



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если у какого-то из чисел  $a, b$  или  $c$  есть простой делитель отличный от 2, 3 и 5, то если мы его уберем, число  $abc$  уменьшится, а на делимость чисел  $ab, bc, ac$  на числа  $2^a 3^b 5^c, 2^b 3^c 5^a, 2^c 3^a 5^b$  это не повлияет. Значит мы можем считать, что  $a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$   $b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$   $c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$ , где

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{N}_0$ . Тогда т.к.  $ab: 2^7$   $bc: 2^{13}$  и  $ac: 2^{14}$ :

$a_1 + b_1 \geq 7$   $b_1 + c_1 \geq 13$   $a_1 + c_1 \geq 14$ , сложив эти три неравенства и

поделив на 2 получаем, что  $a_1 + b_1 + c_1 \geq 14$ , равенство достигнуто

при  $a_1 = 4$   $b_1 = 3$   $c_1 = 10$ , значит  $abc: 2^{14}$ . Действуя аналогично

получаем:  $a_2 + b_2 \geq 11$ ;  $a_2 + c_2 \geq 11$ ;  $b_2 + c_2 \geq 15 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 20,5$ , т.к.  $a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{Z}$ :

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$ , равенство достигается при  $a_2 = 6$ ,  $b_2 = 5$ ,  $c_2 = 11 \Rightarrow abc: 3^{21}$

~~$a_3 + b_3 \geq 19$   $b_3 + c_3 \geq 19$   $a_3 + c_3 \geq 19 \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 28,5 \Rightarrow abc: 5^{28}$~~

достигается при  $a_3 = 20$   $c_3 = 23 \Rightarrow abc: 5^{43}$

достигается при  $a_3 = 20$   $c_3 = 23 \Rightarrow abc: 5^{43}$

Значит  $abc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{43}$ , т.к.  $abc \in \mathbb{N}$  наименьшее

значение  $abc$  равно  $2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{43}$

Ответ:  $2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{43}$

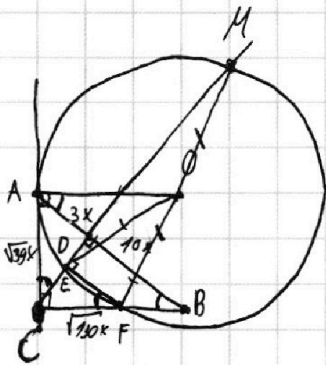
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



т.к.  $(CD) \perp (AB)$  и  $(EF) \parallel (AB)$ :  $(CD) \perp (EF)$  и

$$\angle CEF = 90^\circ$$

т.к.  $(DB) \parallel (EF)$ :  $\angle ABF = \angle DFC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CDB$  по двум углам

Пусть  $O$  - центр окружности, тогда  $(OA) \perp (CA)$ , т.к.  $A$  - т. касания, а значит  $\angle BCA + \angle CAO = 180^\circ \Rightarrow (OA) \parallel (CB)$ , тогда  $\angle OAB = \angle ABC$ . Из прямоугольного  $\triangle CDA \sim \triangle ACB$  по двум углам.  
т.к.  $\angle C = 180^\circ$   $\triangle ACB \sim \triangle ADB$  по двум углам.

Если  $|AB| = 13x$ , то  $|DB| = \frac{13}{13} = 10x$ , а значит  $|AD| = 13x - 10x = 3x \Rightarrow$

т.к.  $[CD]$  - высота прямоугольного  $\triangle$ -ка,  $|CD| = \sqrt{|AD| \cdot |DB|} = \sqrt{30}x$

Из прямоугольных  $\triangle$ -ков  $ADC$  и  $CDA$  получаем:

$$|CB| = \sqrt{30x^2 + 100x^2} = \sqrt{130}x \quad |AC| = \sqrt{30x^2 + 9x^2} = \sqrt{39}x.$$

Если мы проведем  $[CD]$  до пересечения с окружностью в точке  $M$ , то  $\triangle MEF$  окажется прямоугольным  $\Rightarrow [FM]$  - диаметр.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$  по определению аркосинуса означает:

$$\begin{cases} \cos(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}) = \sin x \\ (\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}) \in [0; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sin(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}) = \sin x \\ (\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}) \in [0; 5\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin(\frac{4\pi}{5} + \frac{x}{5}) = 0 \\ x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{4\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\frac{x + \frac{4\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}}{2}) \cdot \cos(\frac{x - \frac{4\pi}{5} - \frac{4\pi}{5}}{2}) = 0 \\ x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{4\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\frac{3x}{5} + \frac{2\pi}{5}) \cdot \cos(\frac{2x}{5} - \frac{2\pi}{5}) = 0 \\ x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{4\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin(\frac{3x}{5} + \frac{2\pi}{5}) = 0 \\ \cos(\frac{2x}{5} - \frac{2\pi}{5}) = 0 \\ x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{4\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{5} + \frac{2\pi}{5} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{2x}{5} - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{4\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 5\pi n - 2\pi, n \in \mathbb{Z} \\ 2x = 5\pi n + \pi, n \in \mathbb{Z} \\ x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{4\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}\pi n - \frac{2\pi}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5}{2}\pi n + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{4\pi}{2}] \end{cases}$$

Если  $x = \frac{5}{3}\pi n - \frac{2\pi}{3}$ :

$$-\frac{3\pi}{2} < \frac{5}{3}\pi n - \frac{2\pi}{3} < \frac{4\pi}{2}$$

$$-9\pi < 10\pi n - 4\pi < 24\pi$$

$$0 < 10n + 4 < 90$$

$$-4 < 10n < 25$$

$$-\frac{4}{10} < n < \frac{25}{10}$$

$n = 0$  или  $n = 1$  или  $n = 2$  т.к.  $n \in \mathbb{Z}$

Значит:

$$x = \frac{2\pi}{3} \text{ или } x = \frac{5\pi}{3} \text{ или } x = 3\pi$$

Ответ:  ~~$\frac{2\pi}{3}$~~ ;  $\frac{2\pi}{3}$ ;  ~~$\frac{5\pi}{3}$~~ ;  $\frac{5\pi}{3}$ ;  ~~$3\pi$~~ ;  $\frac{8\pi}{3}$

Если  $x = \frac{5}{2}\pi n + \frac{\pi}{2}$ :

$$-\frac{3\pi}{2} < \frac{5}{2}\pi n + \frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{2}$$

~~$-\frac{3\pi}{2} < \frac{5}{2}\pi n + \frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{2}$~~

$$-3\pi < 5\pi n + \pi < 4\pi$$

$$-4,5 < 5n < 3,5$$

$$-1,5 < n < 0,5$$

$n = -1$  или  $n = 0$ , т.к.  $n \in \mathbb{Z}$

Значит:

$$x = \frac{9\pi}{4} \text{ или } x = -\frac{\pi}{4}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

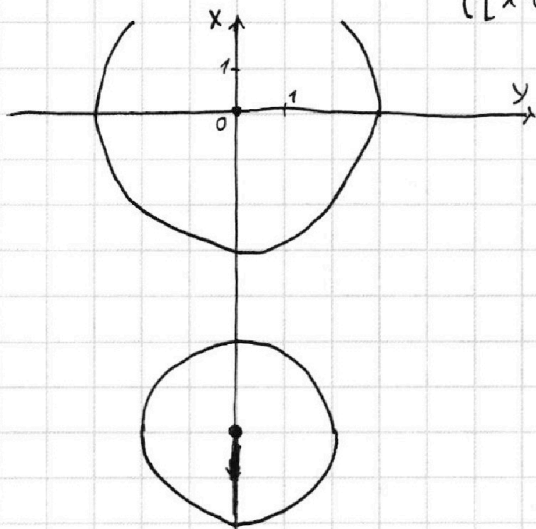
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ x^2+14x+y^2-4=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3ay+7b \\ \begin{cases} (x+7)^2+y^2=2^2 \\ x^2+y^2=3^2 \end{cases} \end{cases}$$



Эта система задает две окружности с центрами  $(0,0)$  и  $(0,-7)$  и радиусами 3 и 2 соответственно, которые прямая  $x=-3ay+7b$  для выполнения условия задачи должна пересекать в четырех точках.

Примечание:  $x$  сейчас - это ось абсцисс, а  $y$  - ось ординат, потому что координаты точки задаются, как  $(y,x)$

Для того расстояния от центра каждой из окружностей до прямой  $x+3ay-7b=0$  должны быть меньше их радиусов. Именно тогда прямая пересечет каждую из окружностей в двух точках. Так как расстояние от точки  $(x_1, y_1)$  до прямой  $Ax+By+C=0$  выражается формулой:

$$\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

можем сказать, что:

$$\begin{cases} \frac{|1 \cdot 0 + 3a \cdot 0 - 7b|}{\sqrt{1^2 + 9a^2}} < 3 \\ \frac{|1 \cdot 0 - 3a \cdot 7 - 7b|}{\sqrt{1^2 + 9a^2}} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |7b| < 3\sqrt{1+9a^2} \\ |7(3a+b)| < 2\sqrt{1+9a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| < \frac{3}{7}\sqrt{1+9a^2} \\ |3a+b| < \frac{2}{7}\sqrt{1+9a^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 < \frac{81a^2+9}{49} \\ 9a^2+6ab+b^2 < \frac{36a^2+4}{49} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49b^2 < 81a^2+9 \\ a^2 \cdot 9 \cdot 49 + 6 \cdot 49ab + 49b^2 - 36a^2 < 4 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} be \\ 405a^2 + 294ab + 649b^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \in \left(-\frac{3}{4}\sqrt{a^2 \cdot 9 + 1}, \frac{3}{4}\sqrt{a^2 \cdot 9 + 1}\right) \\ 3a + b < \frac{2}{4}\sqrt{a^2 \cdot 9 + 1} \\ 3a + b > -\frac{2}{4}\sqrt{a^2 \cdot 9 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \in \left(-\frac{3}{4}\sqrt{a^2 \cdot 9 + 1}, \frac{3}{4}\sqrt{a^2 \cdot 9 + 1}\right) \\ 3a < \frac{5}{4}\sqrt{a^2 \cdot 9 + 1} \\ 3a > -\frac{5}{4}\sqrt{a^2 \cdot 9 + 1} \end{cases}$$

П.к. нас интересует число  $a$ , для которого существует нужное число  $b$  и число  $b$  всегда определено от  $a$ , условие на  $b$  можно отбросить.

$$\begin{cases} 3a < \frac{5}{4}\sqrt{a^2 \cdot 9 + 1} \\ 3a > -\frac{5}{4}\sqrt{a^2 \cdot 9 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow 9a^2 < \frac{25}{49} \cdot 9a^2 + \frac{25}{49} \Leftrightarrow \frac{24}{49} \cdot 9a^2 < \frac{25}{49} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 216a^2 < 25 \Leftrightarrow a^2 < \frac{25}{216} \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{5}{6\sqrt{6}}, \frac{5}{6\sqrt{6}}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{|1 \cdot 0 + 3a \cdot 0 - 7b|}{\sqrt{9a^2 + 1}} < 3 \\ \frac{|1 \cdot 0 + 3a \cdot 0 - 7b|}{\sqrt{9a^2 + 1}} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 7|b| < 3\sqrt{9a^2 + 1} \\ 7|b+1| < 2\sqrt{9a^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49b^2 < 81a^2 + 9 \\ 49b^2 + 98b + 49 < 36a^2 + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \in \left(-\frac{3}{4}\sqrt{9a^2 + 1}, \frac{3}{4}\sqrt{9a^2 + 1}\right) \\ 7b + 1 < \frac{2}{4}\sqrt{9a^2 + 1} \\ 7b + 1 > -\frac{2}{4}\sqrt{9a^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in \left(-\frac{3}{4}\sqrt{9a^2 + 1}, \frac{3}{4}\sqrt{9a^2 + 1}\right) \\ b < \frac{2}{4}\sqrt{9a^2 + 1} - 1 \\ b > -\frac{2}{4}\sqrt{9a^2 + 1} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \in \left(-\frac{3}{4}\sqrt{9a^2 + 1}, \frac{3}{4}\sqrt{9a^2 + 1}\right) \\ \frac{3}{4}\sqrt{9a^2 + 1} > -\frac{2}{4}\sqrt{9a^2 + 1} - 1 \\ -\frac{3}{4}\sqrt{9a^2 + 1} < \frac{2}{4}\sqrt{9a^2 + 1} - 1 \end{cases}$$

П.к. нас интересует число  $a$ , для которого существует нужное число  $b$  и число  $b$  всегда определено от  $a$ , условие на  $b$  можно отбросить.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит:

*всегда верно т.к. корень неотрицателен*

$$\begin{cases} \frac{5}{4} \sqrt{9a^2+1} > -1 \\ \frac{5}{4} \sqrt{a^2+1} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} \sqrt{a^2+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{25}{16}(a^2+1) > 1 \Leftrightarrow 25a^2 > -9 \Leftrightarrow a^2 > -\frac{9}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \left( -\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{5} \right) \cup \left( \frac{2\sqrt{6}}{5}; +\infty \right)$$

$$\text{Ответ: } \left( -\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{5} \right) \cup \left( \frac{2\sqrt{6}}{5}; +\infty \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_z^4(6x) - 2\log_{6x} z = \log_{36x^2} z^3 - 4 \\ \log_z^4 y + 6\log_y z = \log_{zy} z^5 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_z^4(6x) - \frac{2}{\log_z(6x)} = \frac{3}{2} \cdot \log_{6x} z - 4 \\ \log_z^4 y + \frac{6}{\log_z y} = \frac{5}{2} \log_y z - 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_z^4(6x) - \frac{2}{\log_z(6x)} = \frac{3}{2\log_z(6x)} - 4 \\ \log_z^4(y) + \frac{6}{\log_z y} = \frac{5}{2\log_z y} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_z^5(6x) + 4\log_z(6x) - \frac{4}{2} = 0 \\ \log_z^5(y) + 4\log_z^5(y) + \frac{4}{2} = 0 \end{cases}$$

Обозначив  $\log_z(6x)$  за  $a$ , а  $\log_z(y)$  за  $b$  и сложив первое уравнение с последним, мы получим:

$$a^5 + 4a + b^5 + 4b = 0$$

$$4(a+b) + (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = 0$$

$$(a+b)(4 + \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}a^4 - 2 \cdot \frac{1}{2}a^2ab + \frac{1}{2}(ab)^2 + \frac{1}{2}(ab)^2 - ab \cdot b \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + b^4) = 0$$

$$(a+b)(4 + \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}(a^2+ab)^2 + \frac{1}{2}(ab+b^2)^2 + \frac{1}{2}b^4) = 0, \text{ заметим, что число}$$

$4 + \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}(a^2+ab)^2 + \frac{1}{2}(ab+b^2)^2 + \frac{1}{2}b^4$  строго положительно, т.к.

является суммой положительного числа 4 и

четырёх неотрицательных чисел. Значит

$$(a+b) = 0 \Leftrightarrow \log_z(6x) + \log_z y = 0 \Leftrightarrow \log_z(6xy) = \log_z 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6xy = 1 \Leftrightarrow xy = \frac{1}{6}$$

Ответ:  $\frac{1}{6}$





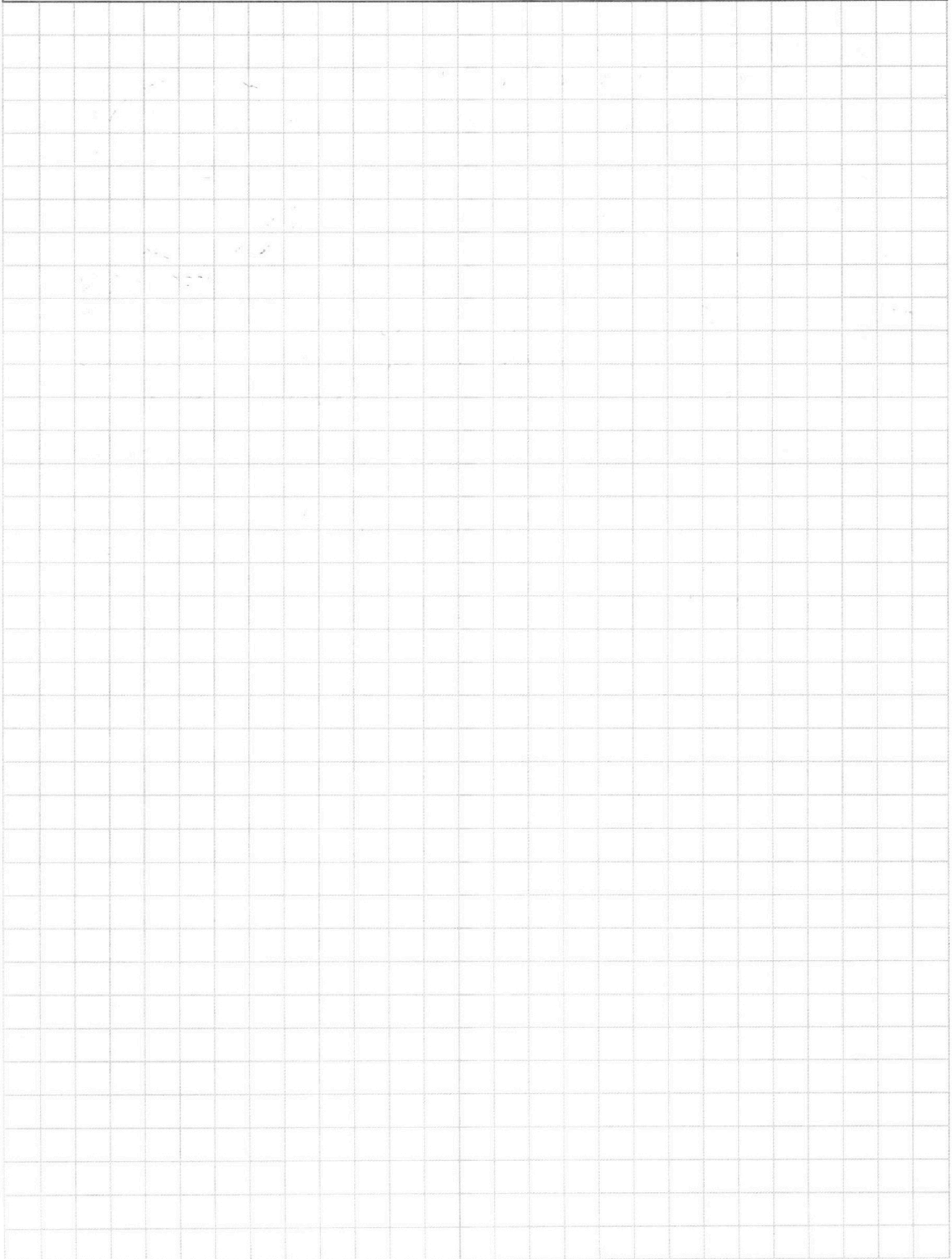
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Leftrightarrow \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right), \quad \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \in [0; \pi]$$

$$\begin{cases} \sin x = -\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10}\right) \\ x + \frac{3\pi}{2} \in [0; 5\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10}\right) = 0 \\ x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{4\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{2x}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = 0 \\ x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\frac{5\pi}{10} \quad \frac{6\pi}{10} \quad \frac{3\pi}{5}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1 \cdot 0 + 3a \cdot 0 - 7b}{\sqrt{1+9}} = \frac{|7b|}{2} < 3$$

$$26 + 14$$

$$43$$

$$7b < 6$$

$$|b| < \frac{6}{7}$$

$$-\frac{6}{7} < b < \frac{6}{7}$$

$$\frac{1 \cdot 0 - 21a - 7b}{\sqrt{1+9}} =$$

$$= \frac{|21a + b|}{2} < 2$$

$$|21a + b| < 4$$

$$-4 < 21a + b < 4$$

$$\frac{5}{216}$$

$$\frac{5\pi}{10} \quad \frac{5\pi}{10}$$

$$49 \cdot 9 = 490 - 49 = 441$$

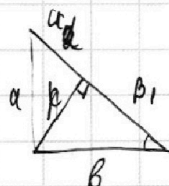
$$300 - 6$$

$$81a^2 + 9$$

$$49b^2 < 81a^2 + 9$$

$$\frac{21a}{\sqrt{9a^2+1}}$$

$$\frac{44+2a}{\sqrt{9a^2+1}}$$



$$30x^2 + 9x^2$$

$$n = b_1 + 92 = \frac{b_1 a_1}{h}$$

$$49(9a^2 + 81a^2 + b^2) < 36a^2 + 49$$

$$b \in \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^2+9+1}; \frac{3}{2}\sqrt{a^2+9+1}\right)$$

$$3a + b <$$

$$4,5$$

$$24 - 9$$

$$-240$$

$$246$$

$$-1$$

$$\frac{4\pi}{10}$$

$$+ \frac{5\pi}{10} = \frac{9\pi}{10}$$

$$\frac{10\pi}{3} - \frac{2\pi}{2}$$

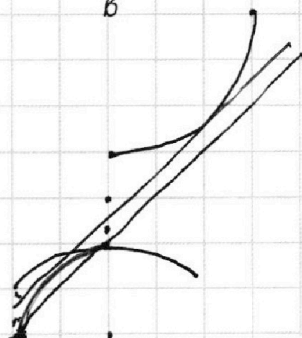
$$(-4; 0)$$

$$(0; 0)$$

$$4,5\pi$$

$$2x - 2\pi = 2,5\pi + 4\pi n$$

$$4,5\pi$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}$   
 $b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}$   
 $c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$

$a^5 + b^5 + 4(a+b) = 0$   
 $a^5 + b^5 = -4(a+b)$   
 $\frac{a^5 + b^5}{-b^4 \cdot a^3} = \frac{-4(a+b)}{a^4 + b^4}$

$a_2 + b_2 \geq 4$   
 $b_2 + c_2 \geq 13$   
 $a_2 + c_2 \geq 14$   
 $2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 34$

$a_1 = 4$   
 $b_2 = 5$   
 $c_2 = 10$

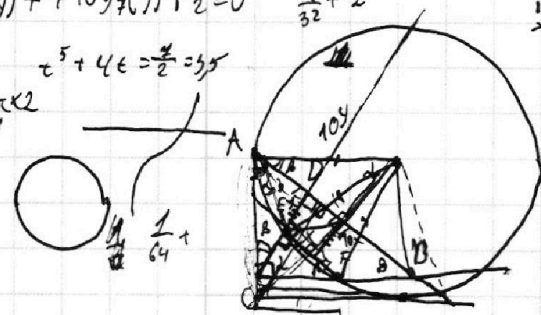
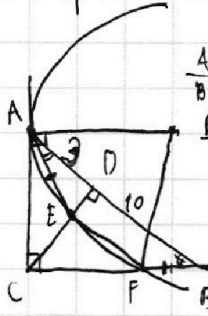
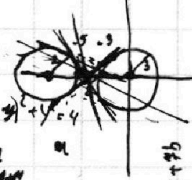
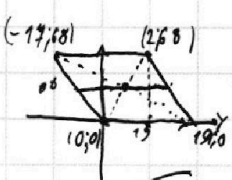
$\log_4 y = \frac{6}{\log_2 y}$   
 $\log_4^4(6x) = \frac{15}{2 \log_2(6x)} - 4$   
 $\log_4^4(y) + \frac{6}{\log_2 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 y} - 4$

$2 \sin(x + \frac{\pi}{2}) \cdot \sin(\pi) = 0$   
 $\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$   
 $\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin(x)$   
 $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$   
 $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = 0$   
 $(a^2 - ab)^2$

$x + 3ay - 2b = 0$   
 $\log_4^4(6x) - 2 \log_4 x = \log_4 x^2 - 4$   
 $\log_4^4(6x) - \frac{2}{\log_2(6x)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_2(6x)} - 4$   
 $\log_4^4 y + \frac{6}{\log_2 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 y} - 4$

$\log_4^5(6x) + 4 \log_4(6x) - \frac{7}{2} = 0$   
 $\log_4^5(y) + 4 \log_4(y) + \frac{1}{2} = 0$

$\log_4^5 y \cdot \log_4 y = \log_4 y \cdot \log_4^4 y = \log_4 y \cdot \log_4^3 y = \frac{7}{2}$   
 $\log_4^4 y + 1 = \frac{7}{2}$



$4x_2 + y_2 = 40 + 4x_1 + y_1$   
 $\log_4^5(y) + \log_4^5(6x) + 4(\log_4(6xy))$