МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

$ab \vdots 2^8\cdot 3^{14}\cdot 5^{12}$ Перемножив эти 3 выражения, получим, что $(a^2b^2c^2) \vdots (2^{8+12+14}\cdot 3^{14+20+21}\cdot 5^{12+17+39})$

$bc \vdots 2^{12}\cdot 3^{20}\cdot 5^{17}$

$ac \vdots 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{39}$

$$2^{8+12+14}\cdot 3^{14+20+21}\cdot 5^{12+17+39} = 2^{34}\cdot 3^{55}\cdot 5^{68}$$

Значит $(a^2b^2c^2) \vdots (2^{34}\cdot 3^{55}\cdot 5^{68})$

Пусть 3^k – макс. степень, делящая abc, тогда если ~~$k \leq 27$, $k < 28$, то $3^k < 3^{56}$~~ $k \leq 27$, то $(3^k)^2 \leq 3^{54}$, то есть $a^2b^2c^2$ не делится на 3^{55}, значит $k \geq 28$. Остальные показатели степени (т.е. двойки и пятёрки) чётны, поэтому их можно разделить на 2 (взять кв. корень из обеих частей выражения). Получается $abc \vdots 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{34}$, значит $abc \geq 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{34}$. ~~Причём равенство возможно~~ Но мы знаем, что $ac \vdots 5^{39}$, значит $abc \vdots 5^{39}$, и тогда $abc \geq 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$.

Равенство возможно, например, если

$a = 2^5\cdot 3^7\cdot 5^{19}$

$b = 2^3\cdot 3^7$

$c = 2^9\cdot 3^{14}\cdot 5^{20}$

Ответ: $2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Дано:

$\triangle ABC$ - прям.
CD - высота
AB - гипотенуза

Окр. касается BC в т. B, пересекает CD в т. F, а катет AC в т. E

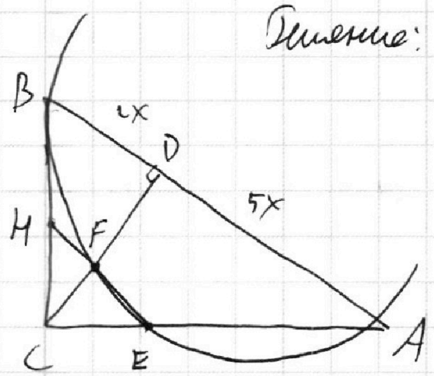
$AB \parallel EF$

$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$

Найти:

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$

Решение:



1. Пусть $EF \cap BC = H$.

Т.к. $EH \parallel AB$, то CF - высота $\triangle HEC$ - прям., значит $\triangle CHF \sim \triangle HCE$; $\frac{CH}{HF} = \frac{HE}{HC} \Rightarrow CH^2 = HE \cdot HF$

2. BH - касат. к окр. $\Rightarrow BH^2 = \cancel{B}HF \cdot HE$ (как отрезки секущих)

3. $\left.\begin{array}{l} BH^2 = HE \cdot HF \\ CH^2 = HE \cdot HF \end{array}\right| \Rightarrow BH = CH$; HE - сред. лин. $\triangle ABC \Rightarrow$
$\Rightarrow CE = AE = \frac{1}{2} AC$

4. Из параллельности HE и AB $\triangle ABC \sim \triangle CFE \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k^2 =$
$= \left(\frac{AB}{CE}\right)^2$

5. Пусть $BD = \cancel{5x}\ 2x$, тогда $AD = 5x$; $CD = \sqrt{BD \cdot AD} = x\sqrt{10}$ (по св-ву прям. тр.)

Из $\triangle CDA$ по т. Пифагора: $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = x\sqrt{35} \Rightarrow$
$\Rightarrow CE = \frac{AC}{2} = \frac{x\sqrt{35}}{2}$

6. $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AB}{CE}\right)^2 = \left(\frac{7x}{\frac{x\sqrt{35}}{2}}\right)^2 = \frac{49x^2}{\frac{35x^2}{4}} = \frac{4 \cdot 49}{35} = \frac{4 \cdot 7}{5} = \frac{28}{5}$

Ответ: $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{28}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$10\arcsin(\cos x)=\pi-2x$

$10\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2}-x))=\pi-2x$

Пусть $\frac{\pi}{2}-x=t$.

$10\arcsin(\sin t)=2t$

Известно, что если $t\in[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n]; n\in\mathbb{Z}$, то $\arcsin(\sin t)=t-2\pi n$, а если $t\in[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k]$, то $\arcsin(\sin t)=-t+\pi+2\pi k$. Заметим так же, что если $t=a$ - решение, то $t=-a$ - тоже решение, т.к. $f(t)=10\arcsin(\sin t)$ и $g(t)=2t$ - нечётные ф-ии. Поэтому рассмотрим только $t\geq 0$.

Если $t\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, то $10t=2t$
$t=0$

Если $t\in[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$, то $-10t+10\pi=2t$
$12t=10\pi$
$t=\frac{5\pi}{6}$

Если $t\in[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}]$, то $10t-20\pi=2t$
$20\pi=8t$
$t=\frac{5\pi}{4}$ - не подходит, т.к. не лежит на $[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}]$

Если $t>\frac{5\pi}{2}$, то $2t>5\pi$, а т.к. $\arcsin(\sin t)\leq\frac{\pi}{2}$, то $10\arcsin(\sin t)\leq 5\pi$, значит при $t>\frac{5\pi}{2}$ решений нет.

Вследствие симметрии $t=-\frac{5\pi}{6}$ - тоже решение. Значит $t=0$; $t=-\frac{5\pi}{6}$; $t=\frac{5\pi}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обр. замена: $t = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$t = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3}$

$t = -\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = -\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}$; $x = -\frac{\pi}{3}$; $x = \frac{4\pi}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Подходят все a, кроме $0 \le a \le \frac{3\sqrt{51}}{7}$ и $-\frac{3\sqrt{51}}{7} \le a \le 0$, т.е. ~~$3\sqrt{57}$~~ $-\frac{3\sqrt{51}}{7} \le a \le \frac{3\sqrt{51}}{7}$. При остальных a требуемое в существует, значит $a > \frac{3\sqrt{51}}{7}$ или $a < -\frac{3\sqrt{51}}{7}$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 & (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x^2+y^2-1=0, \\ &x^2+y^2-20y+64=0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x^2+y^2=1 \\ &x^2+(y-10)^2=36 \end{aligned}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$$

График (2) - 2 окружности. Одна с центром $(0;0)$ и радиусом 1, а другая с центром в $(0;10)$ и радиусом 6. График (1) - прямая с угл. коэффициентом $\frac{a}{3}$ и свободным членом $\frac{4}{3}b$. Требуется найти такие угловые коэфф. этой прямой, чтоб можно было найти такое b, что эта прямая пересекает обе окружности, каждую в 2 точках. Коэфф $\frac{4}{3}b$ отвечает только за движение прямой вверх-вниз. По графику видно, что достаточно „крупную" прямую можно подвинуть так, что необходимое условие ~~выдвин~~ выполнится. Найдём граничные значения угл. коэфф, при котором при поднятии прямой в момент, когда прямая касается внутр образом одной окружности, она касается и другой.

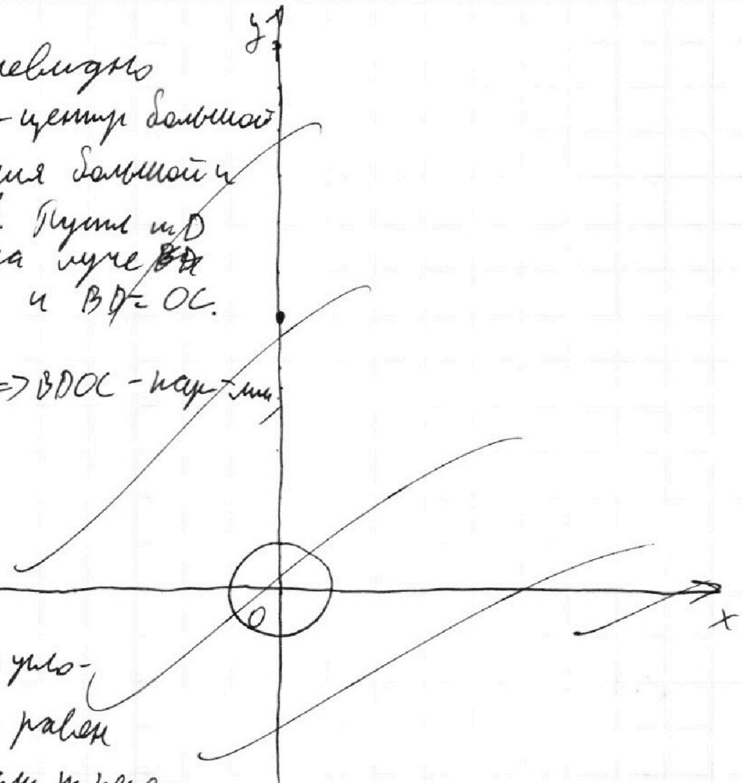
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

т. пересечения касат. очевидно лежит на OY. Пусть A – центр большой окр., B и C – т. касания большой и маленькой окр. соотв. Пусть т. D такова, что D лежит на луче ~~BA~~ AB ~~в~~ за точкой B и BD = OC.



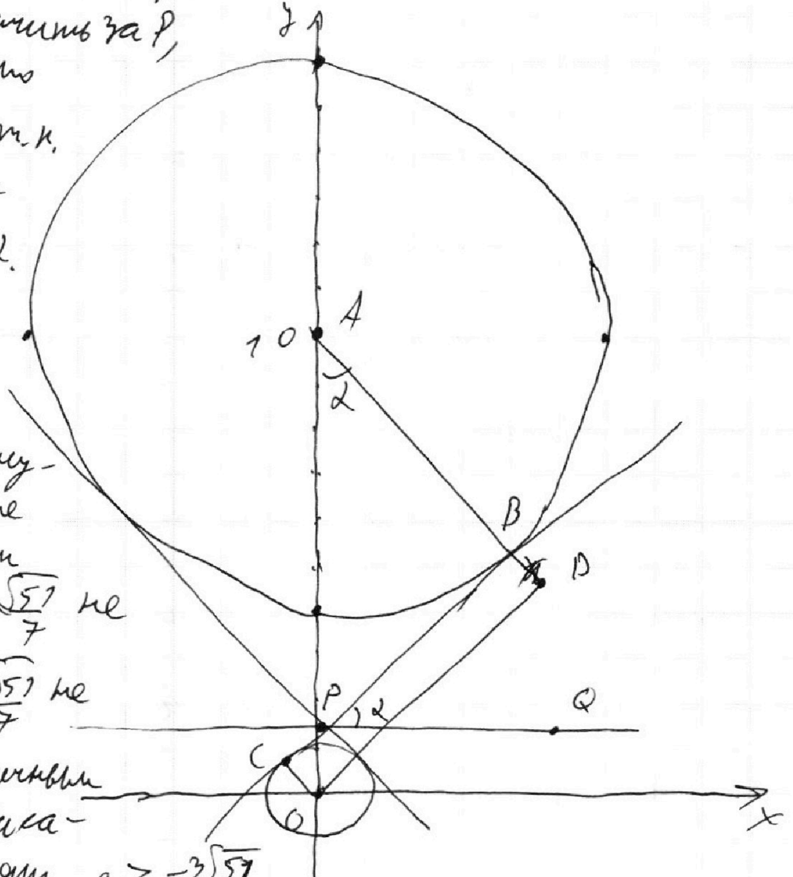
Тогда $OC = BD$; $OC \parallel BD \Rightarrow BDOC$ – пар-мм, $BC \parallel OD$., $\triangle ADO$ – прям.;

$AD = AB + BD = 7$
$AO = 10$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow DO = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51}$ угловой коэфф. прямой BC равен тангенсу $\angle OAB = \alpha$ т.к. если т. пересечения касат. обозначить за P, и провести $PQ \parallel OX$, то

$\angle BPO + \angle APB = 90°$, но т.к. $\angle PAB = \angle OAB = \alpha$ и $\angle PAB + \angle APB = 90°$, то $\angle BPO = \alpha$.

$tg\,\alpha = \frac{OD}{AD} = \frac{\sqrt{51}}{7}$; все прямые, проходящие через P и лежащие внутри угла BPQ так же не подходят, значит если $\frac{a}{3} \geq 0$, то $\frac{a}{3} \leq \frac{\sqrt{51}}{7}$ не подходят, т.е. $a \leq \frac{3\sqrt{51}}{7}$ не подходят. По аналогичным сообр. для другой касательной не подходят $a \geq -\frac{3\sqrt{51}}{7}$ при $a \leq 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x \neq 1 \\ 2x > 0 \\ 8x^3 > 0 \\ 8x^3 \neq 1 \end{cases}$

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \frac{4}{3}\log_{2x}5 - 3$

$\log_5^4(2x) - \frac{13}{3}\log_{2x}5 = -3$

$\log_5^4(2x) - \frac{13}{3\log_5(2x)} = -3$

т.к. $3\log_5(2x) \neq 0$, иначе $2x = 1$, домножим на $\log_5(2x)$:

$\log_5^5(2x) + 3\log_5(2x) = \frac{13}{3}$

2) $\log_5^4 y + 4\log_{9y}5 = \log_{y^3}0,2 - 3$

ОДЗ: $\begin{cases} y \neq 1 \\ y > 0 \\ y^3 > 0 \\ y^3 \neq 1 \end{cases}$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3$

$\log_5^4 y + \frac{13}{3}\log_y 5 = -3$

~~т.к.~~ $\cancel{\log_y}$ $\log_5^4 y + \cancel{\frac{13}{3\log_y 5}} + \frac{13}{3\log_5 y} = -3$

т.к. $3\log_5 y \neq 0$, иначе $y = 1$, домножим на $\log_5 y$:

$\log_5^5 y + 3\log_5 y = -\frac{13}{3}$

Пусть $f(t) = \log_5^5(t) + 3\log_5 t$. Заметим, что $f(\frac{1}{t}) =$
$= \log_5^5(t^{-1}) + 3\log_5(t^{-1}) = -\log_5^5(t) - 3\log_5 t = -f(t)$.
Причём f - возр. ф-ия, т.к. $y = \log_5 t$ - возр. ф-ия. Значит
имеется уравнение $f(2x) = -f(y) \iff f(2x) = f(\frac{1}{y})$. Т.к.
f - возр., то $f(2x) = f(\frac{1}{y}) \iff 2x = \frac{1}{y}$; $xy = \frac{1}{2}$

Ответ: $xy = \frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\cos\angle KTO = \frac{5}{2\sqrt{29}} \Rightarrow \cos\angle KTN = \cos(2\angle KTO) = 2\cos^2\angle KTO - 1 =$

$= 2\cdot\frac{25}{4\cdot 29} - 1 = \frac{50}{116} - 1 = \cancel{\frac{66}{116}}\ \frac{25}{58} - 1 = \frac{-33}{58}$

II. $\angle KTN = \angle A(BC)S$, т.к. $KT \perp BC$ и $NT \perp BC$ (как линейный угол двугр. угла).

$\left.\begin{array}{l}\angle KTN = \angle A(BC)S \\ \angle KTN = \arccos\frac{-33}{58}\end{array}\right| \Rightarrow \angle A(BC)S = \arccos\frac{-33}{58}$

Ответ: б) $\angle A(BC)S = \arccos\frac{-33}{58}$

а) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 3600$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

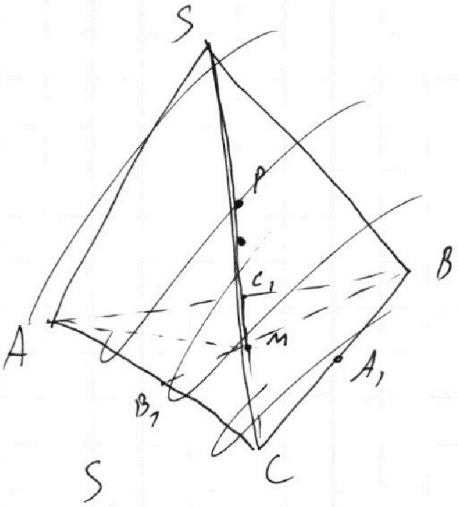
Дано:
$SABC$ - пирамида
$AA_1; BB_1; CC_1$ - медианы $\triangle ABC$
$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = M$

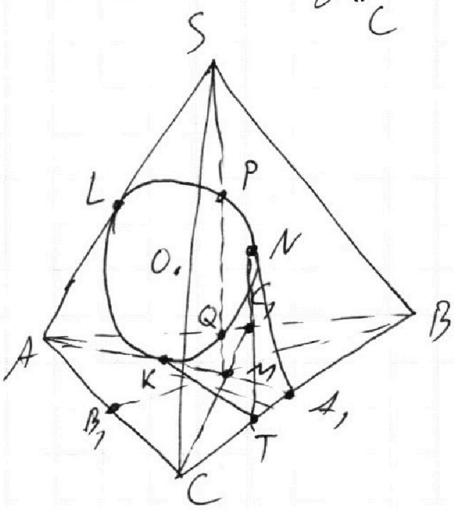
сфера Ω касается AS в т. L
и пл. ABC в т. K; $K \in AM$
~~$\Omega \cap SM$~~ = Ω пересекает SM
в т. P и Q
$SP = MQ$; $S_{ABC} = 100$;
$SA = BC = 16$.

Найти:
а) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$

б) $? \angle A(BC)S$ - ?
если Ω касается
BCS в т. N; $SN = 4$;
$R(\Omega) = 5$

Решение:





1. $SP = MQ \Rightarrow SQ = MP$.

$SL^2 = SP \cdot SQ$
(как отрезки секущих)
$MK^2 = MQ \cdot MP$

$\Rightarrow KM = SL$.

2. $AK = AL$ (как отр. касат.)
$KM = SL$
$\Rightarrow AS = AL + LS = AK + KM = AM = 16$.

3. По св-ву т. пересечения медиан $MA_1 = \frac{1}{2} AM = 8$.

$A_1M = CA_1 = BA_1 = 8$
MA_1 - медиана $\triangle BCM$
$\Rightarrow \triangle BCM$ - прямоуг. (по пр-ку прямоуг. тр.)

4. $\triangle BCM$ - прямоуг. $\Rightarrow$ $BM \cdot MC = BC \cdot h$, где h - высота из т. M.
(по св-ву прям. тр.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5. Пусть H – длина высоты $\triangle ABC$ через т. A. Тогда по т. Фалеса $H = 3h$, ~~ha~~, но в то же время $H = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{200}{16} = \frac{25}{2}$, значит

$h = \frac{H}{3} = \frac{25}{6}$

6. $MC \cdot MB = h \cdot BC = \frac{25}{6} \cdot 16 = \frac{200}{3}$

$AA_1 = \frac{3}{2} AM = 24$

$BB_1 = \frac{3}{2} BM$

$CC_1 = \frac{3}{2} CM$

$\Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \cancel{24 \cdot MC \cdot MB}$

$= 24 \cdot \frac{3}{2} MC \cdot \frac{3}{2} MB =$

$= 6 \cdot 9 \cdot MC \cdot MB = 6 \cdot 9 \cdot \frac{200}{3} =$

$= \underline{3600}$

7. Пусть O – центр Ω.

Тогда поскольку Ω касается ABC в т. M и SBC в т. N, то проекции точек M и N на прямую BC совпадают. Пусть это будет точка T, и точка T лежит в одной пл. с т. M, N, O.

8. $SN = SL$ (как отрезки касат.) $= 4 \Rightarrow AL = AK = AS - SL = 12$.

9. $KA_1 = \cancel{AK}\, AA_1 - AK = 12 \Rightarrow K$ – середина AA_1. Т.к. $KT \perp BC$, то $KT = \frac{1}{2} H$, где H – высота $\triangle ABC$ из т. A (по т. Фалеса).

$KT = \frac{1}{2} H = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} = \frac{25}{4} = NT$ (как отрезки касат.)

10. Из $\triangle KOT$-прям.: $OT = \sqrt{OK^2 + KT^2} = \sqrt{5^2 + \left(\frac{25}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{100 + 625}{4}} =$

$= \frac{\sqrt{725}}{2} = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, ~~тог~~ тогда из $\triangle KOT$: $\cos\angle KTO =$

$= \frac{KT}{OT} = \frac{25}{4} : \frac{5\sqrt{29}}{2} = \frac{25 \cdot 2}{4 \cdot 5\sqrt{29}} = \frac{5}{2\sqrt{29}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

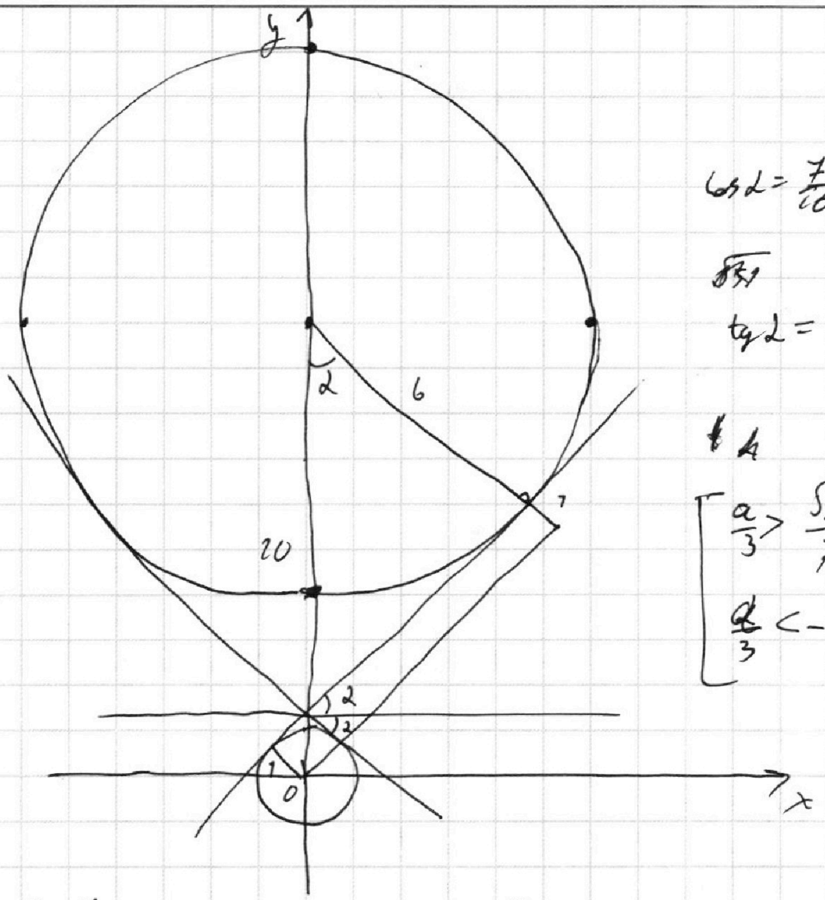
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\cos\alpha = \frac{7}{10}$

$\sqrt{51}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{51}}{7}$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7} \\ \frac{a}{3} < -\frac{\sqrt{51}}{7} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a > \frac{3\sqrt{51}}{7} \\ a < -\frac{3\sqrt{51}}{7} \end{array}\right.$$

$a = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{19}$

$b = 2^3 \cdot 3^7$

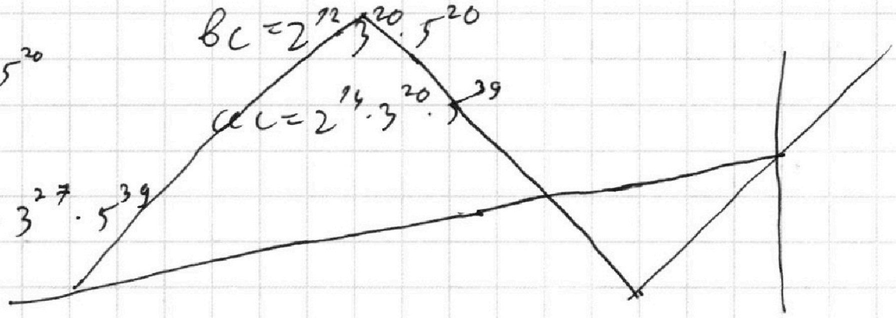
$c = 2^9 \cdot 3^{17} \cdot 5^{20}$

$ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{19}$

$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{20}$

$ac = 2^{14} \cdot 3^{20} \cdot 5^{39}$

$abc = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$



$= 1 - \frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 2}$

$\frac{6252}{5} = \frac{6255 \cdot 4}{2 \cdot 52} = \frac{\frac{2}{6254}}{\frac{5}{52}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

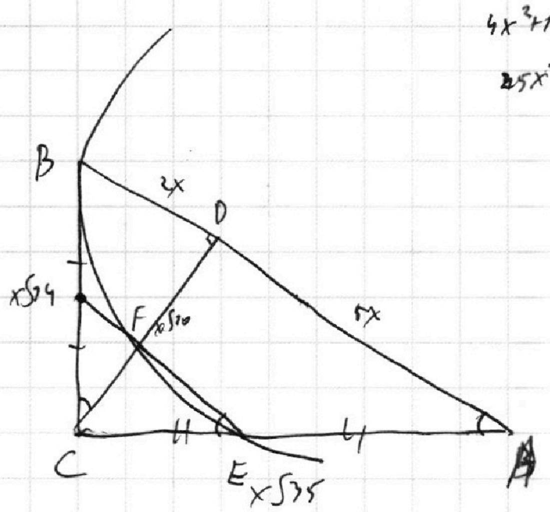
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$4x^2+10x^2=14x^2$

$25x^2+10x^2=35x^2$



$\frac{\pi}{2}-x=t$

$\pi-2x=2t$

$10\arcsin(\cos x)=\pi-2x$

$\arcsin(\cos x)=\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2}-x))$

$\arcsin(\sin t)=2t$

$x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]^{+2\pi n}$; $10\arcsin(\sin t)=t\ \cancel{2\pi n}$

$x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]^{+2\pi k}$; $\arcsin(\sin t)=$

~~$y=2\pi n$ $y=x-2\pi n$~~

$x=\frac{\pi}{2}$

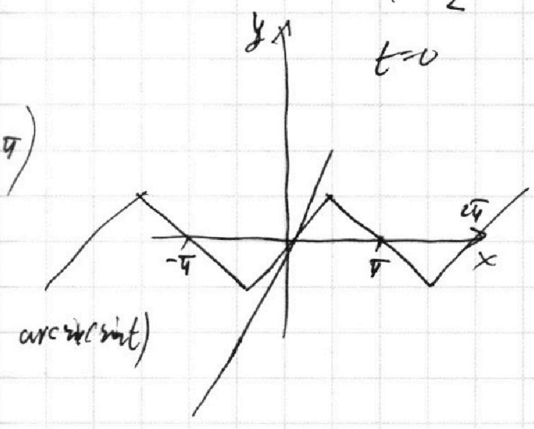
$t=0$

$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi;\frac{\pi}{2}+2\pi\right]$; $y=10(x-2\pi)$

~~$y=10x$~~ $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$: ~~$10x$~~

$20t=2t$

$t=0$



$\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$; $10t-20\pi=2t$

$t=\frac{20\pi}{8}=\frac{5\pi}{2}$

$t>\frac{5\pi}{2}$; $2t>5\pi$

$10\arcsin(\sin t)\leq 5\pi$

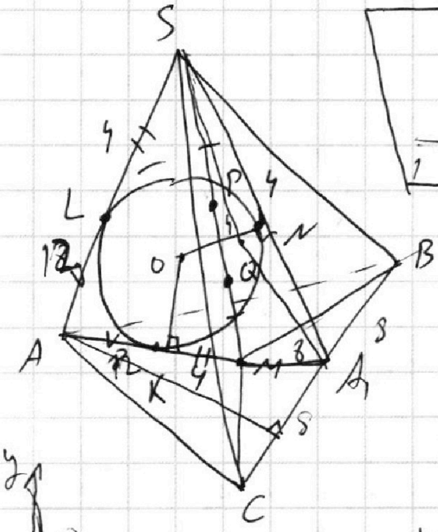
$\left[\frac{7\pi}{2};\frac{9\pi}{2}\right]$; $10t-40\pi=2t$

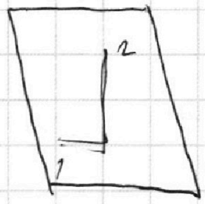
$8t=5\pi$

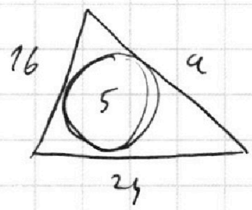
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







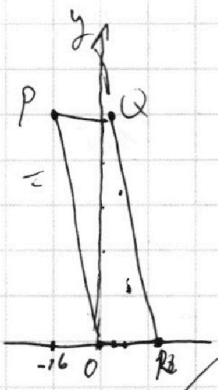
$S_{ABC}=100$

$SA=BC=16$

$SP\cdot SQ=SL^2=MP\cdot MQ=KM^2$

$m_a=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$

$m_a m_b m_c=\sqrt{(2b^2+2c^2-a^2)(2a^2+2b^2-c^2)(2a^2+2c^2-b^2)}$

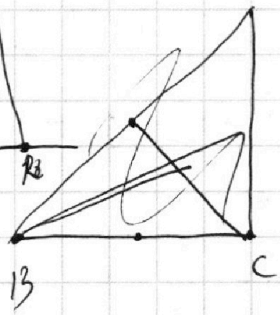


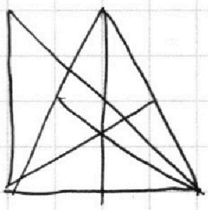
$p=20+\frac{a}{2}$

$S=\sqrt{(20+\frac{a}{2})(20-\frac{a}{2})(\frac{a}{2}+4)(\frac{a}{2}-4)}=$

$m_a m_b m_c=4\cdot\sqrt{73}\cdot\sqrt{73}=$

$=4\cdot73$

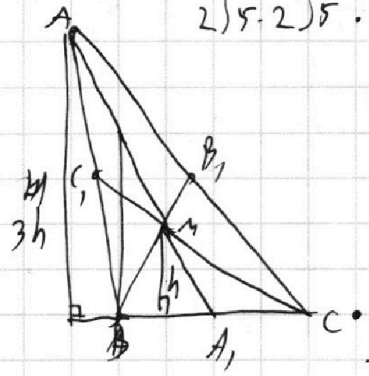


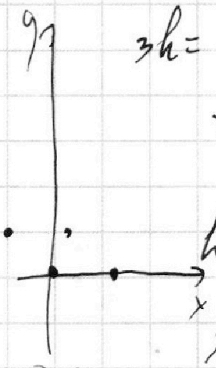


$=\sqrt{(400-\frac{a^2}{4})(\frac{a^2}{4}-16)}=(20+\frac{a}{2})\cdot5$

$2\sqrt5\cdot2\sqrt5\cdot2\sqrt2=8$

$AM=16$





$3h=\frac{100\cdot2}{16}=\frac{200}{16}=\frac{50}{4}=\frac{25}{2}=12,5$

$x_2-x_1+y_2-y_1=9$

$h=\frac{25}{6}$

$BM\cdot MC=h\cdot BC=$

$=\frac{25}{6}\cdot16=\frac{200}{3}$

$BB_1\cdot CC_1=\frac{3}{2}BM\cdot\frac{3}{2}CM=\frac{9}{4}BM\cdot CM=\frac{200}{3}\cdot\frac{9}{4}=$

$=150\cdot24=..$

$50\cdot3=150$

$150\cdot24=3600$

$(400-\frac{a^2}{4})(\frac{a^2}{4}-16)=(100+\frac{5a}{2})^2$

$100a^2+4a^2-\frac{a^4}{16}-16\cdot400=10000+500a+\frac{25a^2}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

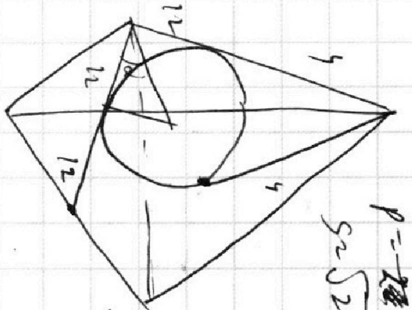
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3$



$\log_5^4 2x - 3\log_{2x}5 = \frac{1}{3}\log_{2x}625 - 3$

$\frac{1}{3}\log_{2x}625 = \frac{1}{3}\log_{2x}5^4 = \frac{4}{3}\log_{2x}5$

$\log_5^4 2x - \frac{13}{3}\log_{2x}5 + 3 = 0$

$\log_5^4 2x - \frac{13}{3\log_5 2x} + 3 = 0$

$\log_5^5 2x + 3\log_5 2x = \frac{13}{3}$

$f(t) = \log_5^5 t + 3\log_5 t$

$f(\frac{1}{t}) = \log_5^5(t^{-1}) + 3\log_5 t^{-1} =$

$= -\log_5^5 t - 3\log_5 t = -f(t)$

$f(a) = -f(b)$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = 3\log_y 5^{-1} - 3$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = -3\log_y 5 - 3$

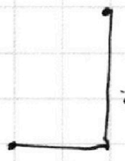
$\log_5^4 y + \frac{13}{3}\log_y 5 + 3 = 0$

$\log_5^5 y + 3\log_5 y = -\frac{13}{3}$

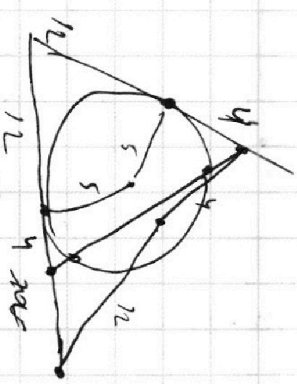
$\cancel{f(\frac{1}{a}) = f(b)}$

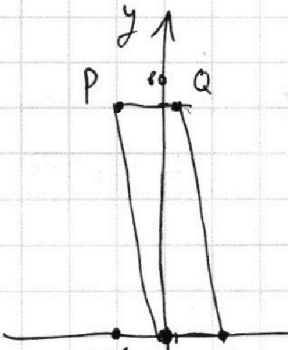
$\frac{1}{a} = b$

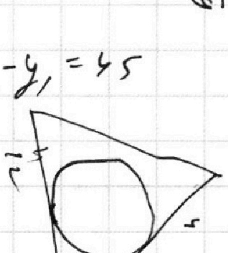
$ab = 1$



$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases}$$

$x^2+y^2=1$

$x^2+(y-10)^2=36$

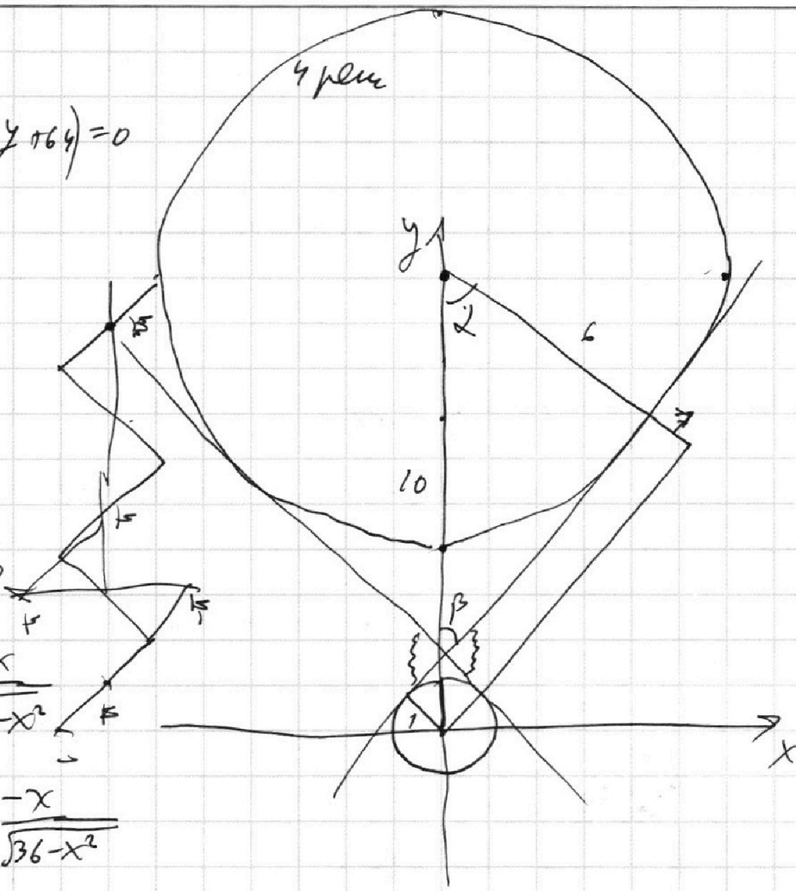
$y=\frac{a}{3}x+\frac{4b}{3}$

1) $y_1=\sqrt{1-x^2}$

$y_2=\sqrt{36-x^2}+10$

$y_1'=-2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$y_2'=-2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{36-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{36-x^2}}$



$f_{\text{к}}=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+f'(x_0)x$

$$\begin{cases} f_1'(x_1)=f_2'(x_2) \\ f_1(x_1)-f_1'(x_1)x_1=f_2-f_2'(x_2)x_2 \end{cases}$$

$\frac{-x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}=\frac{-x_2}{\sqrt{36-x_2^2}}$

$x=y-\sqrt{2}$ $\quad y^2-2\sqrt{2}y+2=1$

~~36x~~

$x=y-\sqrt{2}$ $\quad y^2-\cancel{2\sqrt{2}y+2+y^2-100\,20y+100=36}$

$2y^2-20y-2\sqrt{2}y+64=0$

$\cos\alpha=\frac{6}{10}$ $\quad \operatorname{tg}=\frac{3}{\sqrt{5}}$ $\quad \frac{7}{10}=\sin\beta$

$t=\sqrt{10^2-7^2}=\sqrt{51}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$ab \vdots 2^8 3^{14} 5^{12}$ $\quad bc \vdots 2^{12}\cdot 3^{20}\cdot 5^{17}$ $\quad ab^2c \vdots 2^{20}\cdot 3^{34}\cdot 5^{39}$

$ac \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39}$ $\quad ac \vdots 2^{24}\cdot 3^{27}\cdot 5^{39}$

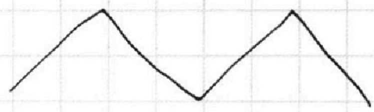
$a^2b^2c^2 \vdots 2^{8+12+14}\ 3^{14+20+21}\ 5^{12+17+39}$ $\quad b^2 \vdots \ b^2 \vdots 2^6 \cdot 3^{13}$

$\| \quad 2^{34}\cdot 3^{55}\cdot 5^{68}$ $\quad 3^{27} \to \ \vdots 3^{54}$ $\quad b \vdots 2^3\cdot 3^7$

3^{28}

$abc \vdots 2^{17}\cdot 3^{\frac{55}{2}}\cdot 5^{34}$

$2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{34}$ $\quad \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2}-x)) =$

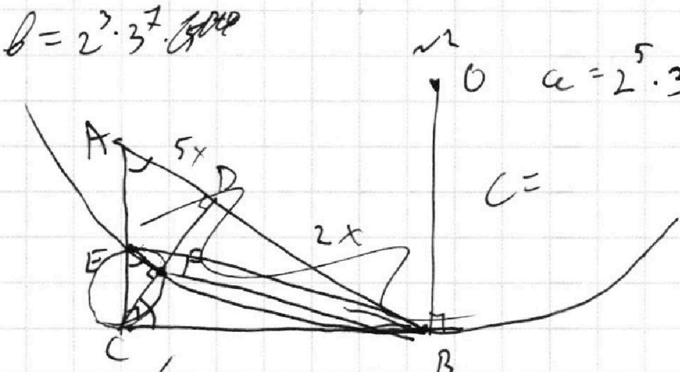


$b = 2^3\cdot 3^7$

$10\sqrt{1-x^2} = \pi - 2x$

№2

$a = 2^5\cdot 3^7\cdot 5^{19}$



$C =$

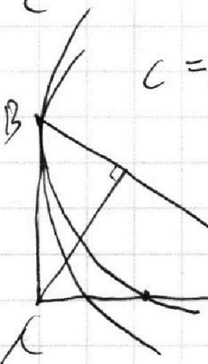
$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$

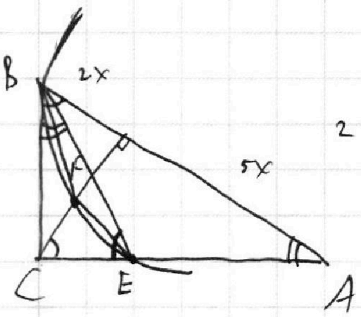
$y = 10\sqrt{1-x^2} =$

$y^2 = 100 - 100x^2$

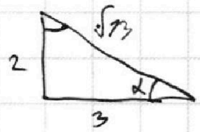
$CD = x\sqrt{10}$

$C = 2^9\cdot 3^{13}\cdot 5^{20}$



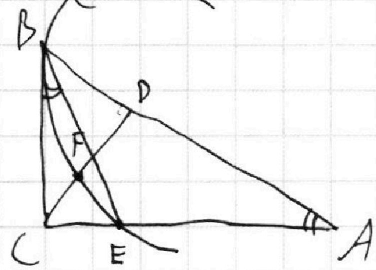


$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$



$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} =$

$10\sqrt{1-x^2} = \pi - 2x$



$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$10\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\arcsin(\cos x) =$

$\pi - 2x \geq 0$

$a \vdots 5^{19}$

$100 - 100x^2 = (\pi - 2x)^2$

$b \vdots 5^{20}$

$-100x^2 + 100 = \pi^2 - 4\pi x + 4x^2$

$a =$