



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

берем по три из выражения, полу-

$$bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

чим, что  $(abc)^2 = (2^{8+12+14} \cdot 3^{14+20+21} \cdot 5^{12+17+39})^2$

$$ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$- 5^{12+17+39}$

$$2^{8+12+14} \cdot 3^{14+20+21} \cdot 5^{12+17+39} = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$$

$$\text{значит } (abc)^2 = (2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68})$$

Пусть  $3^k$  - макс. степень, делящая  $abc$ , тогда если

$$k \leq 27, k < 28, \text{ то } 3^k \mid 3^{55} \text{ и } k \leq 27, \text{ то } (3^k)^2 \leq 3^{54},$$

но есть  $abc^2$  не делится на  $3^{55}$ , значит  $k \geq 28$ . Остаточ-

показатели степеней (т.е. двойки и пятерки) четны, поэтому

их можно разделить на 2 (взять кв. корни из обеих

частей выражения) получаем  $abc: 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$ , значит

$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$ . Близкое равенство возможно но мы знаем,

что  $ac: 5^{39}$ , значит  $abc: 5^{39}$ , и тогда  $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$ .

Равенство возможно, например, если

$$a = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{19}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^7$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{20}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

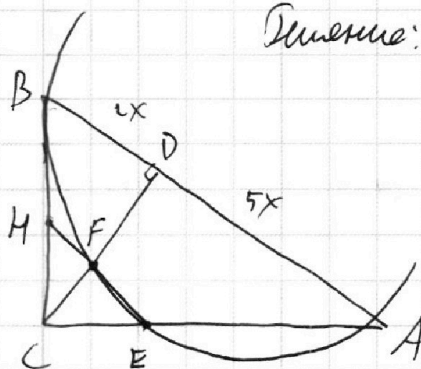


Дано:

$\triangle ABC$  - треугольник  
 $CD$  - высота  
 $AB$  - хорда окружности

Окружность касается  $BC$  в м.  $B$ ,  
 пересекает  $CD$  в м.  $F$ ,  
 а касается  $AC$  в м.  $E$

Решение:



1. Пусть  $EF \cap BC = H$ .

$AB \parallel EF$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$$

Обозначим  $EH \parallel AB$ , то  $CF$  - высота  $\triangle HEC$ , - прямая,  
 значит  $\triangle CHF \sim \triangle HCE$ ;  $\frac{CH}{HF} = \frac{HE}{HC} \Rightarrow CH^2 = HE \cdot HF$

Квадраты:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$$

2.  $BH$  - касательная к окружности  $\Rightarrow BH^2 = BF \cdot HE$  (как отрезки секущих)

3.  $BH^2 = HE \cdot HF \Rightarrow BH = CH$ ;  $HE$  - медиана  $\triangle ABC \Rightarrow$

$$CH^2 = HE \cdot HF \Rightarrow LE = AE = \frac{1}{2} AC$$

4. Из параллельности  $HE$  и  $AB$   $\triangle ABC \sim \triangle CFE \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k^2 =$

$$= \left( \frac{AB}{CE} \right)^2$$

5. Пусть  $BD = 2x$ , тогда  $AD = 5x$ ;  $CD = \sqrt{BD \cdot AD} = x\sqrt{10}$  (по в-ву Фалеса)

Из  $\triangle CDA$  по теореме Пифагора:  $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = x\sqrt{35} \Rightarrow$

$$\Rightarrow CE = \frac{AC}{2} = x \frac{\sqrt{35}}{2}$$

$$6. \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \left( \frac{AB}{CE} \right)^2 = \left( \frac{7x}{x \frac{\sqrt{35}}{2}} \right)^2 = \frac{49x^2}{\frac{35x^2}{4}} = \frac{4 \cdot 49}{35} = \frac{4 \cdot 7}{5} = \frac{28}{5}$$

Ответ:  $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{28}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x$$

$$\text{Пусть } \frac{\pi}{2} - x = t.$$

$$10 \arcsin(\sin t) = \pi - 2t$$

Убедимся, что если  $t \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$ ;  $n \in \mathbb{Z}$ , то

$$\arcsin(\sin t) = t - 2\pi n, \text{ а если } t \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k], \text{ то}$$

$$\arcsin(\sin t) = -t + \pi + 2\pi k. \text{ Заменяем } t \text{ на } t = a -$$

переменную, но  $t = a$  - тоже переменная, м.к.  $f(t) = 10 \arcsin(\sin t)$  и  $g(t) =$

$= \pi - 2t$  - переменные  $g$ -им. Поэтому рассмотрим только  $t \geq 0$ .

$$\text{Если } t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \text{ то } 10t = \pi - 2t$$
$$t = 0$$

$$\text{Если } t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}], \text{ то } -10t + 10\pi = \pi - 2t$$
$$12t = 9\pi$$
$$t = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Если } t \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}], \text{ то } 10t - 20\pi = \pi - 2t$$
$$12t = 21\pi$$
$$t = \frac{7\pi}{4}$$

$t = \frac{7\pi}{4}$  - не подходит, м.к. не лежит на  $[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$

$$\text{Если } t > \frac{5\pi}{2}, \text{ то } 2t > 5\pi; \text{ а м.к. } \arcsin(\sin t) \leq \frac{\pi}{2}, \text{ то}$$

$$10 \arcsin(\sin t) \leq 5\pi, \text{ значит если } t > \frac{5\pi}{2} \text{ заменим } t \text{ на } t =$$

Введем переменную  $t = -\frac{5\pi}{6}$  - тоже решение. Значит  $t = 0$ ;

$$t = -\frac{5\pi}{6}; t = \frac{5\pi}{6}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Общ. замена:  $f = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$$t = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3}$$

$$t = -\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = -\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{3}; x = \frac{4\pi}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Подходят все  $a$ , кроме  $0 \leq a \leq \frac{3\sqrt{57}}{7}$  и  $-\frac{3\sqrt{57}}{7} \leq a \leq 0$ , т.е.  
 ~~$\frac{3\sqrt{57}}{7}$~~   $-\frac{3\sqrt{57}}{7} \leq a \leq \frac{3\sqrt{57}}{7}$ . При остальных  $a$  требуется  $b$   
существовать, значит  $a > \frac{3\sqrt{57}}{7}$  или  $a < -\frac{3\sqrt{57}}{7}$   
Ответ:  $(-\infty; -\frac{3\sqrt{57}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{57}}{7}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow ay = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

График (2) - 2 окружности. Одна с центром  $(0; 0)$  и радиусом 1, а другая с центром  $(0; 10)$  и радиусом 6.

График (1) - прямая с угл. коэффициентом  $\frac{a}{3}$  и свободным членом  $\frac{4}{3}b$ . Предусмотрим наименьшие условия координат этой прямой, чтоб можно было найти такое  $b$ , чтоб эта прямая пересекает обе окружности, каждую в 2 точках. Коэффициент  $\frac{4}{3}b$  отвечает только за направление прямой вверх-вниз. По графику видно, что достаточно крутую "прямую" можно поднимать так, что необходимые условия будут выполняться. Найдём граничные значения угл. коэфф, при котором при поднятии прямой в момент, когда прямая касается внутренней образной окружности, она касается и другой.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

т. пересечения касат. оевидно  
лежит на  $OY$ . Пусть  $A$  - центр большой  
окр.,  $B$  и  $C$  - т. касания большой и  
маленькой окр. соотв. Пусть  $m, n$   
мажора, то  $n$  делит на луче  $AB$   
 $AB$  за точкой  $B$  и  $BD = OC$ .

Пуска  $OC = BD$ ;  $OC \parallel BD \Rightarrow BDOC$  - паралл.  
 $BC \parallel OD$ ;  $\triangle ADO$  - прямоуг.

$$AD = AB + BD = 7 \Rightarrow$$

$$AO = 10 \Rightarrow$$

$\Rightarrow DO = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51}$  угло-  
вой коэфф. прямой  $BC$  равен  
тангенсу  $\angle OAB = \alpha$  и к. если т. пере-  
сечения касат. обозначим за  $P$ ,  
и проведем  $PQ \parallel OX$ , то

$$\angle BPO + \angle APB = 90^\circ, \text{ по т. к.}$$

$$\angle PAB = \angle OAB = \alpha \text{ и } \angle PAB +$$

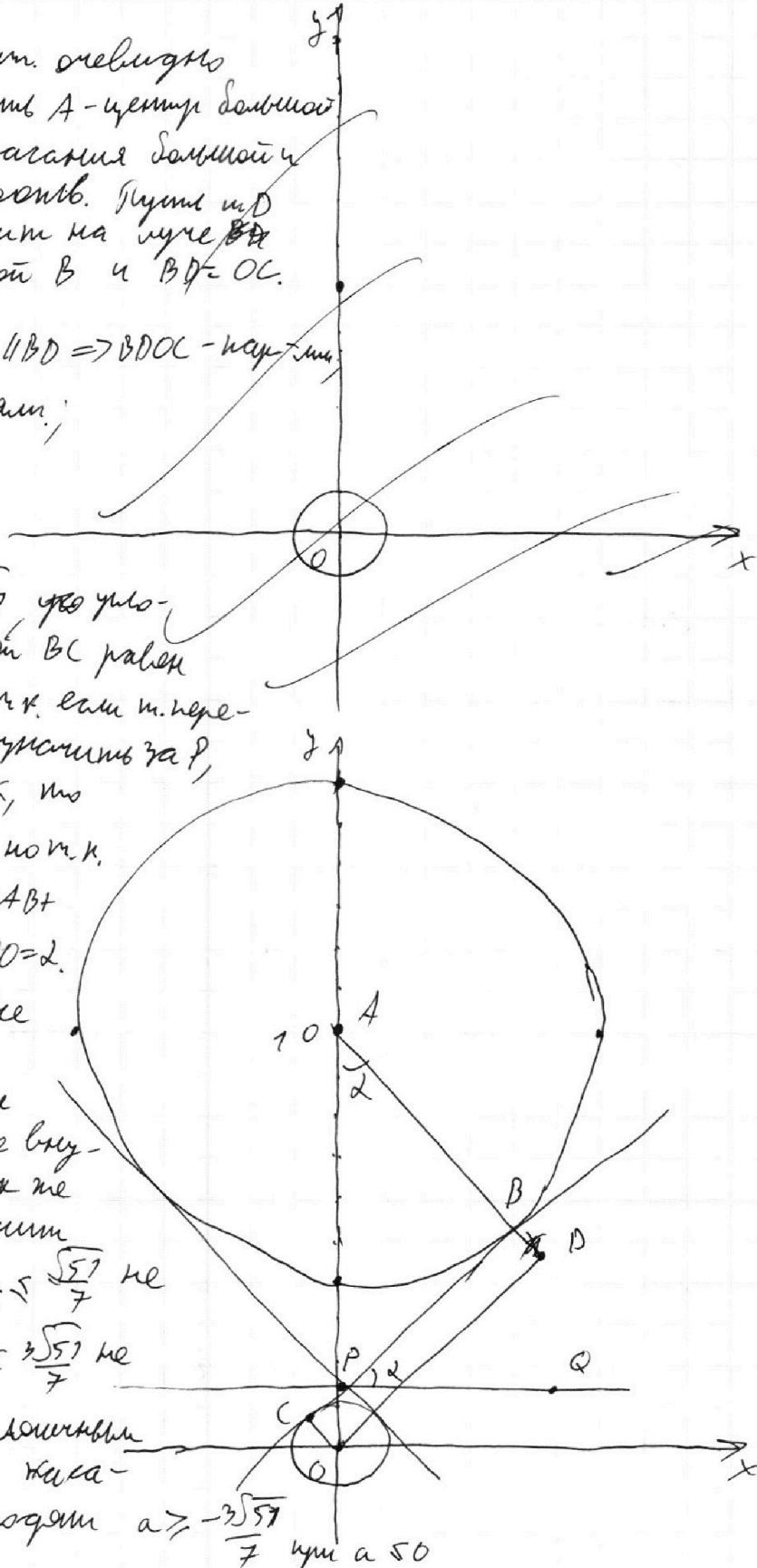
$$\angle APB = 90^\circ, \text{ то } \angle BPO = \alpha.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OD}{AO} = \frac{\sqrt{51}}{7}; \text{ все}$$

прямые, проходящие  
через  $P$  и лежащие внут-  
ри угла  $BPO$  так же  
не подходят, значит  
если  $\frac{a}{3} \geq 0$ , то  $\frac{a}{3} \leq \frac{\sqrt{51}}{7}$  не

подходят, и е  $\frac{a}{3} \leq \frac{\sqrt{51}}{7}$  не

подходят. По аналогичным  
сооб. для прямой кас-  
ательной не подходят  $a \geq -\frac{\sqrt{51}}{7}$  или  $a \leq 0$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x \neq 1 \\ 2x > 0 \\ 2x^2 > 0 \\ 2x^2 \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{13}{3} \log_{2x} 5 = -3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{13}{3 \log_5(2x)} = -3$$

т.к.  $3 \log_5(2x) \neq 0$ , умнож. на  $2x = 1$ , сократим на  $\log_5(2x)$ :

$$\log_5^5(2x) + 3 \log_5(2x) = \frac{13}{3}$$

$$2) \log_5^4 y + 4 \log_{4y} 5 = \log_{4y} 0,2 - 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y \neq 1 \\ y > 0 \\ 4y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_{4y} 5 = -\frac{1}{3} \log_{4y} 5 - 3$$

$$\log_5^4 y + \frac{13}{3} \log_{4y} 5 = -3$$

$$\text{т.к. } \log_{4y} \log_5^4 y + \frac{13}{3 \log_5 4y} = -3$$

т.к.  $3 \log_5 y \neq 0$ , умнож. на  $y = 1$ , сократим на  $\log_5 y$ :

$$\log_5^5 y + 3 \log_5 y = -\frac{13}{3}$$

Пусть  $f(t) = \log_5^5(t) + 3 \log_5 t$ . заменим, то  $f(\frac{1}{t}) =$

$$= \log_5^5(t^{-1}) + 3 \log_5(t^{-1}) = -\log_5^5(t) - 3 \log_5 t = -f(t)$$

будем  $y = f$ -возр. ф-ия, т.к.  $y = \log_5 t$ -возр. ф-ия. значит

имеем уравнение  $f(2x) = -f(y) \Leftrightarrow f(2x) = f(\frac{1}{y})$ . т.к.

$$f\text{-возр.}, \text{ то } f(2x) = f(\frac{1}{y}) \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{y}; \quad \underline{\underline{\text{Ответ: } xy = \frac{1}{2}}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos \angle KTO = \frac{5}{2\sqrt{29}} \Rightarrow \cos \angle KTN = \cos(2\angle KTO) = 2\cos^2 \angle KTO - 1 =$$

$$= 2 \cdot \frac{25}{4 \cdot 29} - 1 = \frac{50}{116} - 1 = \frac{46}{116} - \frac{116}{116} = \frac{25}{58} - 1 = \frac{-33}{58}$$

т.е.  $\angle KTN = \angle A(BC)S$ , т.к.  $KT \perp BC$  и  $NT \perp BC$  (как смежные углы при глупр. углах).

$$\left. \begin{array}{l} \angle KTN = \angle A(BC)S \\ \angle KTN = \arccos \frac{-33}{58} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A(BC)S = \arccos \frac{-33}{58}$$

Ответ:  $\delta) \angle A(BC)S = \arccos \frac{-33}{58}$

a)  $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 3600$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$SABC$  - пирамида

$AA_1, BB_1, CC_1$  - медианы  $\triangle ABC$

$AA_1, BB_1, CC_1 = m$

сфера  $\Omega$  касается  $AS$  в  $L$

и тл.  $ABC$  в т  $K$ ;  $K \in AA_1$

$\Omega \cap SA = \Omega$  пересекает  $SM$

в т.  $P$  и  $Q$

$SP = MQ$ ;  $\angle ABC = 100^\circ$

$SA = BC = 16$ .

Найти:

а)  $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$

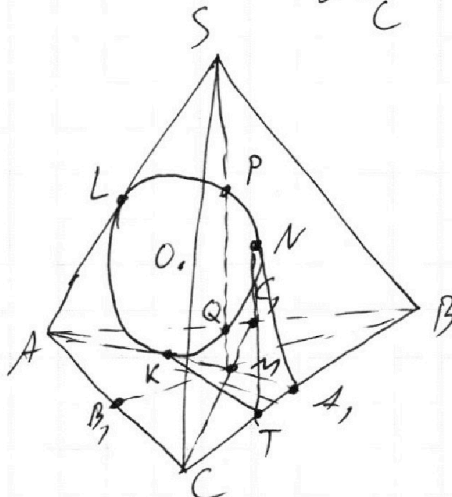
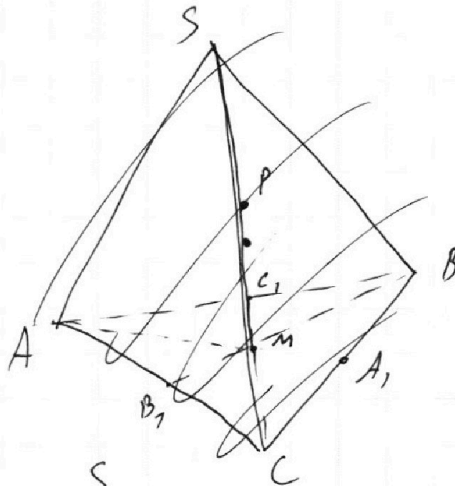
б)  $\angle A(BC)S = ?$

если  $\Omega$  касается

$BCS$  в т.  $N$ ;  $SN = 4$ ;

$R(\Omega) = 5$

Решение:



$$1. SP = MQ \Rightarrow SQ = MP.$$

$$SL^2 = SP \cdot SQ$$

(как отрезки секущих)

$$MK^2 = MK^2 = MQ \cdot MP$$

$$\Rightarrow KM = SL.$$

$$2. AK = AL \text{ (как отрезки касат.)} \Rightarrow AS = AL + LS = AK + KM = AM = 16.$$

$$KM = SL$$

$$3. \text{По св-ву и. пересечения медиан } MA_1 = \frac{1}{2} AM = 8.$$

$$A_1M = (AA_1 = BA_1 = 8) \Rightarrow \triangle BCM - \text{прямоуг. (по теореме Пифагора)}$$

$MA_1$  - медиана  $\triangle BCM$

(по св-ву медиан)

$$4. \triangle BCM - \text{прямоуг.} \Rightarrow BM \cdot MC = BC \cdot h, \text{ где } h - \text{высота из т. } M.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. Пусть  $H$  — длина высоты  $\triangle ABC$  через  $m$ . Тогда по т. Валеса  
 $H = 3h$ , ~~на~~, но в то же время  $H = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{200}{76} = \frac{25}{2}$ , значит

$$h = \frac{H}{3} = \frac{25}{6}$$

$$6. MC \cdot MB = h \cdot BC = \frac{25}{6} \cdot 76 = \frac{200}{3} \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 24 \cdot MC \cdot MB$$
$$AA_1 = \frac{3}{2} AA_1^M = 24$$
$$BB_1 = \frac{3}{2} BB_1^M$$
$$CC_1 = \frac{3}{2} CC_1^M$$
$$= 24 \cdot \frac{3}{2} MC \cdot \frac{3}{2} MB =$$
$$= 216 \cdot 9 \cdot MC \cdot MB = 6 \cdot 9 \cdot \frac{200}{3} =$$
$$= \underline{\underline{3600}}$$

7. Пусть  $O$  — центр  $\Omega$ ,

Тогда поскольку  $\Omega$  касается  $AB$  в  $m$ ,  $BC$  в  $n$ , то  
проекции точек  $M$  и  $N$  на прямую  $BC$  совпадают. Будет  
это будет точка  $T$ , и ~~точка~~  $T$  лежит в одной т. с  $m, n, O$ .

8.  $SN = SL$  (как окружности касаются)  $\rightarrow AL = AK = AS - SL = 12$ .

9.  $KA_1 = \cancel{AK} AA_1 - AK = 12 \Rightarrow K$  — середина  $AA_1$ . Или  $KT \perp BC$ ,  
то  $KT = \frac{1}{2} H$ , где  $H$  — высота  $\triangle ABC$  из  $m$ .  $A$  (по т. Валеса).

$$KT = \frac{1}{2} H = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} = \frac{25}{4} = NT \text{ (как окружности касаются)}$$

10. Из  $\triangle KOT$  —  $KT$  —  $OT = \sqrt{OK^2 + KT^2} = \sqrt{5^2 + \left(\frac{25}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{100}{4} + \frac{625}{4}} =$

$$= \frac{\sqrt{725}}{2} = \frac{5\sqrt{29}}{2}, \text{ ~~или~~ тогда из } \triangle KOT: \cos \angle KTO =$$

$$= \frac{KT}{OT} = \frac{25}{4} \cdot \frac{5\sqrt{29}}{2} = \frac{25 \cdot 2}{4 \cdot 5\sqrt{29}} = \frac{5}{2\sqrt{29}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



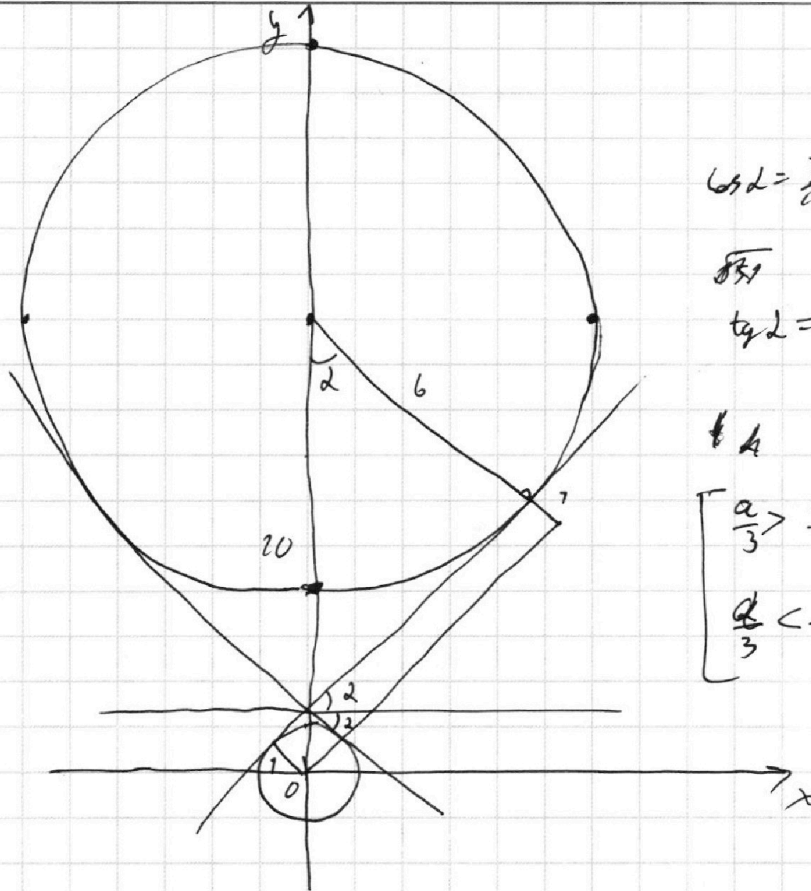
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МОФИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \alpha = \frac{7}{10}$$

831

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

4

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7} \\ \frac{a}{3} < -\frac{\sqrt{51}}{7} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} a > \frac{3\sqrt{51}}{7} \\ a < -\frac{3\sqrt{51}}{7} \end{array} \right]$$

$$a = 2^9 \cdot 3^7 \cdot 5^{19}$$

$$ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{19}$$

$$b = 2^7 \cdot 3^7$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{20}$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{20}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{20} \cdot 5^{39}$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$$

$$\frac{6252}{5} = \frac{5255 \cdot 4}{25 \cdot 2} = \frac{\frac{2}{458} \cdot 5255}{\frac{4}{5}} = \frac{2 \cdot 5255}{32} = 407.92$$

$$= 1 - \frac{5255}{512} = 71.181$$

$$\frac{2}{6252} = \frac{2}{525 \cdot 12} = \frac{1}{525 \cdot 6} = \frac{1}{3150} = \frac{4}{12600} = \frac{4}{3150} = \frac{4}{3150} + \left( \frac{4}{3150} \right)$$
$$\begin{array}{r} 5 \cdot 2 \cdot 5 \\ 5 \cdot 1 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 \cdot 1 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

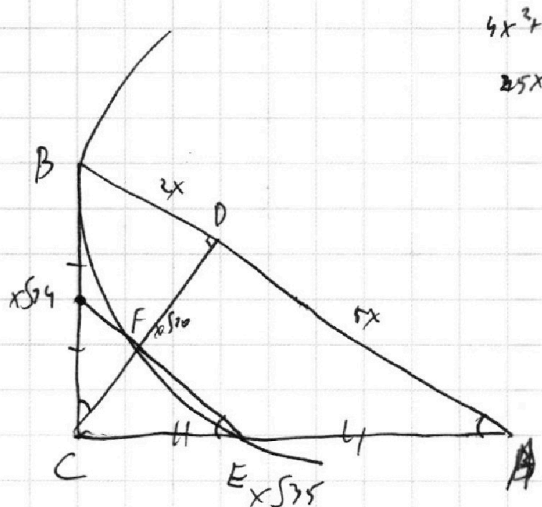
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4x^2 + 10x^2 = 14x^2$$

$$25x^2 + 10x^2 = 35x^2$$

$$\frac{\pi}{2} - x = t$$

$$\pi - 2x = 2t$$

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$$

$$\arcsin(\sin t) = 2t$$

$$x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] ; 10 \arcsin(\sin t) = t + 2\pi n$$

$$x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] ; \arcsin(\sin t) =$$

~~$$y = 2\pi n$$~~

$$[-\frac{\pi}{2} + 2\pi; \frac{\pi}{2} + 2\pi] ; y = 10(x - 2\pi)$$

~~$$y = 20x$$~~ 
$$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] ; 10x$$

$$20t = 2t$$

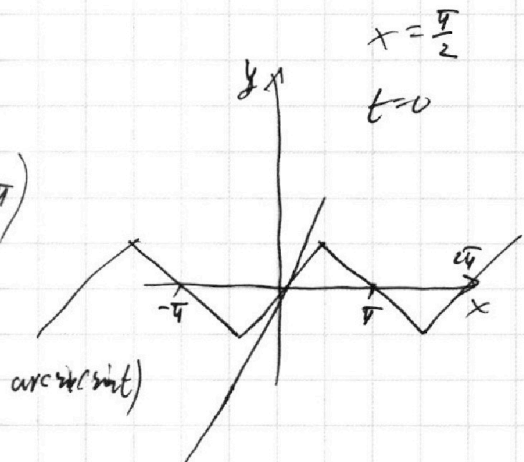
$$t = 0$$

$$[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] ; 10t - 20\pi = 2t$$

$$t = \frac{20\pi}{8} = \frac{5\pi}{2}$$

$$[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}] ; 10t - 40\pi = 2t$$

$$8t = 5\pi$$



$$t \geq \frac{5\pi}{2}; 2t > 5\pi$$

$$10 \arcsin(\sin t) \leq 5\pi$$

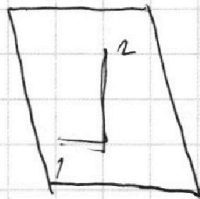
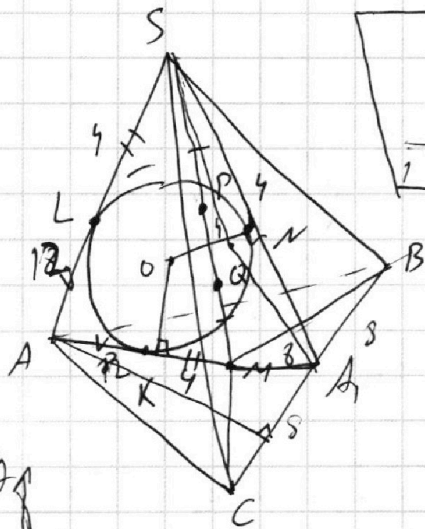
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



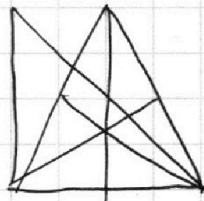
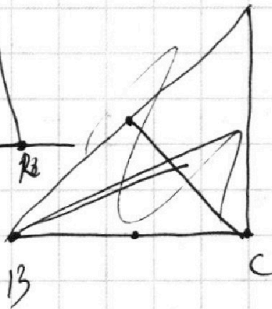
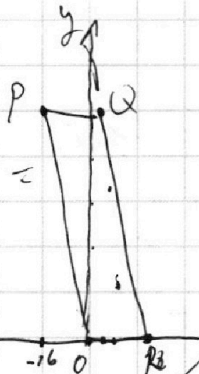
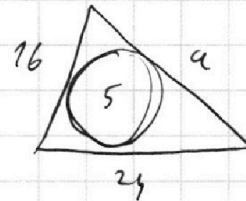
$$S_{ABC} = 100$$

$$SA = BC = 16$$

$$SP \cdot SQ = SL^2 = MP \cdot NQ = KM^2$$

$$m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

$$m_a m_b m_c = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}$$



$$p = 20 + \frac{a}{2}$$

$$S = \sqrt{(20 + \frac{a}{2})(20 - \frac{a}{2})(\frac{a}{2} + 4)(\frac{a}{2} - 4)} =$$

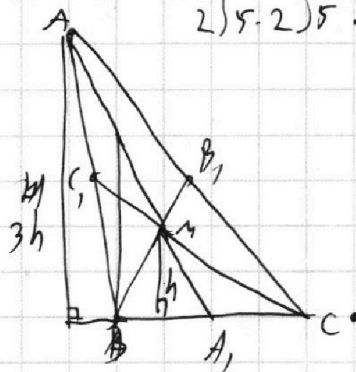
$$m_a m_b m_c = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} =$$

$$= 4 \cdot 3$$

$$= \sqrt{(400 - \frac{a^2}{4})(\frac{a^2}{4} - 16)} = (20 + \frac{a}{2}) \cdot 5$$

$$2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2} = 8$$

$$AM = 16$$



$$3h = \frac{100 \cdot 2}{16} = \frac{200}{16} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2} = 12.5$$

$$x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = 459$$

$$h = \frac{25}{6}$$

$$BM \cdot MC = h \cdot AC =$$

$$= \frac{25}{6} \cdot 16 = \frac{200}{3}$$

$$BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3}{2} BM \cdot \frac{3}{2} MC = \frac{9}{4} BM \cdot MC = \frac{200 \cdot 9}{3 \cdot 4} =$$

$$(400 - \frac{a^2}{4})(\frac{a^2}{4} - 16) = (100 + \frac{50a}{2})^2 = 150 \cdot 24 = \dots$$

$$50 \cdot 3 = 150$$

$$150 \cdot 24 = 3600$$

$$700a^2 + 4a^2 - \frac{a^4}{16} - 16 \cdot 400 = 10000 + 500a + \frac{25a^2}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

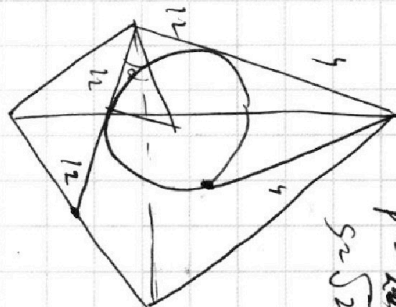


$$\log_5^4(2x) \rightarrow \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_5 5 = \log_{2x} 625 - 3$$

$$\log_5^4 2x - 3 \log_{2x} 5 = \frac{1}{3} \log_{2x} 625 - 3$$

$$\frac{1}{3} \log_{2x} 625 = \frac{1}{3} \log_{2x} 5^4 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5$$



$16 \cdot 24 = 16 \cdot 24 = 16 \cdot 24$

$p = \frac{1}{3} \sqrt{28 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12}$

$$\log_5^4 2x - \frac{13}{3} \log_{2x} 5 + 3 = 0$$

$$\log_5^4 2x - \frac{13}{3 \log_5 2x} + 3 = 0$$

$$\log_5^5 2x + 3 \log_5 2x = \frac{13}{3} \quad \text{не}$$

$$f(t) = \log_5^5 t + 3 \log_5 t$$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \log_5^5(t^{-1}) + 3 \log_5 t^{-1} =$$

$$= -\log_5^5 t - 3 \log_5 t = -f(t)$$

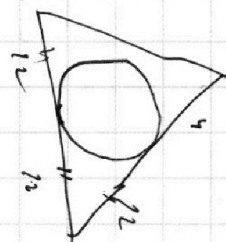
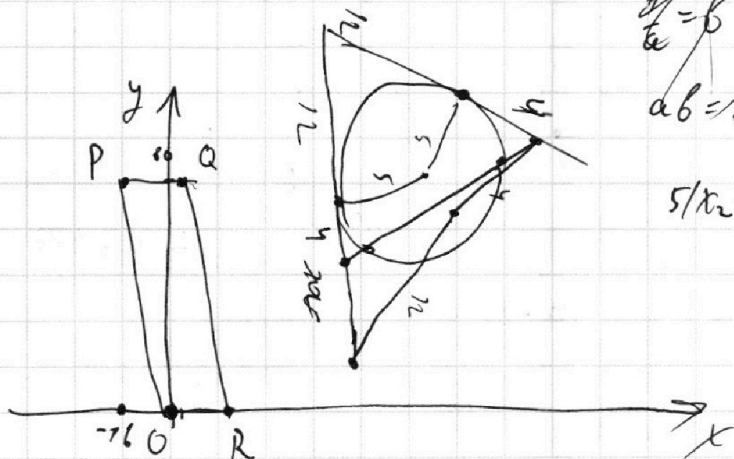
$$f(a) = -f(b)$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = f(b)$$

$$\frac{a}{b} = b$$

$$ab = a^2$$

$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$$



$16 \cdot 24 = 2 \cdot 16 \cdot 24 \log_{2x} 5$

$\sim \frac{288 - 1}{169} = \frac{119}{169}$

$5^2 + 12^2 = 169$

$5^2 + 12^2 = 169$

$5^2 + 12^2 = 169$

$5^2 + 12^2 = 169$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 6 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 164) = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (y - 10)^2 = 36$$

$$y = \frac{ax + 6}{3}$$

$$1) y_1 = \sqrt{1 - x^2}$$

$$y_2 = \sqrt{36 - x^2} + 10$$

$$y_1' = -2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y_2' = -2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{36-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{36-x^2}}$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)x_0 + f'(x_0)x$$

$$\begin{cases} f_1'(x_1) = f_2'(x_2) \\ f_1(x_1) - f_1'(x_1)x_1 = f_2 - f_2'(x_2)x_2 \end{cases}$$

$$\frac{-x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} = \frac{-x_2}{\sqrt{36-x_2^2}}$$

$$x \approx y - 5 \quad y^2 - 2\sqrt{5}y + 2 = 1$$

36x

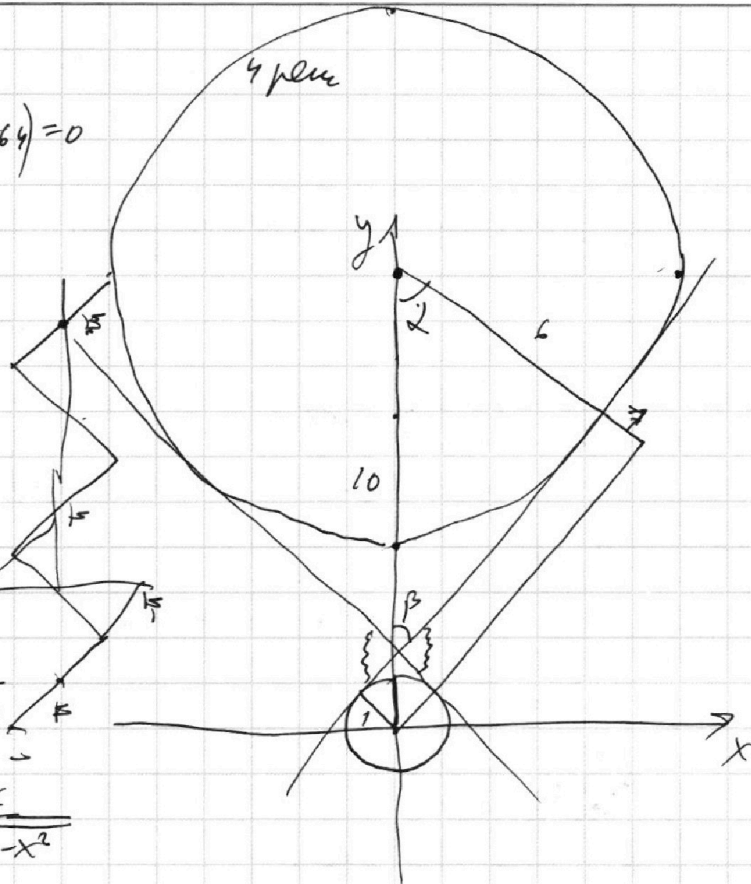
$$x = y - 5$$

$$y^2 - 2\sqrt{5}y + 2 + y^2 - 100 - 20y + 100 = 36$$

$$2y^2 - 20y - 2\sqrt{5}y + 66 = 0$$

$$\cos 2 = \frac{6}{10} \sqrt{\frac{3}{5}} \quad \frac{7}{10} = \sin 2\beta$$

$$t = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{29}$$

$$abc: 2^{20} \cdot 3^{34} \cdot 5^{39}$$

$$ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$abc^2: 2^{8+12+14} \cdot 3^{14+20+21} \cdot 5^{12+17+39}$$

$$b^2: 2^6 \cdot 3^{13}$$

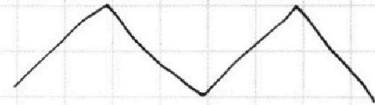
$$2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$$

$$3^{27} \rightarrow : 3^{59} \quad b: 2^3 \cdot 3^7$$

$$abc: 2^{17} \cdot 3^{55} \cdot 5^{34}$$

$$2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

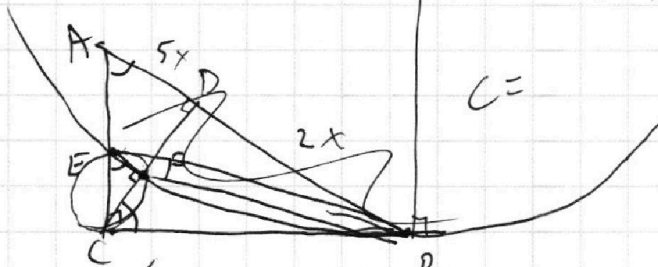
$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2}-x)) =$$



$$b = 2^3 \cdot 3^7$$

$$a = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{19}$$

$$10\sqrt{1-x^2} = \pi - 2x$$



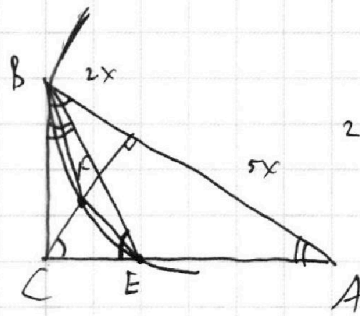
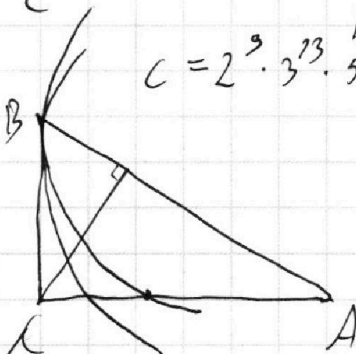
$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$$

$$y = 10\sqrt{1-x^2}$$

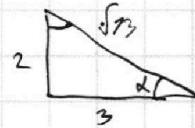
$$y^2 = 100 - 200x^2$$

$$CD = x\sqrt{10}$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{20}$$



$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$



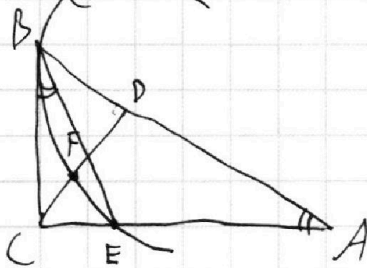
$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$10\sqrt{1-x^2} = \pi - 2x$$

$$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$\arcsin(\cos x) =$$



$$100 - 100x^2 = (\pi - 2x)^2$$

$$-100x^2 + 100 = \pi^2 - 4\pi x + 4x^2$$

$$\pi - 2x \geq 0$$

$$a: 5^{19}$$

$$b: 5^{20}$$

$$a =$$