МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть $a=2^{\alpha_2}3^{\alpha_3}5^{\alpha_5}\theta_a$, $b=2^{\beta_2}3^{\beta_3}5^{\beta_5}\theta_b$, $c=2^{\gamma_2}3^{\gamma_3}5^{\gamma_5}\theta_c$, где $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_5$ — целые неотрицательные, θ_a, θ_b и θ_c — натуральные, взаимно простые с 2, с 3 и с 5. Тогда из условия, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, следует, что $\alpha_2+\beta_2 \geq 6$; аналогично, $\beta_2+\gamma_2 \geq 14$ и $\alpha_2+\gamma_2 \geq 16$. Тогда $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 = \frac{(\alpha_2+\beta_2)+(\beta_2+\gamma_2)+(\alpha_2+\gamma_2)}{2} \geq \frac{6+14+16}{2} = 18$.

Аналогично, $\alpha_3+\beta_3 \geq 13$, $\beta_3+\gamma_3 \geq 21$, $\alpha_3+\gamma_3 \geq 25$, поэтому $\alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geq \frac{13+21+25}{2} = 29\frac{1}{2}$, но α_3, β_3 и γ_3 целые, поэтому $\alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geq 30$.

Также, из того, что ac делится на 5^{28}, следует, что $\alpha_5+\gamma_5 \geq 28$; но $\beta_5 \geq 0$, поэтому $\alpha_5+\beta_5+\gamma_5 \geq 28$.

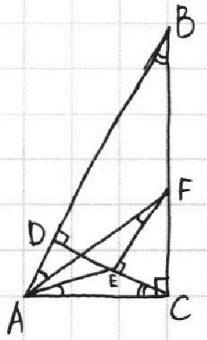
Тогда $abc = 2^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} 3^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3} 5^{\alpha_5+\beta_5+\gamma_5} \theta_a\theta_b\theta_c \geq 2^{18}3^{30}5^{28}$, но значение $2^{18}3^{30}5^{28}$ достигается при $a=2^4 3^9 5^{12}$, $b=2^2 3^5$, $c=2^{12}3^{16}5^{16}$, значит, оно минимальное.

Ответ: $2^{18}3^{30}5^{28}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано, что $AB:BD=1,4$; но тогда $AD:BD=0,4=\frac{2}{5}$.

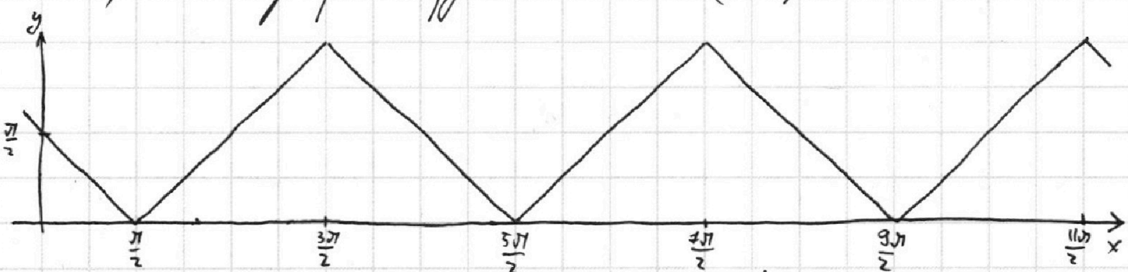
Поскольку $\triangle ABC$ прямоугольный, CD — его высота, опущенная на гипотенузу, $AC=\sqrt{AB\cdot AD}$ и $BC=\sqrt{AB\cdot BD}$, поэтому $\frac{AC}{BC}=\sqrt{\frac{AD}{BD}}=\sqrt{\frac{2}{5}}$. Пусть $AC=t\sqrt{2}$, тогда $BC=t\sqrt{5}$, $AB=t\sqrt{7}$.

Заметим, что $\angle EAC$ — это угол между касательной AC и хордой AE окружности, поэтому он равен вписанному углу $\angle AFE$, который является накрест лежащим с $\angle FAB$ при параллельных прямых AB и FE, значит, $\angle FAB=\angle AFE=\angle EAC$. К тому же, $\angle ABC=90^\circ-\angle BAC=90^\circ-(90^\circ-\angle ACD)=\angle ACD$, поэтому $\triangle AEC\sim\triangle AFB$ по двум углам. Значит, $\frac{AC}{EC}=\frac{AB}{BF}$. Поэтому $\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{EC}=\frac{BC-CF}{EC}=\frac{BC}{EC}-\frac{CF}{EC}=\frac{BC}{EC}-\frac{CB}{CD}=$ $=\frac{BC}{EC}-\frac{AB}{AC}$. Значит, $\frac{BC}{EC}=2\cdot\frac{AB}{AC}$, поэтому $EC=\frac{AC\cdot BC}{2AB}=\frac{t\sqrt{2}\cdot t\sqrt{5}}{2\cdot t\sqrt{7}}=t\sqrt{\frac{5}{14}}$.

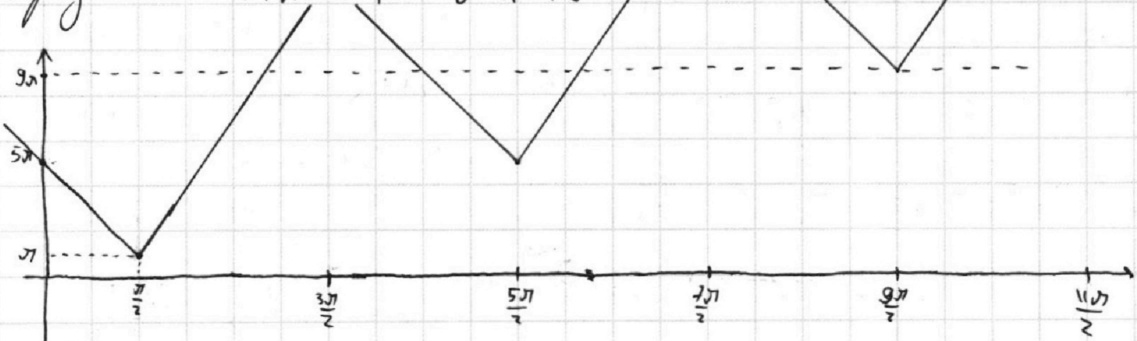
Тогда $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}}=\left(\frac{AD}{EC}\right)^2=\left(\frac{AC^2}{BC\cdot EC}\right)^2=\left(\frac{2t^2}{t\sqrt{5}\cdot t\sqrt{\frac{5}{14}}}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{14}}{5}\right)^2=\frac{56}{25}$.

Ответ: $\frac{56}{25}$.

Заметим, что график функции $\arccos(\sin x)$ — бесконечная ломаная:



Здесь чередуются отрезки с наклонами -1 и 1. Тогда у функции $10\arccos(\sin x)+2x$ график — тоже бесконечная ломаная, но чередуются отрезки с наклоном -8 и 12:



В локальном максимуме $x=-\frac{\pi}{2}$ функция $10\arccos(\sin x)+2x$ равна 9π. Значит, эта функция принимает значение 9π в 5 точках — это точка $-\frac{\pi}{2}$, пересечение прямой $y=12(x-\frac{\pi}{2})+\pi$ с прямой $y=9\pi$, пересечение прямой $y=-8(x-\frac{5\pi}{2})+5\pi$, и прямой $y=9\pi$, пересечение прямой $y=12(x-\frac{5\pi}{2})+5\pi$ и прямой $y=9\pi$, а также точка $\frac{9\pi}{2}$. Первое из пересечений задаётся $12x-5\pi=9\pi \Leftrightarrow x=\frac{7}{6}\pi$, второе — $-8x+25\pi=9\pi \Leftrightarrow x=2\pi$, третье — $12x-25\pi=9\pi \Leftrightarrow x=\frac{17}{6}\pi$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, 2\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{9\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

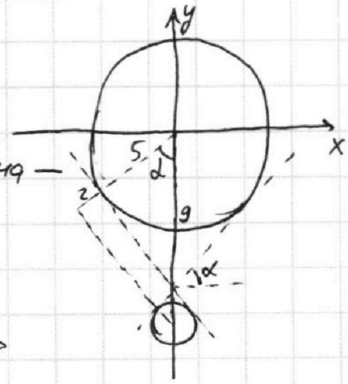
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Заметим, что $x^2+y^2+18y+77=0 \Leftrightarrow x^2+(y+9)^2-4=0$. Поэтому график уравнения $(x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0$ — это объединение двух непересекающихся окружностей — одна с центром в $(0,0)$ и радиусом 5, другая с центром в $(0,-9)$ и радиусом 2. Для зафиксированного a уравнение $5x+6ay-b=0$ задаёт семейство всех прямых с наклоном $-\frac{5}{6a}$, если $a\neq 0$, и семейство вертикальных прямых, если $a=0$. Необходимо найти такие a, при которых какая-то прямая из семейства пересекает каждую из окружностей в 2 точках.

$a=0$ подходит при $b=0$; если $a\neq 0$, то наклон $-\frac{5}{6a}$ должен быть больше ~~наклона~~ по модулю, чем модуль наклона общей касательной к окружностям, пересекающей линию центров:



Как видно из рисунка, если этот модуль наклона — $\operatorname{tg}\alpha$, то $\cos\alpha = \frac{2+5}{9} = \frac{7}{9}$. Тогда

$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\left(\frac{9}{7}\right)^2-1} = \sqrt{\frac{81}{49}-1} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$. Значит, $\left|\frac{5}{6a}\right| > \frac{4\sqrt{2}}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \frac{6|a|}{5} < \frac{7}{4\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ |a| < \frac{35}{24\sqrt{2}} \end{cases}$.

Ответ: $-\frac{35}{24\sqrt{2}} < a < \frac{35}{24\sqrt{2}}$.

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5 \Leftrightarrow \log_{11}^4 x - 6\log_{11}^{-1} x = -\frac{2}{3}\log_{11}^{-1} x - 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{11}^5 x + 5\log_{11} x - \frac{16}{3} = 0$. Обозначим $\log_{11} x = t$, тогда $t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$.

Более того, $t^5 + 5t$ возрастает, бывает сколь угодно малым и сколь угодно большим, поэтому у уравнения $t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$ ровно одно решение.

$\log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}(11^{-13}) - 5 \Leftrightarrow \log_{11}^4\left(\frac{y}{2}\right) + \log_{11}^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) = -\frac{13}{3}\log_{11}^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) - 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{11}^5\left(\frac{y}{2}\right) + 5\log_{11}\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{16}{3} = 0$. Обозначим $\log_{11}\frac{y}{2} = s$, тогда $s^5 + 5s + \frac{16}{3} = 0$.

$s^5 + 5s$ возрастает, бывает сколь угодно малым и сколь угодно большим, поэтому у $s^5 + 5s + \frac{16}{3} = 0$ тоже только одно решение. Но если $s^5 + 5s + \frac{16}{3} = 0$, то $-s^5 - 5s - \frac{16}{3} = 0$, поэтому $(-s)^5 + 5(-s) - \frac{16}{3} = 0$. Поэтому корни $t^5 + 5t - \frac{16}{3}$ и $s^5 + 5s + \frac{16}{3}$ противоположные, а значит, $\log_{11} x + \log_{11}\frac{y}{2} = 0$. Отсюда $\log_{11}\frac{xy}{2} = 0$, $\frac{xy}{2} = 1$ и $xy = 2$.

Ответ: 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть $A'(6x_1, y_1)$ и $B'(6x_2, y_2)$. Тогда $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{(1,1)}$.

Значит, $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{(1,1)} = 48$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~ab·bc·ac : НОК = 2^{16}~~ №1: $a = 2^{\alpha_2}3^{\alpha_3}5^{\alpha_5}\theta_1$, $b = 2^{\beta_2}3^{\beta_3}5^{\beta_5}\theta_1$

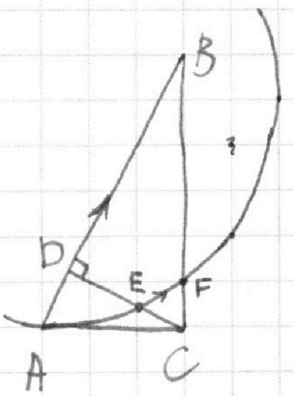
$c = 2^{\gamma_2}3^{\gamma_3}5^{\gamma_5}\theta_3$ $\alpha_2+\beta_2 \geq 6$, $\alpha_2+\gamma_2 \geq 16$, $\beta_2+\gamma_2 \geq 14$. $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geq \frac{6+16+14}{2} = 18$.

$\begin{cases} \alpha_2+\beta_2=6 \\ \alpha_2+\gamma_2=16 \end{cases} \Rightarrow \gamma_2-\beta_2=10$, но $\gamma_2+\beta_2=14 \Rightarrow \gamma_2=12$, $\beta_2=2$, $\alpha_2=4$

Далее аналогично.

$133 = 140-7 = 7\cdot 19$

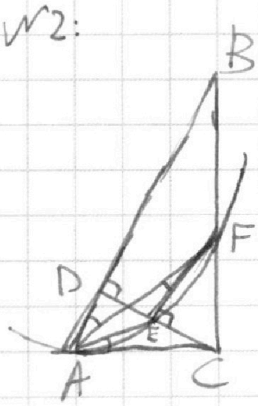
№2:



$\frac{AB}{BD} = 1{,}4$

$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}}$ — ?

$\frac{81}{-77}{4}$



$\angle EAC = \angle AFE = \angle FAB$

$\frac{AD}{BD} = \frac{2}{5}$

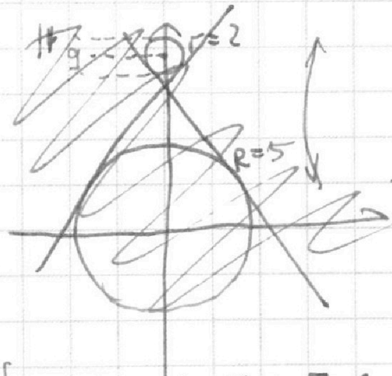
$AC = \sqrt{AB\cdot AD}$, $BC = \dots$

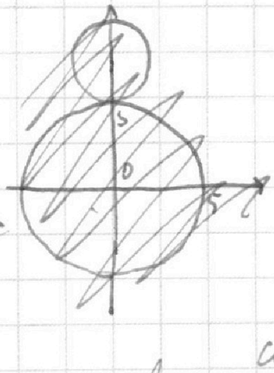
$\frac{AC}{BC} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

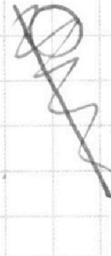
~~№3: $10\sqrt{1-x^2} = \dots$~~ №4

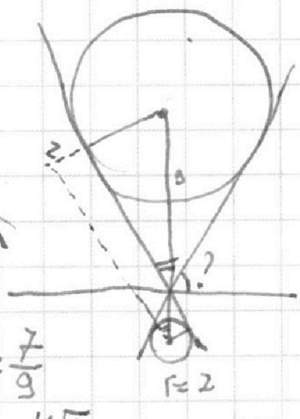
$x^2+y^2+18y+77 = x^2+(y+9)^2-4$

$R=5$









$\sin\angle = \frac{7}{9}$

$\cos\angle =$

$\operatorname{tg}\angle = \sqrt{\frac{81}{49}-1} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$

$|6a| > \frac{4\sqrt{2}}{7}$

$\boxed{|a| > \frac{2\sqrt{2}}{21}}$

баллы: $4+5+4+5+5+5+6 = 34$

$4+4+5+5$ уже больше половины!

$+5 = 23/34$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

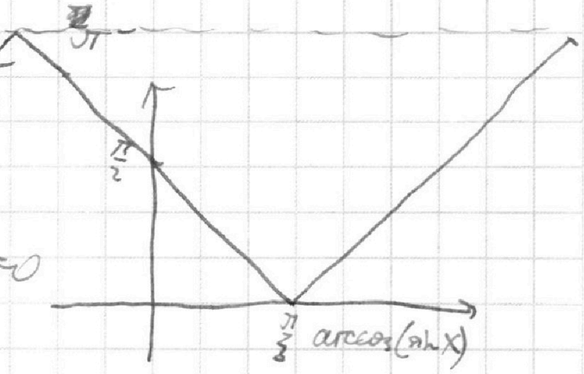
№5

$\log_{11}^4 x - 6\log_{11}^{-1} x = -\frac{2}{3}\log_{11}^{-1} x - 5$

$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$

$3t^5 + 15t - 16 = 0$

$\underbrace{3t^5 + 15t - 16}_{\text{возрастает}} = 0$, корень между 0 и 1



$\log_{11}^4 \frac{y}{2} + \log_{11}^{-1}\frac{y}{2} = -\frac{13}{3}\log_{11}^{-1}\frac{y}{2} - 5$

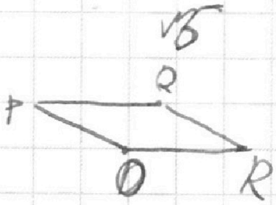
$s^5 + 5s + \frac{16}{3} = 0$

Сумма корня $3t^5 + 15t - 16 = 0$ и корня $3s^5 + 15s + 16 = 0$ — ?

Очевидно, сумма — 0.

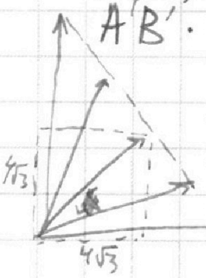
$\log_{11}\frac{y}{2} + \log_{11} x = 0$ $\quad \log_{11}\frac{xy}{2} = 0$ $\quad \frac{xy}{2} = 1$ $\quad \boxed{xy = 2}$

№6

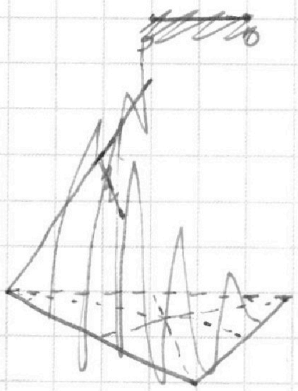


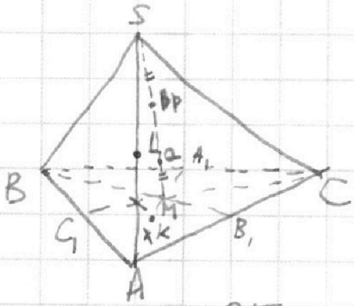
$A'(6x_1, y_1)$, $B'(6x_2, y_2)$

$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{(1,1)} = 48 = (4\sqrt{3})^2$



Ещё раз переименуем координаты (теперь не диагональные), и всё ок?





$\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 = 14 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 21 \end{cases} \Rightarrow \gamma_3 - \alpha_3 = 7,\ \gamma_3 + \alpha_3 = 25 \Rightarrow \gamma_3 = 16,\ \alpha_3 = 9,\ \beta_3 = 5$

$\begin{cases} \alpha_5 + \beta_5 = 11 \\ \beta_5 + \gamma_5 = 13 \end{cases} \Rightarrow \gamma_5 - \alpha_5 = 2,\ \gamma_5 + \alpha_5 = 28 \Rightarrow \gamma_5 = 15,\ \alpha_5 = 13,\ \beta_5 = -2$?!

$28 \geq \alpha_5 + \gamma_5 \geq 24 - 2\beta_5$ $\quad \boxed{\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 \geq 28}$ А это достигается!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

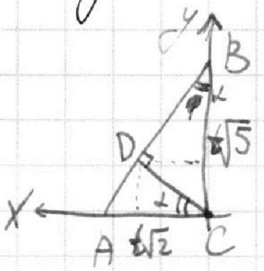
1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Пусть $a=2^{\alpha_2}3^{\alpha_3}5^{\alpha_5}\theta_a$, $b=2^{\beta_2}3^{\beta_3}5^{\gamma_5}$~~

Пусть $a=2^{\alpha_2}3^{\alpha_3}5^{\alpha_5}\theta_a$, $b=2^{\beta_2}3^{\beta_3}5^{\gamma_5}$

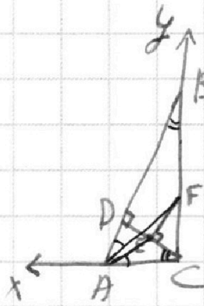


$D\left(t\sqrt2\cos^2\alpha,\ t\sqrt5(1-\cos^2\alpha)\right)$

$\cos\alpha=\sqrt{\frac{5}{7}} \Rightarrow D\left(\frac{5}{7}\sqrt2 t,\ \frac{2}{7}\sqrt5 t\right)$

$E=\gamma D=\left(\frac{5}{7}\sqrt2 t\gamma,\ \frac{2}{7}\sqrt5 t\gamma\right)$

$F=\gamma B=(0,\ \sqrt5 t\gamma)$



$\triangle AFC \sim \triangle AFB$

$\frac{AC}{FC}=\frac{AB}{BF}$

$\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{EC}=\frac{BC-CF}{EC}=$

$=\frac{BC}{EC}-\frac{CF}{EC}=\frac{BC}{EC}-\frac{CB}{CD}=$

$=\frac{BC}{EC}-\frac{AB}{AC}$

$\frac{BC}{EC}=2\frac{AB}{AC}\qquad EC=\frac{AC\cdot BC}{2AB}$

$$\cos\angle EAC=\frac{\vec{EA}\cdot\vec{CA}}{EA\cdot CA}=\frac{\left(1-\frac{5}{7}\gamma\right)\cdot 2t^2}{\sqrt{\left(\frac{2}{7}\sqrt5 t\gamma\right)^2+\left(1-\frac{5}{7}\gamma\right)^2\cdot 2t^2}\cdot\sqrt2 t}=$$

$$~~=\frac{\left(1-\frac{5}{7}\gamma\right)\cdot 2t^2}{\sqrt{\left(\frac{2}{7}\sqrt5\right)^2+\ldots}}~~$$

$\cancel{EC=t\sqrt2}\quad EC=\frac{t\sqrt2\cdot t\sqrt5}{2\cdot t\sqrt7}=t\sqrt{\frac{5}{14}}$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}}=\left(\frac{AD}{EC}\right)^2=\cancel{\frac{AC^2}{BC\cdot EC^2}}\left(\frac{AC^2}{BC\cdot EC}\right)^2=\left(\frac{2t^2}{t\sqrt5\cdot t\sqrt{\frac{5}{14}}}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{14}}{5}\right)^2=\boxed{\frac{56}{25}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть $a=2^{\alpha_2}3^{\alpha_3}5^{\alpha_5}\Theta_a$, $b=2^{\beta_2}\cdot 3^{\beta_3}\cdot 5^{\beta_5}\cdot\Theta_b$, $c=2^{\gamma_2}\cdot 3^{\gamma_2}\cdot 5^{\gamma_5}\cdot\Theta_c$, где $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_5$ — целые неотрицательные, Θ_a, Θ_b и Θ_c — натуральные, взаимно простые с 2, с 3 и с 5. Тогда из условия, что ab делится на $2^6\cdot 3^{13}\cdot 5^{11}$, следует, что $\alpha_2+\beta_2 \geqslant 6$; аналогично, $\beta_2+\gamma_2 \geqslant 14$ и $\alpha_2+\gamma_2 \geqslant 16$. Тогда $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 = \frac{(\alpha_2+\beta_2)}{2} + \frac{(\alpha_2+\gamma_2)}{2} + \frac{(\beta_2+\gamma_2)}{2} \geqslant \frac{6}{2}+\frac{14}{2}+\frac{16}{2} = 18$.

Аналогично, $\alpha_3+\beta_3 \geqslant 13$, $\beta_3+\gamma_3 \geqslant 21$, $\alpha_3+\gamma_3 \geqslant 25$, поэтому $\alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geqslant \frac{13+21+25}{2} = 29\frac{1}{2}$, но поскольку α_3, β_3 и γ_3 целые, то $\alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geqslant 30$. И, аналогично, $\alpha_5+\beta_5 \geqslant 11$, $\beta_5+\gamma_5 \geqslant 13$, $\alpha_5+\gamma_5 \geqslant 28$, значит, $\alpha_5+\beta_5+\gamma_5 \geqslant \frac{11+13+28}{2} = 26$.

Тогда $abc = 2^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\cdot 3^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3}\cdot 5^{\alpha_5+\beta_5+\gamma_5}\cdot\Theta_a\Theta_b\Theta_c \geqslant 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{26}\cdot 1$.

Теперь покажем, что abc может быть равно $2^{18}3^{30}5^{26}$.