



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(N) Дано:  $a, b, c$  - натуральные числа:  $ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$ ;  $bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$ ;  $ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$ .

Согласно определению делимости запишем ( $a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow x, y, z \in \mathbb{N}$ ), где  $x, y, z$  - это

$$ab = x \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc = y \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ca = z \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$\left. \begin{array}{l} a, b, c \in \mathbb{N} \\ ab = x \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \\ bc = y \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \\ ca = z \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \end{array} \right\} \Rightarrow abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} = \sqrt{xyz} \cdot 2^{\frac{8+12+14}{2}} \cdot 3^{\frac{14+20+21}{2}} \cdot 5^{\frac{12+17+39}{2}} =$$

$$= \sqrt{xyz} \cdot 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} = \sqrt{3xyz} \cdot 2^{18} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34}$$

$3xyz$  - полный квадрат, Примем  $3xyz : 3 \Rightarrow 3xyz : 9$  (это полн. кв., т.к. числа  $a, b, c$  - натуральные). Итак  $\min(3xyz) = 9$ , т.е.  $\sqrt{xyz} \in \mathbb{Z}$ )

Оценка  $abc$ :  $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

$ac : 5^{39} \Rightarrow abc : 5^{39}$ ,  $abc \geq 2^{18} \cdot 2^{28} \cdot 5^{39}$   
т.к.  $a, b, c$  - натур

Пример:

$$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^{12}$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22}$$

$$ab = 2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{17} : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{22} : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$\left. \begin{array}{l} ab = 2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{17} : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \\ bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{22} : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \\ ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \end{array} \right\} \Rightarrow a, b, c \text{ удовл. усл.}$$

$$abc = 5^{18} \cdot 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

$$\Rightarrow \min(abc) = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

Ответ.  $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$ .

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

a?

$$\sin^2 ax + 1 = \cos x$$

уравнение равно 1 переменной.

$$(98 - 100 + 100z - z^2h + z^2x)(1 - z^2h + z^2x)$$

$$\sin^2 x +$$

$$\sin^2 ax + 1 = \cos x$$

$$0 = 8h + 4z - x0$$

$$= 8z - x0$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 12 \\ \hline 30 \\ + 30 \\ \hline 60 \\ + 15 \\ \hline 75 \\ \hline 150 \\ \hline 28 - 20 = 8 \\ 8 - 20 = -12 \\ 98 - 15 = 83 \end{array}$$

$$22 \quad 39-17 \quad 22$$

$$t1 = 39$$

$$\begin{array}{r} 150 \\ 12 \\ \hline 162 \\ + 150 \\ \hline 312 \\ \hline 010 \\ x+y+z \geq 34 \end{array}$$

$$t1: t1$$

$$(z+h+x) \text{ ум}$$

$$z+x \geq 39$$

$$t1 \geq z+h$$

$$x+y \geq 812$$

$$\frac{z}{56} = \frac{z}{15+20+17} = \frac{z}{52}$$

$$\begin{array}{l} 21 = z+x \\ 20 = y+z \\ 15 = x+y \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 20 \\ 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} z+x = 35 \\ y+z \geq 17 \\ x+y = 12 \end{array}$$

$$65+t1 \geq z+h+x$$

$$z+x \geq 39$$

$$y+z \geq 17$$

$$x+y \geq 12$$

$$\begin{array}{l} z+x = 39 \\ 6+y+z = 5 \end{array}$$

$$467$$

$$\frac{z}{12+17+39} \geq x+y+z$$

$$z+x = 39$$

$$\begin{array}{l} 17+5 = 22 \\ 17+5+12 = 34 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 25 \\ 38 \\ 517 \end{array}$$

$$a = \frac{2}{148-12} = \frac{2}{136} = \frac{1}{68}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$30+29 = 59 \quad z-x = 5$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$\begin{array}{l} y+z = 17 \\ x+y = 12 \end{array}$$

$$\frac{z}{39+12+17}$$

$$2^8 \cdot 3^{15} \cdot 5^{12} = ab$$

$$\begin{array}{l} z+x = 39 \\ x+y = 12 \end{array}$$

$$2^8 \cdot 3^{14}$$

Если отмечено более одной задачей или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поля QR-кода недопустима!

1  2  3  4  5  6  7

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

На одной странице можно оформить только одну задачу.



МФТИ

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

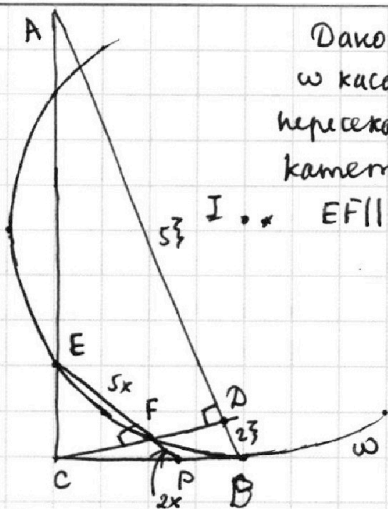
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2



Дано:  $\triangle ABC$  -  $\text{н.у.}$ ,  $AB$  - гипотенуза;  
 $\omega$  касается стороны  $BC$  в точке  $B$ ;  
 пересекает высоту  $CD$  в т.  $F$  и пересекает  
 катет  $AC$  в точке  $E$ .  
 $I \dots EF \parallel AB$ ;  $AD:DB = 5:2$ ; Найми:  $\frac{S_{ABC}}{S_{CFE}}$ .

Решение.  $\omega$  пересекает катет  $\Rightarrow$  центр  $I$  окружности  $\omega$  и точка  $A$  лежат по одну ст. от. отн.  $CB$ .  
 по свойству  $\parallel$ -линии касательных катетов.

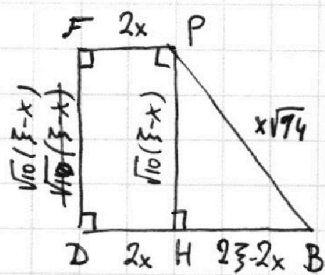
1)  $EF \parallel AB$ ,  $CD \perp AB \Rightarrow EF \perp CD \Rightarrow \angle CFE = 90^\circ$

2) Пусть  $EF \cap CB = P$ , по теореме о квадрате касательной для касат.  $PB$ , проведен. из т.  $P$  к окружности  $\omega$  имеем:  $PB = \sqrt{PF \cdot PE}$ .

3) Пусть  $AD = 5\xi$ ; Тогда по условию задаем  $DB = 2\xi$ .  $CD$  - высота  $\text{н.у.}$   $\triangle$ -ка, которая провед. к гипот.  $\text{н.у.}$   $\triangle CBA \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{5\xi \cdot 2\xi} = \sqrt{10}\xi$

4) В  $\triangle CFE$  и  $\triangle CDA$ :  $\angle CFE = \angle CDA = 90^\circ$ ;  $\angle ACD$  - о.д.ч.  $\xrightarrow{\text{по 2 прав. уг.}}$   $\triangle CFE \sim \triangle CDA \Rightarrow \frac{EF}{CF} = \frac{CA}{CD}$   
 В  $\triangle CFP$  и  $\triangle CDB$ :  $\angle CFP = \angle CDB = 90^\circ$ ;  $\angle PCB$  - о.д.ч.  $\xrightarrow{\text{по 2 прав. уг.}}$   $\triangle CFP \sim \triangle CDB \Rightarrow \frac{FP}{CF} = \frac{CB}{CD}$   
 Тогда  $\frac{EF}{AD} = \frac{FP}{DB} \Rightarrow$  если  $EF = 5x$ , то  $FP = \frac{2\xi}{5\xi} \cdot 5x = 2x \Rightarrow PB = \sqrt{PF \cdot PE} = \sqrt{2x \cdot 7x} = x\sqrt{14}$

5) Заметим, что  $CF$  - выс.  $\text{н.у.}$   $\triangle CFP$ , провед. к гип.  $\Rightarrow CF = \sqrt{EF \cdot FP} = x\sqrt{10}$   
 Заметим, что  $\triangle PFB$  -  $\text{н.у.}$   $\triangle$  трапец. ( $FP \parallel DB$ ), провед. в ней выс.  $PH$  к больш. осн. ( $\xi > x$  т.к.  $PE < AB$ )  $(DB)$ .  $FD = CD - CF = \sqrt{10}(\xi - x)$



Тогда  $\triangle PFB$  - прямоугольный по построению,

$$HB = DB - DH = DB - FP = 2\xi - 2x$$

$$PH = FD = \sqrt{10}(\xi - x), \triangle PHB - \text{н.у.} (\angle PHB = 90^\circ, \text{ т.к. } PH - \text{выс.}),$$

$$\Rightarrow \text{теор. Пифагора: } PB^2 = PH^2 + HB^2$$

$$14x^2 = 10(\xi^2 - 2\xi x + x^2) + 4(\xi^2 - 2\xi x + x^2)$$

$$14x^2 = 14(\xi - x)^2; \quad x^2 = (\xi - x)^2 \quad (x - \xi + x)(x + \xi - x) = 0$$

$$\xi(2x - \xi) = 0 \quad | : \xi \neq 0, \quad x = \frac{\xi}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \xi \sqrt{10} \cdot 7\xi$$

$$S_{CFE} = \frac{1}{2} CF \cdot EF = \frac{1}{2} x \sqrt{10} \cdot 5x$$

( $\angle CFE = 90^\circ$ )

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{7}{5} \left(\frac{\xi}{x}\right)^2 = \frac{28}{5}$$

Ответ:  $\frac{28}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



13) Решить уравнение:  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$$D(y) = [-1; 1]$$

1) Ф-я  $y = 10 \arcsin t$  является ограниченной ( $E(y) = [-10 \cdot \frac{\pi}{2}; 10 \cdot \frac{\pi}{2}]$ )  $\Rightarrow$  есть ограничения на  $x$ :  $-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$ ;  $-5\pi \leq 2x - \pi \leq 5\pi$ ;  $-4\pi \leq 2x \leq 6\pi$ ;  $-2\pi \leq x \leq 3\pi$ .

2) Преобразуем иск. уравнение:  $10 \arcsin(\cos x) + 2x = \pi$  и рассмотрим ф-ию  $f(x) = 10 \arcsin(\cos x) + 2x$ ;  $D(f) = \mathbb{R}$  на отрезке  $[-2\pi; 3\pi]$  (Если  $x \notin [-2\pi; 3\pi]$ , уравнение точно не имеет реш. в силу пункта 1)

$$f'(x) = 2 + 10 \frac{-\sin x}{|\sin x|}, \text{ м.к. } \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{1}{|\sin x|} = \frac{1}{\sin x}$$

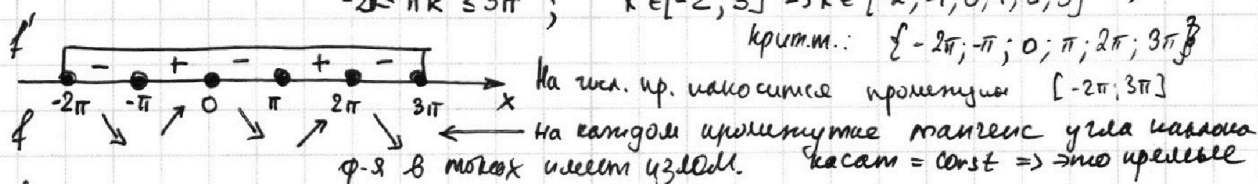
$$f'(x) = \begin{cases} 2-10, & \text{если } \sin x > 0 \\ 2+10, & \text{если } \sin x < 0 \end{cases} \quad f'(x) \neq 0; \quad f'(x) \text{ не оп. пр. } \sin x = 0; \quad x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{ \pi k, k \in \mathbb{Z} \}$$

Крит. точки на отрезке  $[-2\pi; 3\pi]$ :

$$-2\pi \leq \pi k \leq 3\pi; \quad k \in [-2; 3] \Rightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\} \Rightarrow$$

$$\text{крит.т.: } \{-2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi; 3\pi\}$$



$$f(2\pi) = 10(\arcsin(\cos(2\pi))) + (-4\pi) = 10 \cdot (\pi/2) - 4\pi = \pi$$

$$f(-\pi) = 10(\arcsin(\cos(-\pi))) - 2\pi = -5\pi - 2\pi = -7\pi$$

$$f(0) = 10 \arcsin(\cos 0) - 0 = 5\pi; \quad f(2\pi) = 10 \arcsin(\cos 2\pi) + 4\pi = 9\pi$$

$$f(\pi) = 10 \arcsin(\cos \pi) + 2\pi = -3\pi; \quad f(3\pi) = 10 \arcsin(\cos 3\pi) + 6\pi = \pi$$

На каждом из промежутков  $\pi$ -ым касательная является касательной

Графики ф-ий  $y = f(x)$  и  $y = \pi$  имеют 5 точек пересечения (из монотонности), и решение будет равно 5

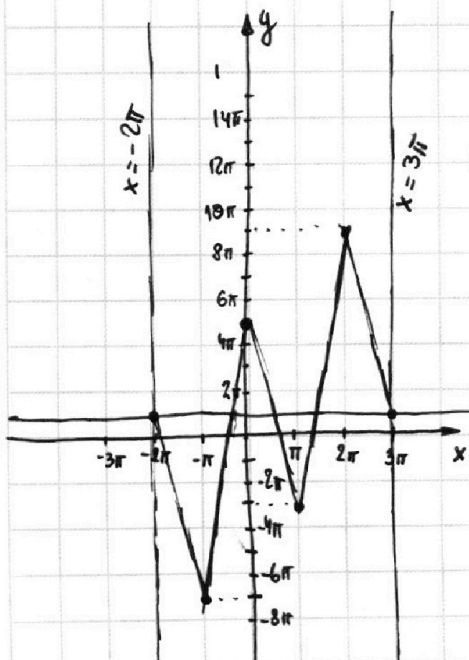
$$f(3\pi) = f(-2\pi) = \pi \rightarrow \text{это реш.}$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 10 \arcsin(\cos(\frac{\pi}{2})) + 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$f(\frac{4\pi}{3}) = 10 \arcsin(\cos(\frac{4\pi}{3})) + \frac{8\pi}{3} = 10 \arcsin(-\frac{1}{2}) + \frac{8\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} = \pi$$

$$f(-\frac{\pi}{3}) = 10 \arcsin(\cos(-\frac{\pi}{3})) - \frac{2\pi}{3} = 10 \arcsin(\frac{1}{2}) - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \pi$$

$$f(\frac{\pi}{3}) = \pi. \quad \text{Ответ: } \{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

а-?, найдется значение параметра  $b$ , при котором система  

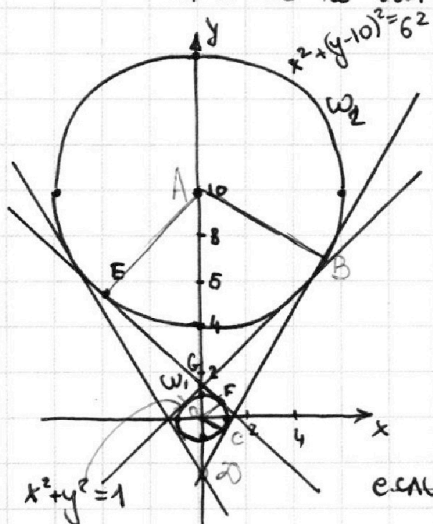
$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$
 имеет ровно 4 решения.

Первое уравнение системы:  $y = \frac{ax + 4b}{3}$  - линейная ф-я, пр-к - прямая.

Эта ф-я задает ли-во прямую с угловым коэф  $a$  (кроме вертикальной прямой), проходящую через точку  $(0; \frac{4b}{3})$  (если  $x=0$ , то  $y = \frac{4b}{3}$ )

2-ое уравнение:  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 36 \end{cases}$  2 окружн.;  $\omega_1(O(0;0); R_1=1)$   
 равносильно  $\omega_2(A(0;10); R_2=6)$   
 сверху.

$\omega_1$  и  $\omega_2$  не им. общ. точек, потому что  $AO = 10 > R_1 + R_2$



Проведем 2 общие касательные  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , они пересекаются в точке на линии центров окружностей (точка D) и общие внешние касательные этих двух окр.

FE - одна из внутр. касат.,  $EF \cap AD = G$

$d_y; d_y$  - ординаты точек G и D соотв.

если  $\frac{4b}{3} \leq d_y$ , то это зн. подходит усл.

Прямая с окр. пересекается не более чем в двух точках  $\Rightarrow$  каждая для того чтобы было равно 4 реш.

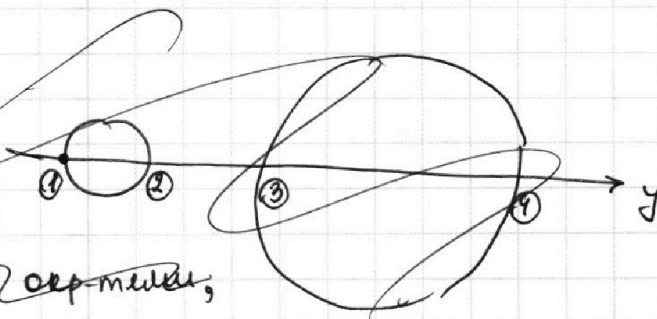
нужно, чтобы прямая, заданная  $y = \frac{ax + 4b}{3}$  пересекала каждую окр. дважды.

если  $d \leq \frac{4b}{3}$

возьмем  $a=10$ , и заметим, что

$y = \frac{10x + 4b}{3}$  обязательно

будет иметь 4 т. перес с окр. т.к., потому что



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



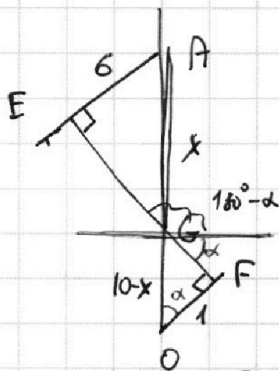
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если прямая  $y = \frac{ax+4b}{3}$  при некоторых  $a, b$  пересекает оар.  $\omega_1$ , то (6 2 м.), то она обязательно пересечет и оар.  $\omega_2$  в двух точках  
(N5) правильно.

Пусть  $-k_1$  - угл. коэф. нормали прямой EF. Усл. задачи выполни, если  $a \in [-k_1; k_1]$



$AE \perp EF$  и  $FO \perp EF$  как радиусы, перпенд. в т.кас.

$\triangle AEG \sim \triangle OFG$  м.к.  $\angle E = \angle F = 90^\circ$ ,  $\angle AGE = \angle OFG$  (как верт.)

$$\text{Тогда: } \frac{x}{6} = \frac{10-x}{1}; \quad x = 60 - 6x; \quad x = \frac{60}{7}$$

$$10 - x = \frac{10}{7}$$

$$\sin \alpha \cdot \tan \alpha \quad \sin \alpha = \frac{GF}{OF} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{10-x}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\tan \alpha = \frac{GF}{OF} = \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow k_1 = -\tan \alpha = -\frac{\sqrt{51}}{7}$$

Ответ:  $[-\frac{\sqrt{51}}{7}; \frac{\sqrt{51}}{7}]$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$N5 \left\{ \begin{aligned} \log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 &= \log_{8x^3} 625 - 3 \\ \log_5^4 y + 4 \log_y 5 &= \log_{y^3} 0,2 - 3 \end{aligned} \right.$$

(\*)

ОДЗ:

- $2x > 0$
- $2x \neq 1$
- $8x^3 > 0$  - следует из усл.  $2x > 0$
- $8x^3 \neq 1$  - следует из усл.  $2x \neq 1$
- $y > 0$
- $y \neq 1$
- $y^3 > 0$  - следует из усл.  $y > 0$
- $y^3 \neq 1$  - следует из усл.  $y \neq 1$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty) \\ y \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$

Пусть  $a = \log_5(2x) \Rightarrow \frac{1}{a} = \log_{2x}(5)$ ;  $\log_{8x^3}(625) = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 = \frac{4}{3a}$

$b = \log_5(y)$ ;  $\log_y 5 = \frac{1}{b}$ ;  $\log_{y^3} 0,2 = -\frac{1}{3} \log_y 5 = -\frac{1}{3b}$ ;  $a, b > 0$ ;  $xy = 5^a \cdot 5^b = 5^{a+b}$

Система примет вид:

$$\begin{cases} a^4 - 3 \cdot \frac{1}{a} = \frac{4}{3a} - 3 & (1) \\ b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим для начала уравнение (2).

$$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \quad | \cdot 3b > 0$$

$$b^5 + 12 = -1 - 9b$$

$$b^5 + 9b + 13 = 0 \quad \text{т.е. уравнение } b^5 + 9b + 13 = 0 \text{ не имеет решений}$$

Ну и получается, что не существует такого  $b^5$ , чтобы равенство (2) выполнялось.  $\Rightarrow$  у системы (\*) решений нет вообще.

Ответ: таких пар  $x, y$ , удовлетворяющих одновременно обоим равенствам не существует.

$$\begin{cases} b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \\ a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0 \quad | 3b \neq 0 \\ a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \quad | 3a \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^4 - a^4 + \frac{13}{3}(a+b) = 0; \quad (b^2 - a^2)(b^2 + a^2) + \frac{13}{3}(a+b) \frac{1}{ab} = 0;$$

$$(a+b)((b-a)(a^2 + b^2) + \frac{13}{3a}) = 0; \quad \begin{cases} f(a+b) = 0 \\ g((b-a)(a^2 + b^2)) = -\frac{13}{3ab} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5. Продолжение (условия на  $a, b$ :  $ab \neq 0$ )

$$\begin{cases} a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \\ b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1) a^4 + b^4 + 6 - \frac{13}{3} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[ \frac{b-a}{ab} > 0 \right] \mid \cdot (a^2 b^2) > 0 \Rightarrow \boxed{ba(b-a) > 0} \\ \text{м.к. } ab \neq 0 \end{cases}$$

$$2) a^4 - b^4 - \frac{13}{3} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0; (a-b)(a+b)(a^2+b^2) - \frac{13}{3} \cdot \frac{a+b}{ab} = 0;$$

$$\frac{(a+b)}{ab} \left( \frac{13}{3} + (b-a)ab(a^2+b^2) \right) = 0 \Rightarrow \boxed{a+b=0} \text{ единств. случай.}$$

$> 0$  м.к.  $\frac{13}{3} > 0, a^2+b^2 > 0$  м.к.  $ab \neq 0, (ab \neq 0)$   
 $(b-a)(ab) > 0$

Найдутся ли такие  $a, b$ , что  $a+b=0$ ?

Р-и ур-ние  $\otimes$  при  $b \leq 0$ ; заменим обе части ур. на  $b \geq 0$

$$b^5 + \frac{13}{3}b \cdot \frac{1}{b} + 3b = 0; 3b^5 + 13 + 9b^2 = 0$$

$$f_1(b) = 3b^5; f_2(b) = 9b \text{ на } (-\infty; \infty); 13 = \text{const} \rightarrow f(b) = 3b^5 + 9b + 13 \text{ на } (-\infty; 0).$$

$$\text{Пример } f(-2) = -3 \cdot 32 + 13 - 9 \cdot 2 < 0; f(4) = 13 - 9 - 3 > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  корень  $b_0$  есть у ур-тия на  $(-2; -1)$  т.к.  $f(x)$  возр. и непрерывна на этом от.

Т.е. нашлось  $b_0$ :  $b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0$ . Возьмем  $a_0 = -b_0$  и заметим, что ур-ние  $a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0$  становится тождеством при  $a = -b_0$ :  $b_0^4 + \frac{13}{3b_0} + 3 = 0$

Т.е.  $a+b=0$  возможно! Других вариантов, к сожалению, нет.

$$xy = 5^{a+b} = 5^0 = 1.$$

**Ответ: 1**

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

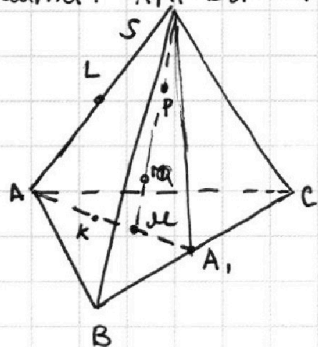


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



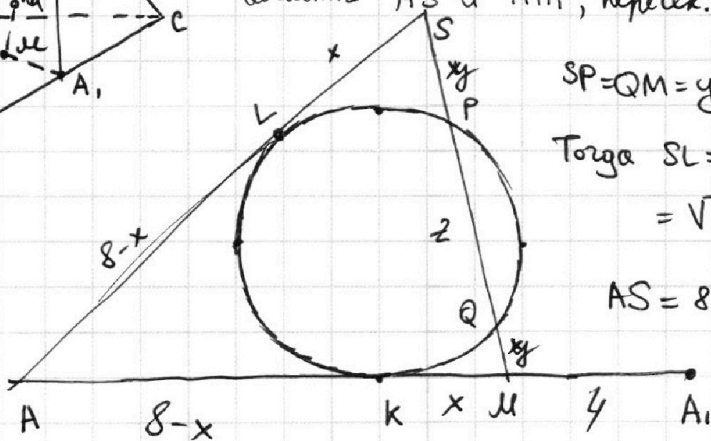
(N7) Дано:  $SABC$  - треугольная пирамида;  $AA_1, BB_1, CC_1$  - медианы  $\triangle ABC$ ;  $M$  - т. пересечения медиан  $\triangle ABC$ ;  $\Omega$  кас.  $[AS]$  в т.  $L$ ;  $\Omega$  кас.  $(ABC) = k$ ;  $k \in AM$ ;  $\Omega \cap [SM] = P, Q$ ;  $SP = MQ$ ;  $S_{ABC} = 100$ ;  $SA = BC = 16$

а) Найти:  $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$



Пусть:  $[SMQ]$  содержит  $P$  для определенности

$P$ -м сечение  $\Omega$  т.т.т.  $AKS$ . Это осп, которая касается  $AS$  и  $AA_1$ , пересек.  $SM$  в  $P$  и  $Q$



$$SP = QM = y; PQ = z$$

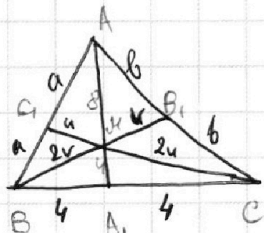
$$\begin{aligned} \text{Тогда } SL &= \sqrt{SP \cdot SQ} = \sqrt{y(y+z)} = \\ &= \sqrt{MQ \cdot MP} = kM, \end{aligned}$$

$$AS = 8 \rightarrow AL = 8 - x = Ak \text{ (осп. кас.)}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } AM &= \\ &= 8 - x + x = 8; \end{aligned}$$

$$MA_1 = \frac{8}{2} = 4$$

(медианы  $\triangle$  дел. т. перес. пополам - вот и 2:1, считая от верш.)

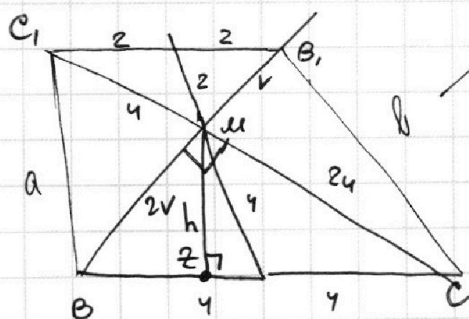


$$CM = u \Rightarrow MC = 2u;$$

$$BM = 2v \Rightarrow MB_1 = v$$

в  $\triangle$ -ке  $MBC$ :  $MA_1 = BA_1 = AC \Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$ ,

$$\text{Тогда по теор. Пифагора: } MB^2 + MC^2 = 4v^2 + 4u^2 = 8^2; u^2 + v^2 = 16$$



$$a = \sqrt{u^2 + 4v^2}; b = \sqrt{v^2 + 4u^2}$$

$$S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \text{ (медианы делят } \triangle \text{ на 6 равновеликих)}$$

$$\frac{1}{2} BM \cdot MC = \frac{100}{3}; \frac{200}{3} = 4uv \Rightarrow \begin{cases} uv = \frac{50}{3} \\ u^2 + v^2 = 16 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

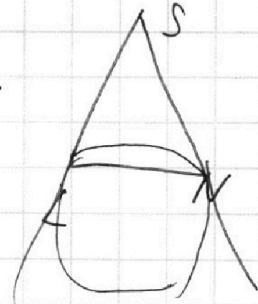
N7. Продолжение.

$$\begin{cases} uv = \frac{50}{3} \\ u^2 + 2uv + v^2 - \frac{100}{3} = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} uv = \frac{50}{3} \\ (u+v)^2 = \frac{148}{3} \end{cases} \quad \begin{matrix} u+v \\ u>0, v>0 \end{matrix}$$

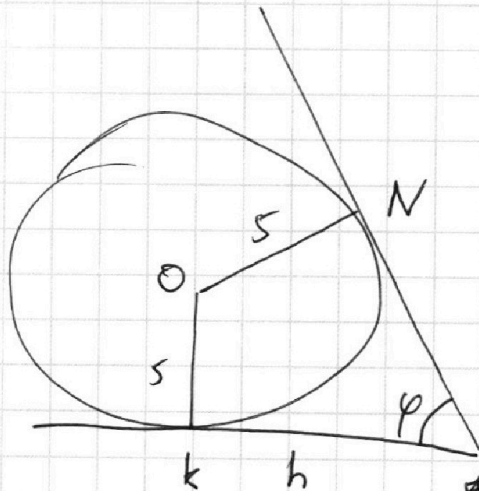
$$2uv = 150$$

Произв. грани пирамиды:  $2uv \cdot 12 = 150 \cdot 12 = 1800$ .

б) Оар. кас. грани  $\Rightarrow SN = SL = 4 \Rightarrow x = 4$ .



Р-м сечение шар сферой пл-тью  $KMNKZ$



,  $(ZKN) \perp$  ребру BC по персп.

Тогда O лежит в этой пл.

$$kz = kz = h =$$

$$= \frac{2u \cdot 2v}{BC} = \frac{200}{8} =$$

$$= \frac{50}{3 \cdot 2} = \frac{25}{3} \text{ (выс. н/у } \triangle BCM)$$

(выс.  $\frac{5}{3}$   $\triangle$ )  $\triangle BCM$

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{OK}{kz} = \frac{5}{\frac{25}{3}} = \frac{3}{5}$$

cos Тогда  $\varphi = 2 \arctg \frac{3}{5}$  — это и есть линейный угол верш. угла

Ответ: а) 1800

$$\text{б) } 2 \arctg \frac{3}{5}$$

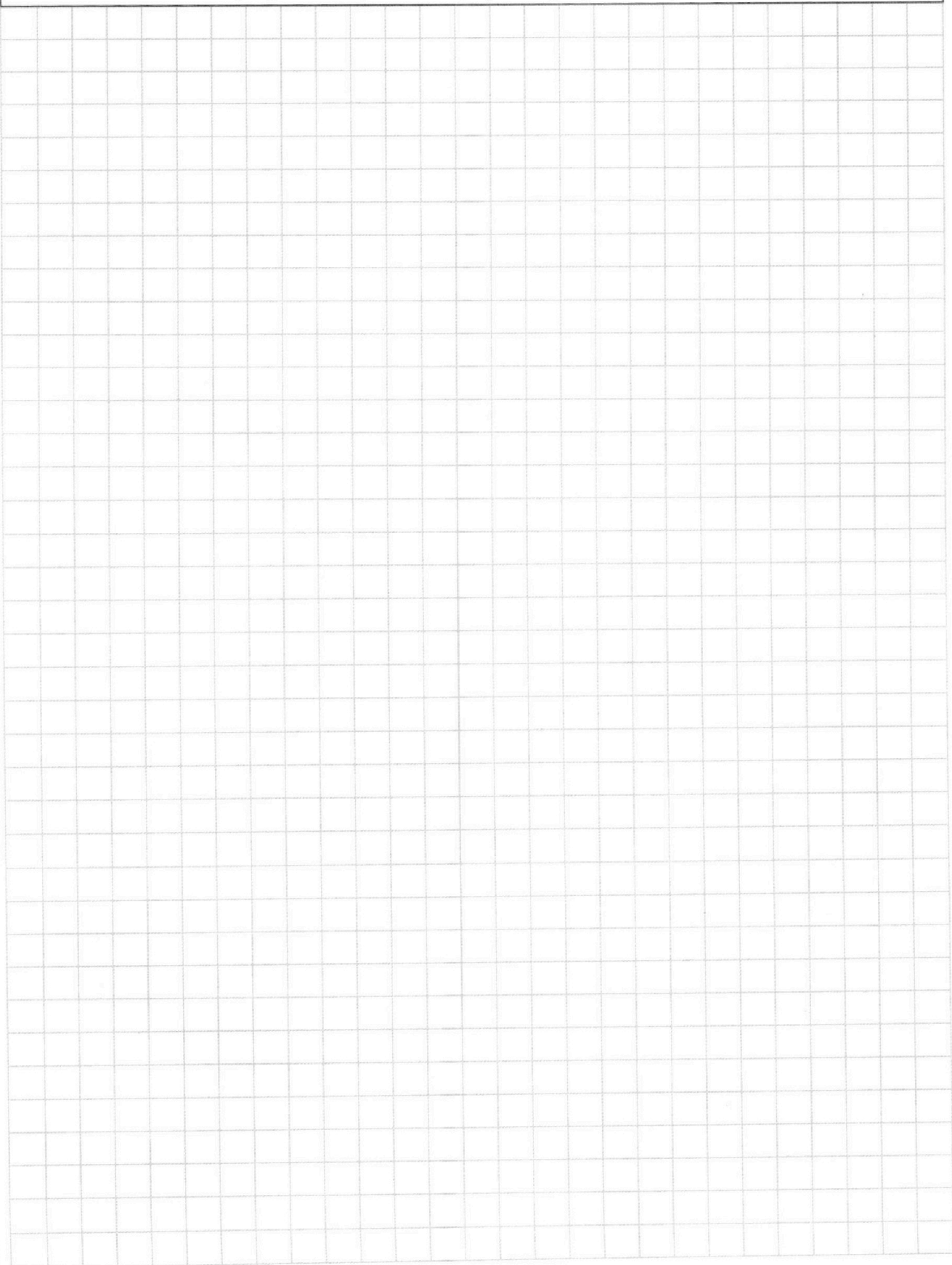


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.  
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



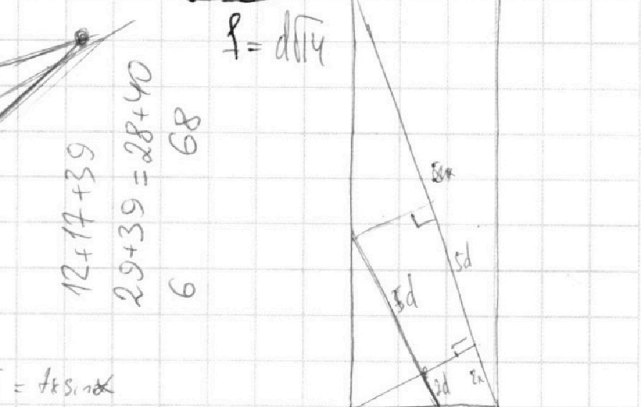
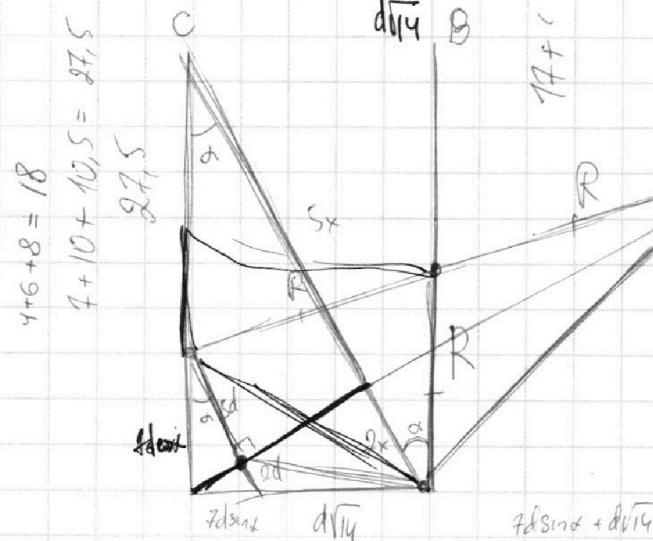
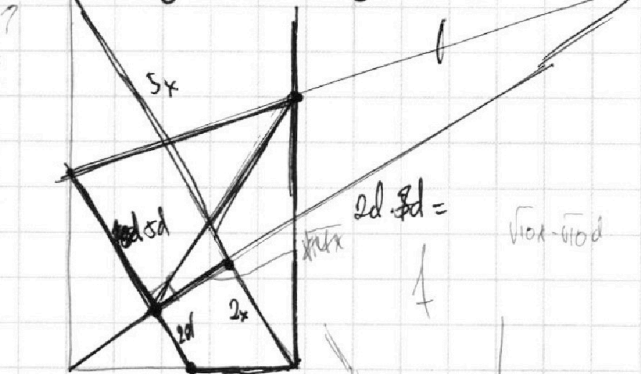
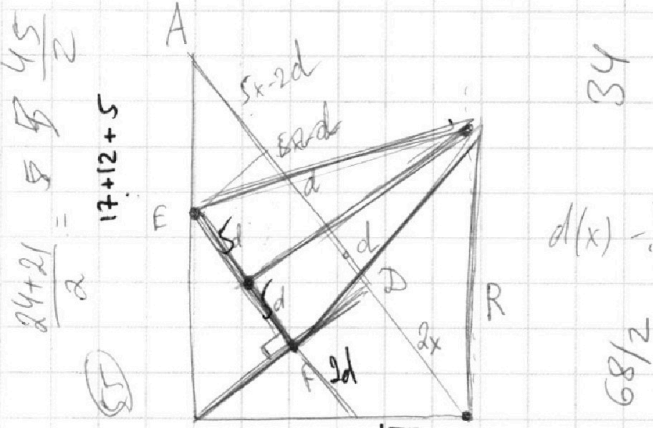
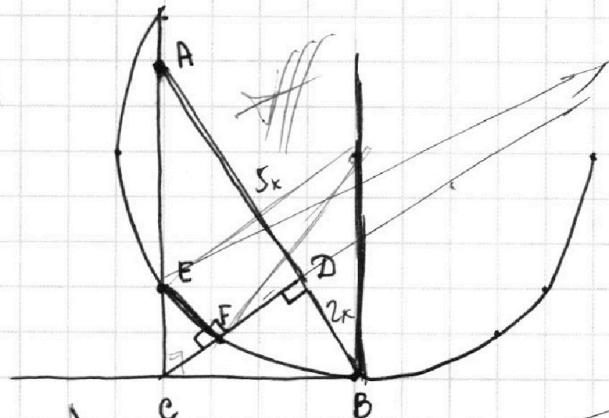
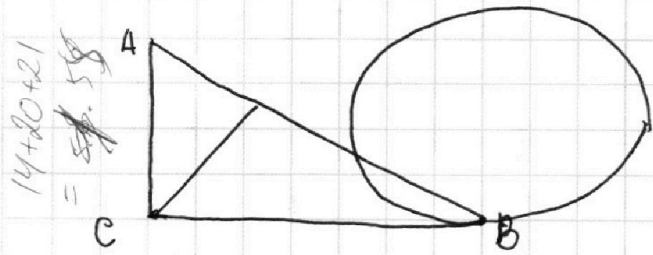
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$f \sin \alpha + d \sqrt{4} = f \sin \alpha$   
 $d(7 \sin \alpha + \sqrt{4}) = 7 \sin \alpha$

$ab = k \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$   
 $bc = n \cdot 2^{12} \cdot 3^{30} \cdot 5^{17}$   
 $ac = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$

$abc = \sqrt{knm} \cdot 2$

$\sqrt{knm} \cdot 2^{4+6+7} \cdot 3^{7+15+\frac{21}{2}}$

$ab = 2^8$   
 $bc = 2^{12}$   
 $ac = 2^{14}$

$a^2 \cdot 2^{12} = 2^8 \cdot 2^{14}$   
 $a^2 = 2^{(4+7-12)2}$   
 $a = 2^5$

$(2x-2d)^2 + (\sqrt{10x}-\sqrt{10d})^2 = (d\sqrt{4})^2$   
 $4x^2+4d^2-4dx+10x^2+10d^2-2\sqrt{10}xd = 4d^2$   
 $= 14d^2$

$14x^2 - 24dx - 7d^2 = 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$  *вернее*

$\arcsin t: t \in [-1; 1]; \arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$-\pi \leq 10 \arcsin(\cos x) \leq 5\pi; -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi; -3\pi \leq -2x \leq 7\pi; x \in [-\frac{7\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$

$\cos x \quad 10 \quad 1 \leq \cos x \leq 1 \quad \cos x = \sqrt{1 - \sin^2}$

$\arcsin(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2}; \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$

$f(x) = \arccos x; g(x) = \arcsin x; f(x) + g(x) = \frac{\pi}{2}$  если  $x \in [0; 1]$ .

если  $x \in (0; 1)$ , то  $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$   $\arcsin x = (\pi - \arccos x)$

$\arcsin x$

$\sin(\arcsin x) = \sin(\pi - \arccos x);$

если  $\cos x \in [0; 1]$ , то имеем систему уравнений  $\cos(\arccos x) = \cos(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)$

$\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) = \pi - 2x; \arccos(\cos x) + \frac{\pi}{2} = 2x$

$\arccos x + \frac{\pi}{2} - \pi = \arcsin x$

если  $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ :

$\arccos x \in -\frac{\pi}{2};$

$5\pi + \arccos$

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi; -6\pi \leq -2x \leq 4\pi; -2\pi \leq x \leq 3\pi$

если

$2x + 10 \arcsin(\cos x) = \pi$

$f(x)$

$\arcsin$

$\arcsin x$  *возрастает*

$\cos x$ . на графике

$2x + 10 \arcsin(\cos x) = \pi$

$f(x) = 2 + 10 \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \sin x =$

$= 2 + 10 \frac{|\sin x|}{\sin x}$

$f(x) = 2x + 10 \arcsin(\cos x)$

Узлом произв.



Крит. точки  $\sin x = 0$ :  $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$



Значения в крит. т:

4

$y = 12\pi$

$12 \cdot \pi - 15\pi =$

$y = 12x - 15\pi \quad 24 - 15 = 29 - 20 = 9$

$y = kx + b$

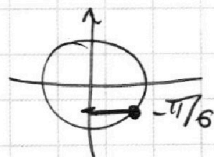
$\begin{cases} -3\pi = k\pi + b \\ 9\pi = 2k\pi + b \end{cases}$

$\begin{cases} -3\pi - 9\pi = -k\pi \\ b = -3\pi - k\pi \end{cases}$

$k = 12$

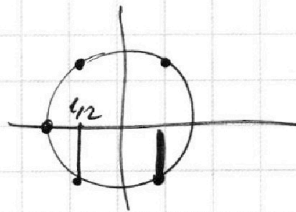
$b = 9\pi - 12 = 15\pi$

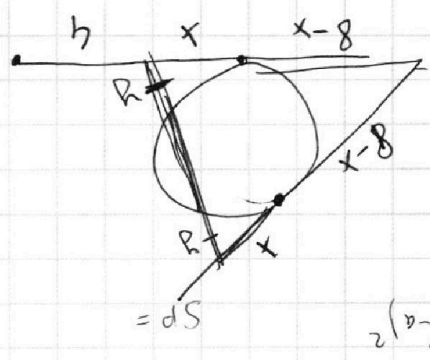
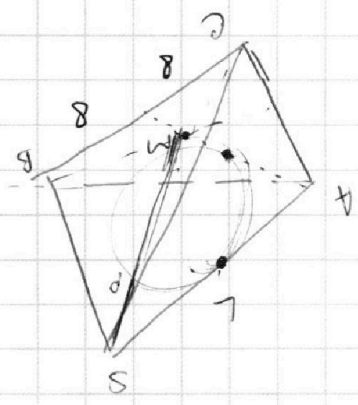
$\pi = 12x - 15\pi; 16\pi = 12x; x = \frac{4\pi}{3}$



$\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - x$

$x = \pi - \frac{4\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$



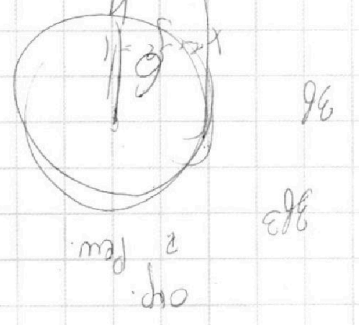


$6-a > 0$

$\frac{a}{1} > \frac{1}{8}!$   
 $\frac{36}{13} - \frac{3a}{13} > 0$   
 $\frac{36}{13} - \frac{3a}{13} = 0$   
 $36 - 3a = 0$   
 $12 - a = 0$   
 $a = 12$

$y = \frac{a}{a+x} = \frac{12}{12+x}$   
 $|y| = \frac{12}{12+x} = \frac{1}{1 + \frac{x}{12}}$

$10 - 6 - 1 = 3$   
 $x^2 + y \cdot 10 = 6^2$



$ax - 3y + 4b = 0$

$x \neq 1/2$   
 $y \neq 1$   
 $x > 0$   
 $y > 0$

$-3 + 1 - 9 + 12$

$36^5 + 6^2 + 96 + 12 = 0$

$36^5 + 12^8 + 6^2 + 96 = 0$

$\left\{ \begin{aligned} 6^{\frac{1}{4}} + \frac{6}{4} &= -\frac{3}{4}b - 3 \sqrt[4]{6} \sqrt[4]{6^3 + 6^2 + 96} \\ a^{\frac{1}{4}} - \frac{a}{3} &= \frac{3}{4}a - 3 \end{aligned} \right.$

$\log_4^5(2x) = \frac{3}{4} \log_4^5(2x) - 3$   
 $\log_4^5(y) + \frac{y}{4} = -\frac{3}{4} \log_4^5 y - 3$

$\log_4^5(2x) - 3 \log_4^5 x = \log_4^5 2^3 = 3$   
 $\log_4^5(y) + 4 \log_4^5 5 = \log_4^5 0.2 = -3$

На одной странице можно оформить ТОЛЬКО ОДНУ задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Почта QR-кода недоступна!