



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = A \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 4^{\alpha_4}$ $c = C \cdot 2^{\gamma_2} \cdot 4^{\gamma_4}$
 $b = B \cdot 2^{\beta_2} \cdot 4^{\beta_4}$ т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, $A, B, C \neq 2, 4$
 $\forall \alpha$ β и γ $\in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Т.о. $\left. \begin{array}{l} \alpha_2 + \beta_2 \geq 14 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 14 \\ \gamma_2 + \alpha_2 \geq 20 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 51$, т.к. $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{N}$, то $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 26$

(2) $\left. \begin{array}{l} \alpha_4 + \beta_4 \geq 10 \\ \beta_4 + \gamma_4 \geq 14 \\ \gamma_4 + \alpha_4 \geq 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma_4 + \alpha_4 \geq 34 \Rightarrow \alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4 \geq 34$ т.к. $\alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(3) $A \cdot B \cdot C \geq 1$ т.к. $A, B, C \in \mathbb{N}$

Т.о. $abc = ABC \cdot 2^{(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)} \cdot 4^{(\alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4)} \geq 1 \cdot 2^{26} \cdot 4^{34}$

Пример:

$a = 2^9 \cdot 4^{10}$; $b = 2^6$; $c = 2^{11} \cdot 4^{24}$

$ab = 2^{15} \cdot 4^{10}$; $2^{14} \cdot 4^{10}$ $bc = 2^{14} \cdot 4^{24}$; $2^{13} \cdot 4^{14}$

$ac = 2^{20} \cdot 4^{34}$; $2^{20} \cdot 4^{34}$

$abc = 2^{26} \cdot 4^{34}$

Ответ: $2^{26} \cdot 4^{34}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \quad \text{т.о. если } (a+b)^2 = m \text{ то } (a+b)^2 : m$$

если числ. и знамен. делится на m ,

$$(a+b) : m \quad \text{и} \quad ((a+b)^2 - 8ab) : m ; \quad (a+b)^2 - 8ab \neq 0$$

$$(a+b) : m \Rightarrow (a+b)^2 : m$$

$$\text{получаемся: } \begin{matrix} ((a+b)^2 - 8ab) : m \\ : m \end{matrix} ; \quad ((a+b)^2 - 8ab) \neq 0 \quad \text{и} \quad (a+b)^2 : m$$

$$\Rightarrow 8ab : m$$

$$2) \frac{a}{b} - \text{несокр.} \Rightarrow (a, b) = 1 \Rightarrow \text{если } a : x, \text{ где } x \in \mathbb{N},$$
$$\text{то } b \not: x \Rightarrow (a+b) \not: x \quad \text{т.о. } (a+b, ab) = 1$$

$$\text{Но } (a+b) : m \quad \text{и} \quad 8ab : m \Rightarrow \text{т.к. } (a+b, ab) = 1, \quad 8 : m$$

$$\text{т.о. } m \leq 8 \quad \text{иначе } 8 \not: m.$$

$$3) \text{Пример } a=1, b=4$$

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{5}{1-6 \cdot 1 \cdot 4 + 16} = \frac{5}{50-24} = \frac{5}{26} \quad (\text{можно сокр. на 5.})$$

$$\text{Ответ: } 8 = m$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$2 - 4x = \underbrace{2x^2 - 5x + 3}_a - \underbrace{(2x^2 + 2x + 1)}_b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(1 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})) = 0$$

(1) $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$;

$$\sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$a = b$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x - 1$$

$$4x = 4$$

$$x = \frac{4}{4}$$

Проверка:

$$a \geq 0; b \geq 0$$

$$2 \cdot 16 - \frac{20}{4} + 3 = \frac{32}{4} + \frac{1}{4} \geq 0$$

$2x^2 + 2x + 1$ всегда больше нуля,

$$D = 4 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = -4$$

(2) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0$

$$a + 2\sqrt{ab} + b = 1$$

$$a + b = 1 - 2\sqrt{ab} \leq 1, \text{ т.к. } \sqrt{ab} \geq 0$$

т.о. $4x^2 - 3x + 4 \leq 1$

парабола $4x^2 - 3x + 4$ - парабола $\Rightarrow 4x^2 - 3x + 4$ принимает мин. знач. в её вершине

$$x^* = \frac{3}{8} \Rightarrow y^* = \frac{4 \cdot 9}{64} - \frac{9}{8} + 4 = \frac{9}{16} - \frac{9}{8} + 4 =$$

(абсцисса на которой лежит вершина параболы)

(ордината вершины т.е. минимальное значение)

$$= 4 - \frac{9}{16} = 3 \frac{7}{16} > 1$$

т.о. $4x^2 - 3x + 4 \geq 3 \frac{7}{16}$

т.о. в случае $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$ решений нет

Ответ: $\frac{4}{4}$

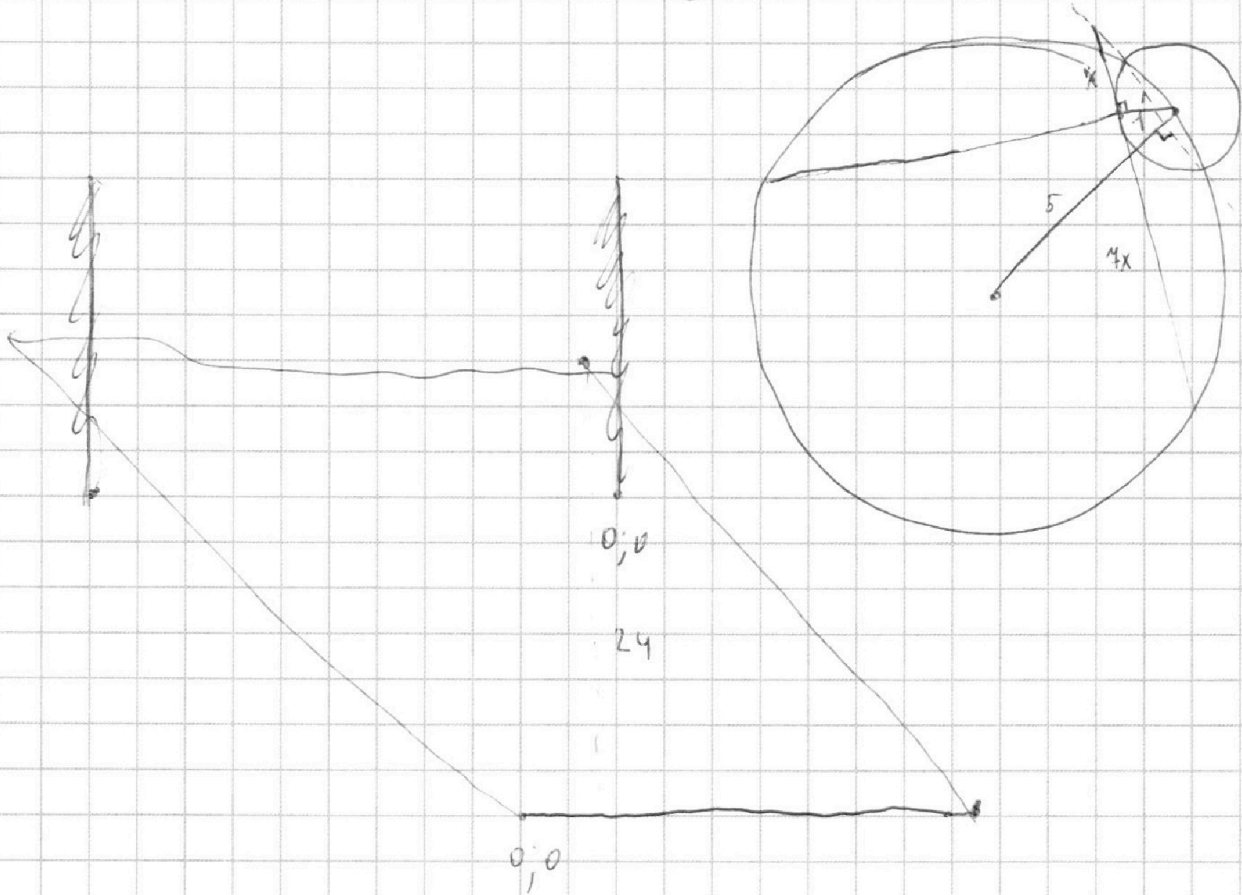
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

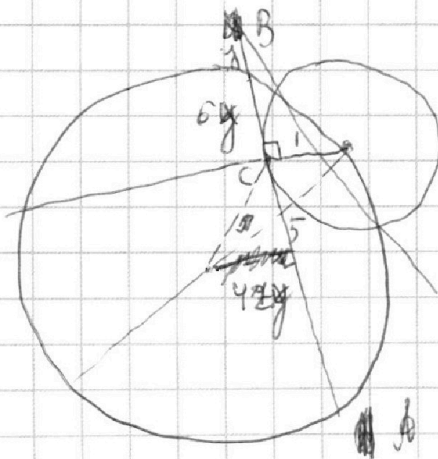
 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$4x^2 =$$



$$(y+x)^2 = y^2 + 2yx + x^2 = y^2 + 8yx$$

$$y^2 + 2yx + x^2 = y^2 + 8yx$$

$$6yx = x^2$$

$$6y = x$$

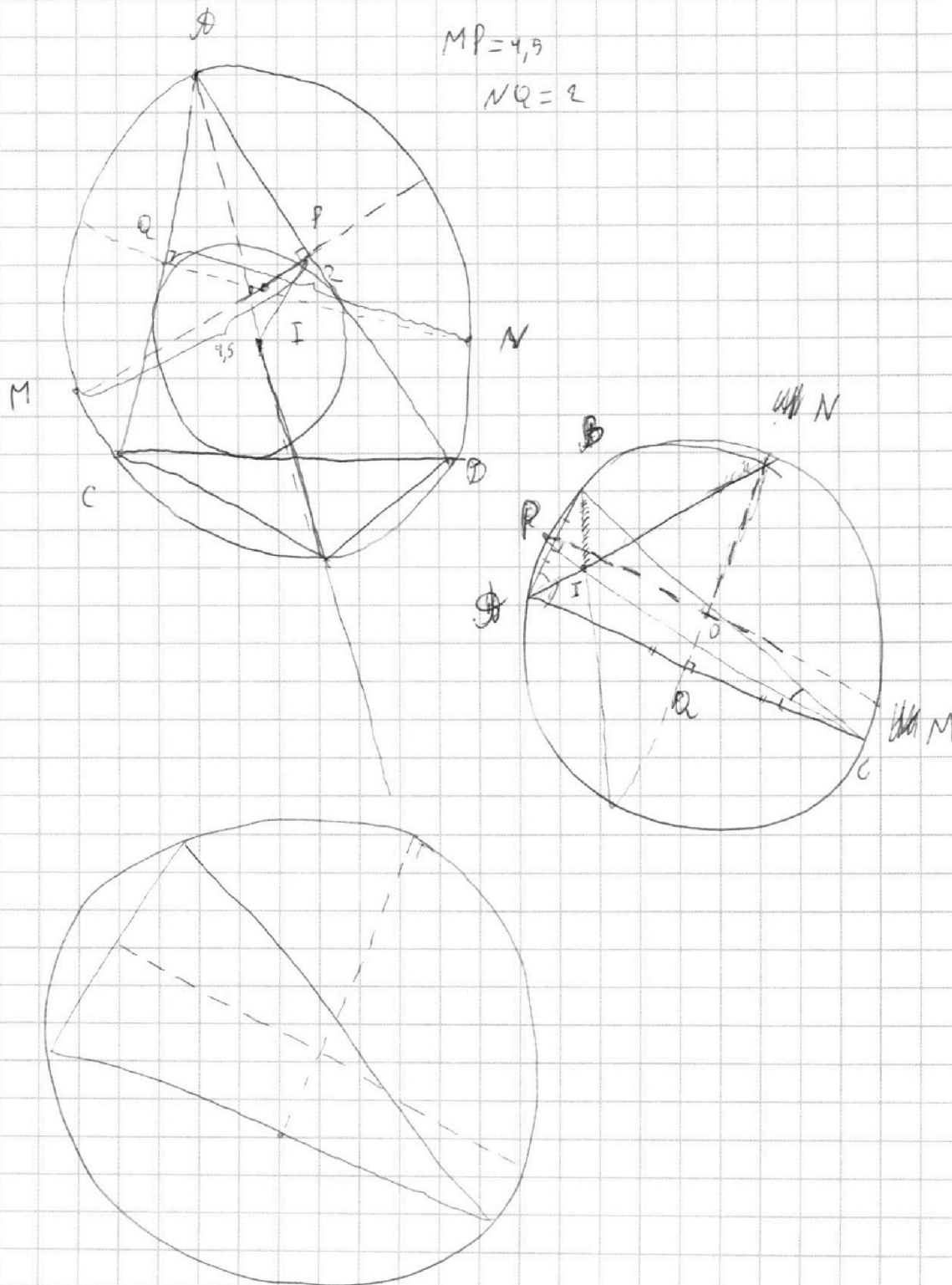
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





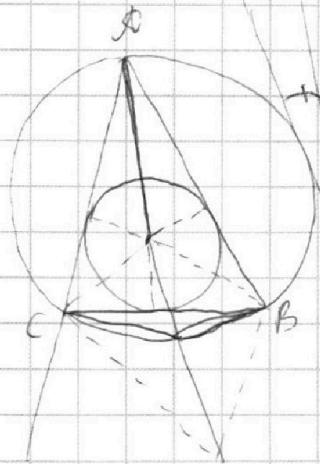
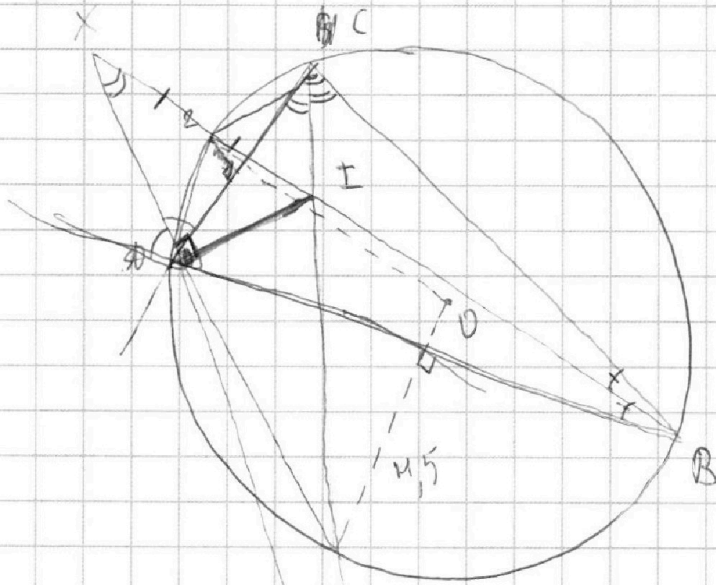
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

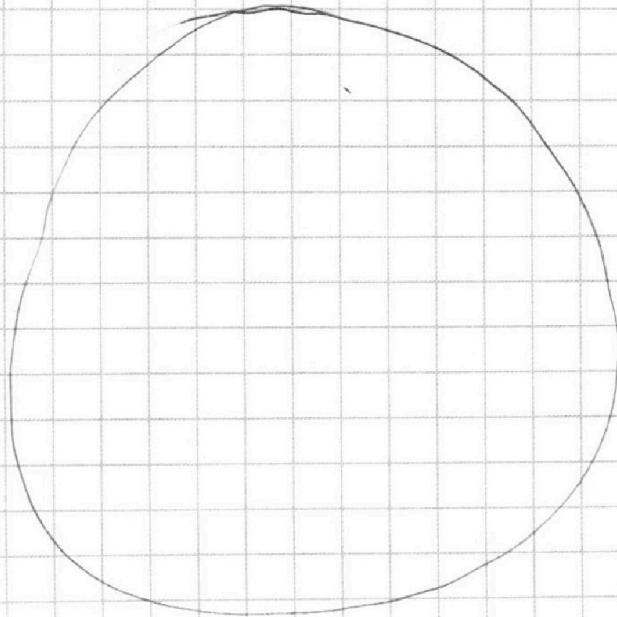


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$r^2 + (r - 4,5)^2 = 2r^2 + 9r + 4,5^2 = \frac{AB^2}{4}$$

$$Iy = \frac{AB}{2}$$





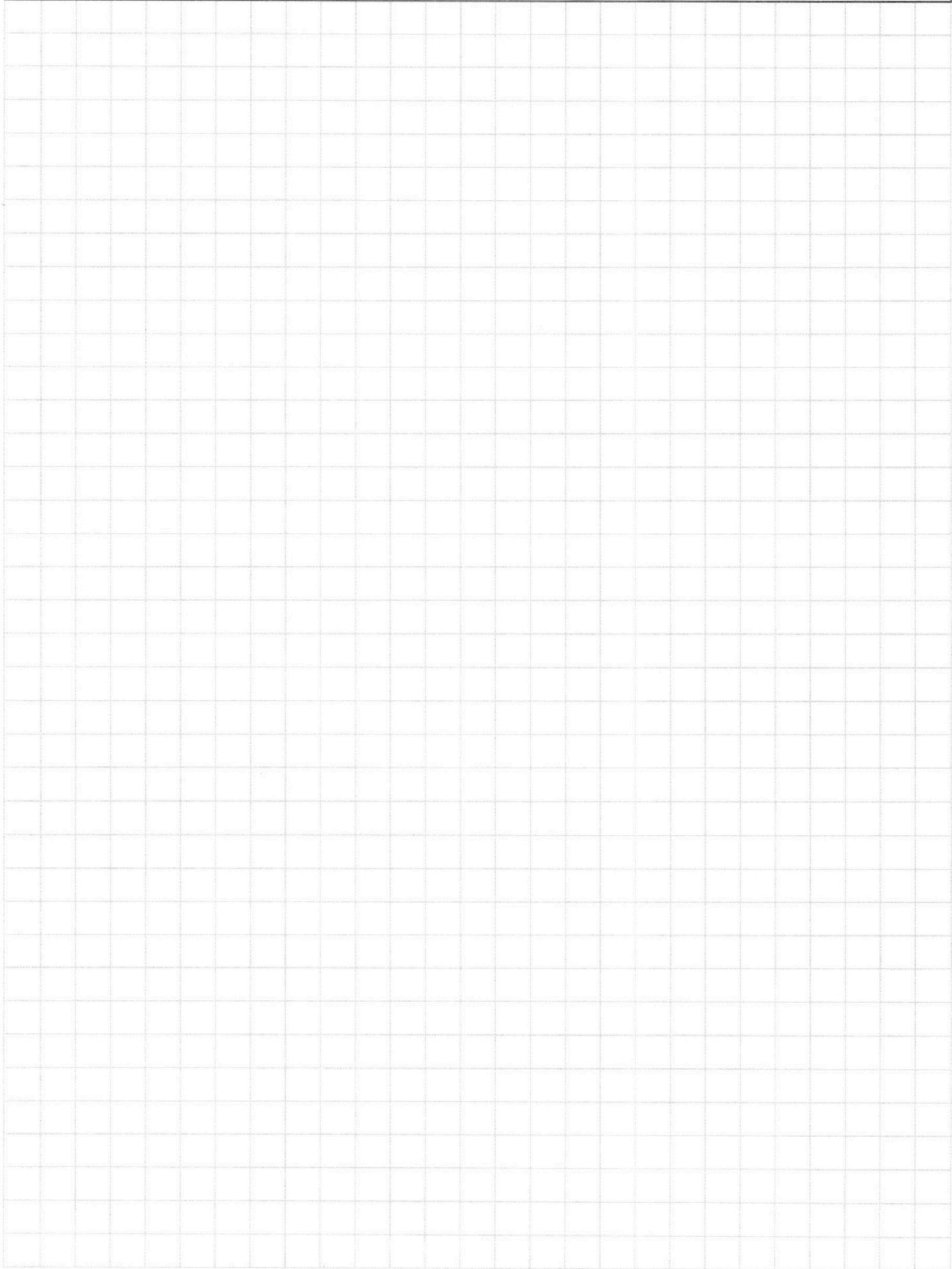
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





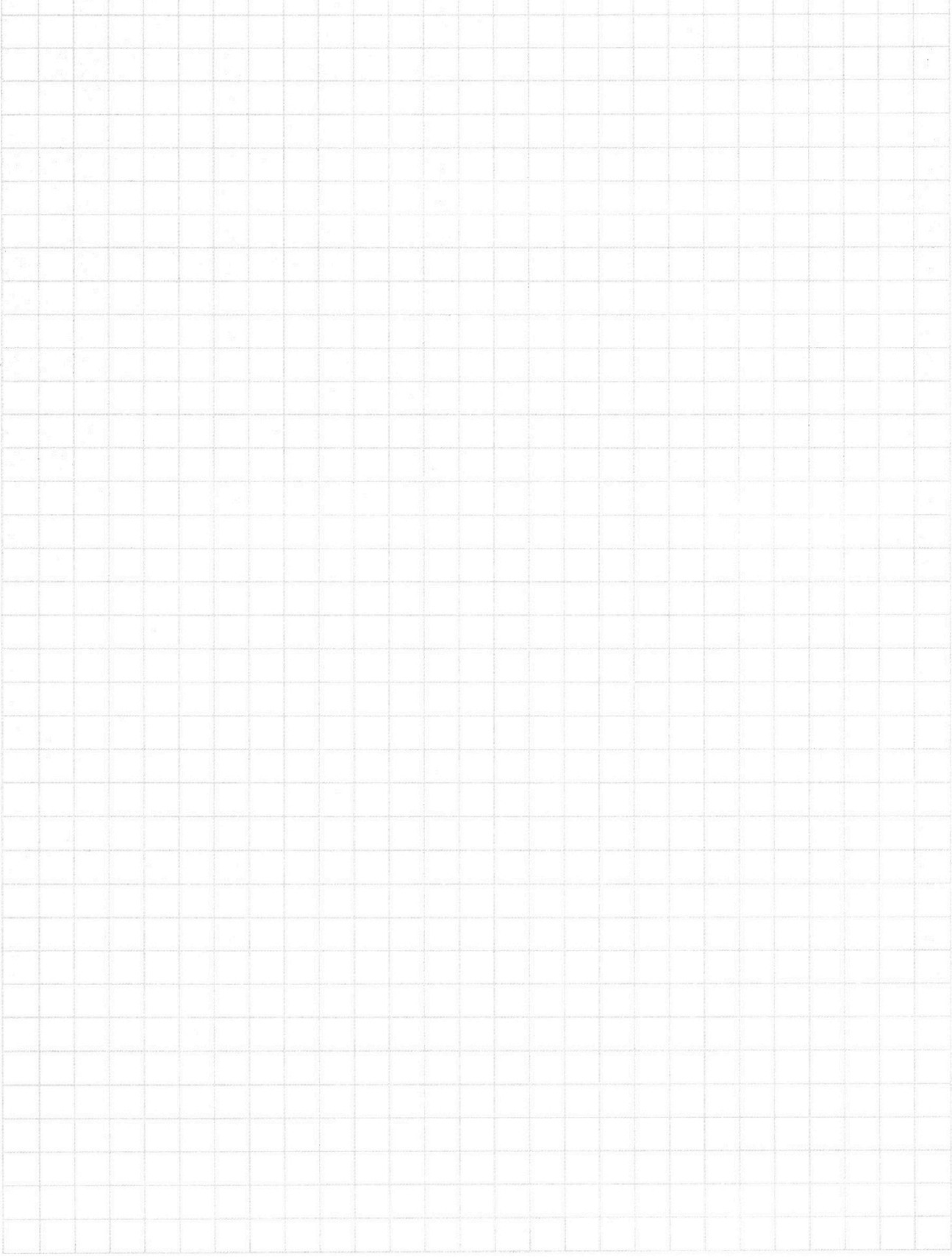
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(1) $D = 1$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x^* = \frac{5}{4}$$

$$y^* = 2 - \frac{25}{16} - \frac{25}{64} + 3 =$$

$$= \frac{25}{8} - \frac{25}{16} + 3 = 3 - \frac{25}{8} =$$

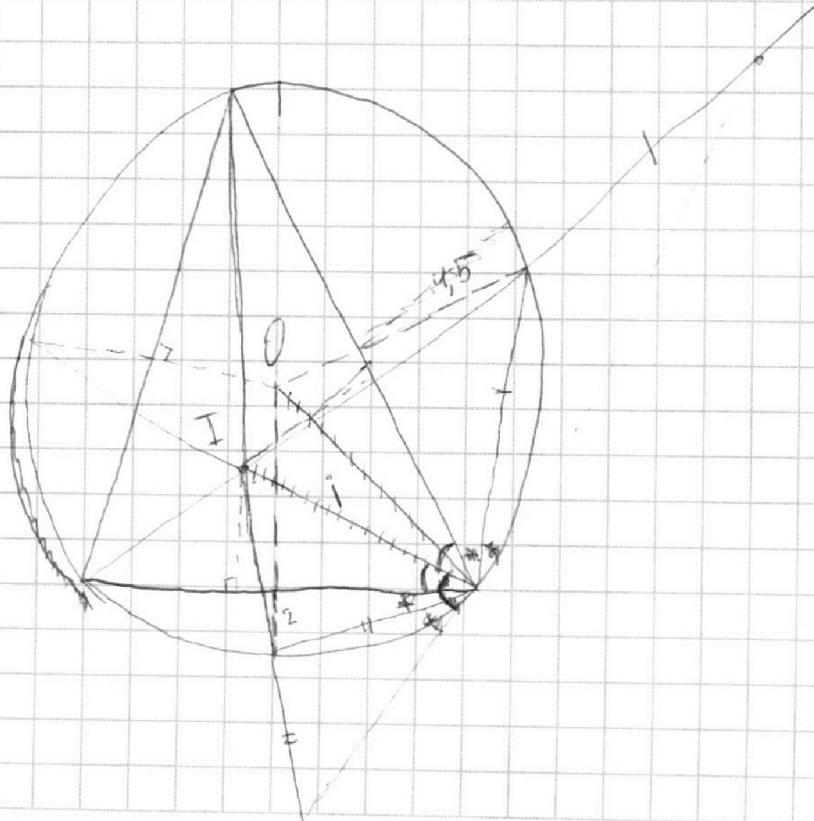
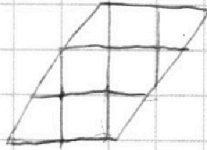
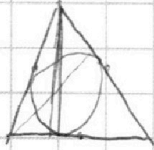
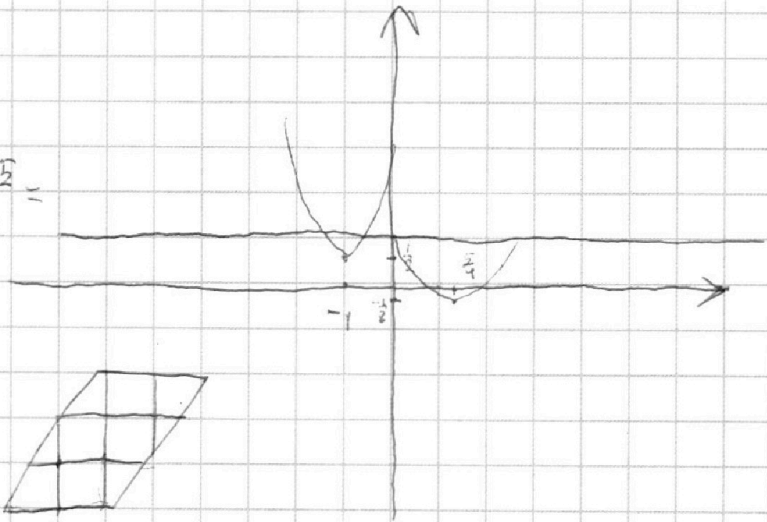
$$= -\frac{1}{2}$$

(2) $D = 4 - 8 = -4$

$$x^* = \frac{1}{2}$$

$$y^* = \frac{1}{2}$$

$$y^* = \frac{1}{2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = X \cdot 2^{51} \cdot 7^{64} \Rightarrow abc = X' \cdot 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 4ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$X_i^* = \frac{5}{2}$$

$$\frac{(a+b)^2 - 8ab}{a+b} = a+b - \frac{8ab}{a+b}$$

$a+b$

$$4x^2 - 3x + 4 =$$

$$a + 2\sqrt{ab} + b = 1$$

$8ab$

или $(a, b) = 1$ если $a : x$, то $b : x$
 $\Rightarrow a+b : x \Rightarrow (a+b, ab) = 1$

~~8~~

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

~~$$\sqrt{a} (\sqrt{a} - \sqrt{b}) (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 0$$~~

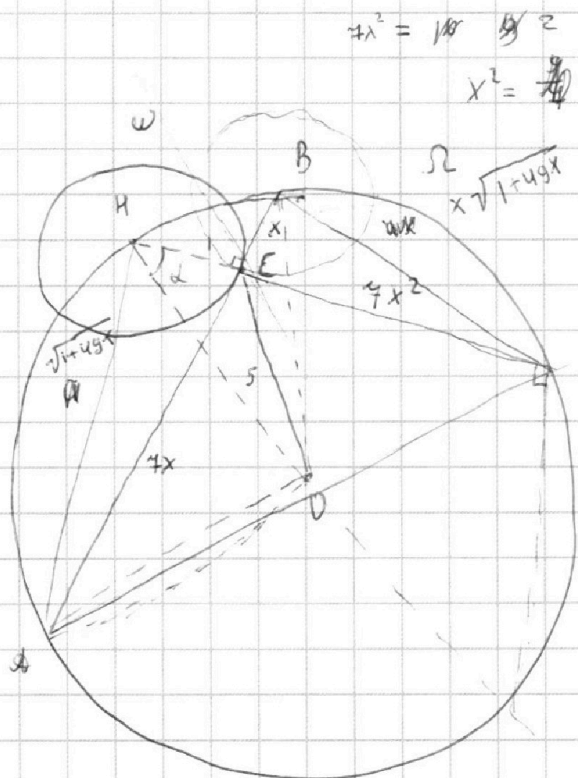
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



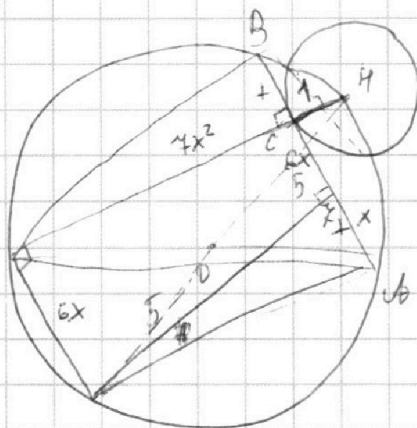
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \alpha = \frac{4x^2 + 1}{10}$$

$$OC^2 = 1 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{4x^2 + 1}{10}$$

$$OC^2 = 26 - 4x^2 - 1 = 25 - 4x^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~x/y~~ 44

$$\alpha + \beta = 15$$

$$\beta + \gamma = 14$$

$$\alpha + \delta = 20$$

$$\gamma - \alpha = 2$$

$$\gamma + \alpha = 20$$

$$2\gamma = 22, \quad \gamma = 11$$

$$\alpha + \beta = 10$$

$$\beta + \gamma = 14$$

$$\gamma + \alpha = 34$$

$$\alpha + \gamma \geq 34 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma \geq 34$$

$$\alpha - \beta = 20$$

$$\alpha + \beta = 10$$

$$2\alpha = 30 \Rightarrow \alpha = 15$$