cdot 7^{39}$

$a+b = 2^1$
 $b+c = 7^{18}$
 $a+c = 2^{23}$
 $58-18 = 40$
 (22)
 $a = 11$

$a+b$
 $a^2 - 2ab + b^2$
 $(a+b) : m$
 $(a^2 - 2ab + b^2) : m$

$a = km + k$
 $b = m + (m-k)$

$a \equiv k \pmod{m}$
 $b \equiv m-k \pmod{m}$

$a+b \equiv 0^2 - 2ab + b^2$
 $2ab \equiv (a+b)^2 - (a+b)$
 $2ab \equiv (a+b-1)(a+b)$

$\frac{m(k+k+1)}{(km+k)^2 + (km+m-k)^2}$
 $k^2 - 7(m-k)k + (m-k)^2 \equiv 0$
 $2k^2 - 7mk - 7k^2 + m^2 - 2mk \equiv 0$
 $-5k^2 - 9mk + m^2 \equiv 0$
 $-5k^2 \equiv 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

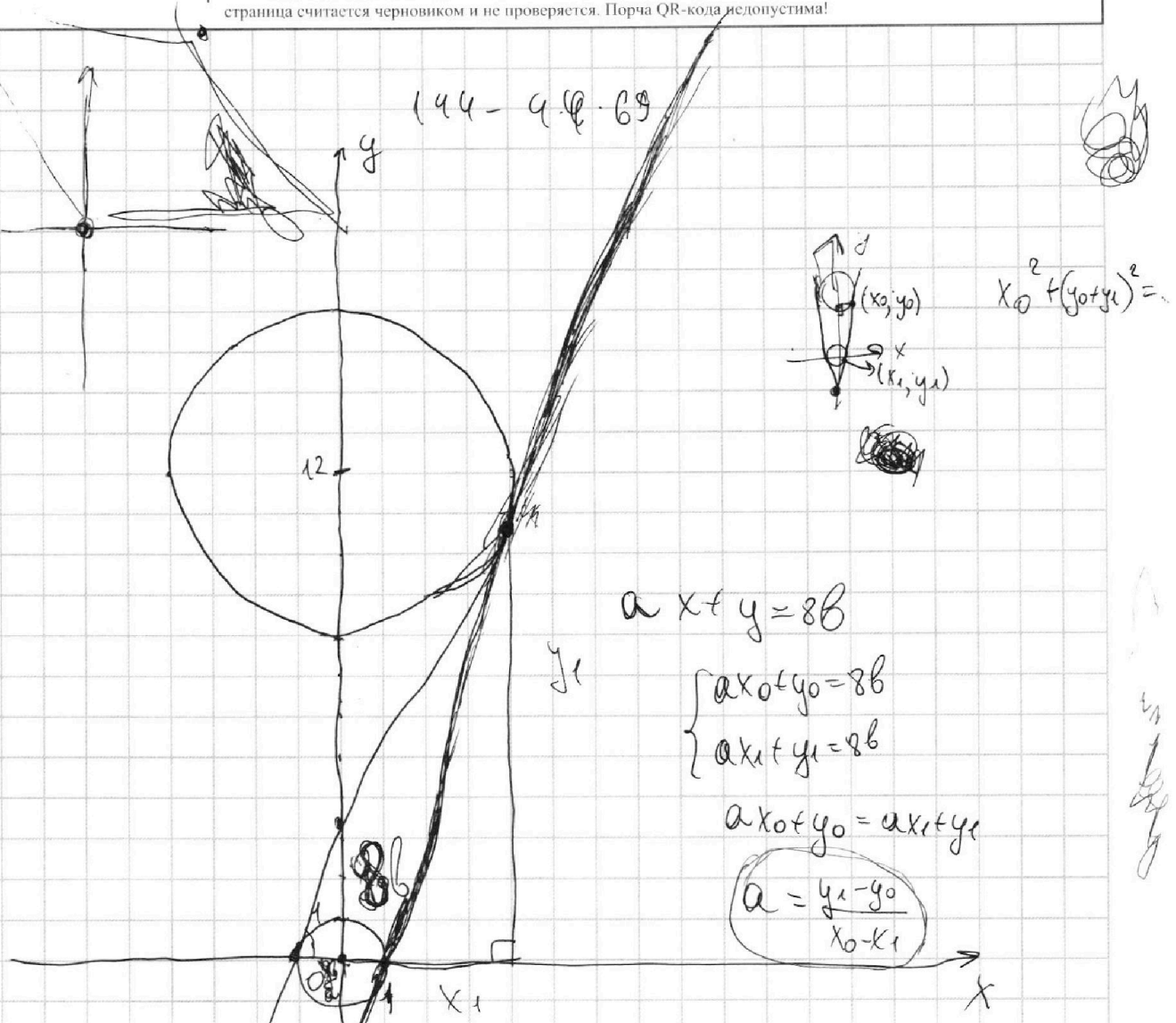
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



144 - 48 - 69

$$x_0^2 + (y_0 + 1)^2 = \dots$$

$$ax + y = 8b$$

$$\begin{cases} ax_0 + y_0 = 8b \\ ax_1 + y_1 = 8b \end{cases}$$

$$ax_0 + y_0 = ax_1 + y_1$$

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_0 - x_1}$$

$$\begin{cases} (x_0, y_0) \\ (x_1, y_1) \end{cases} \begin{cases} ax_0 + y_0 = 8b \\ ax_1 + y_1 = 8b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ x_1^2 + (y_1 - 12)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 12)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ -24y + 144 + 1 = 16 \end{cases}$$

$$-24y = -129$$

$$y = \frac{129}{24}$$

$$x_0 = 1 - (ax_0 - 8b)^2$$

$$a^2 x_0^2 - 16ax_0b + 64b^2 + 2x_0 = 1 = 0$$

$$D = 256x_0^2b^2 - 4(64b^2 + 2x_0 - 1) =$$