МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} \left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и множители не влияют на корень из 3^{17}, т.е.

а в данном случае не натуральное, т.е. $\deg_3(a) \geq 9$

Значит, ~~$\deg_3(b)$~~ $\deg_3(abc) \geq 3^{30}$, т.е.

$abc \geq 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{26}$ (иначе, ~~какое~~-то из чисел $a, b, c \notin \mathbb{N}$

~~Приведем пример, когда равенство достигается, это~~

и ~~будет минимальное abc~~!

a ~~$= 2^4\cdot 3^9$~~. Рассмотрим множители, если $\deg_5(abc) = 26$,

~~то из того же неравенства, что мы делали для двойки~~

~~получаем, $\deg_5(a) = 13$~~ То т.к. мы знаем, что $\deg_5 b \geq 0$,

иначе число - ненатуральное и $ac \vdots 5^{28}$, то

$\min \deg_5(abc) = 28 \Rightarrow abc \geq 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$.

Приведем пример, когда достигается равенство,

~~это~~ и будет ответом на вопрос задачи:

$a = 2^4\cdot 3^9\cdot 5^{13}$
$b = 2^2\cdot 3^4\cdot 5^0$ $\quad abc = 2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$
$c = 2^{12}\cdot 3^{17}\cdot 5^{15}$

$ab \vdots 2^6\cdot 3^{13}\cdot 5^{11}$ - верно $\quad bc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{13}$ - верно

$ac \vdots 2^{16}\cdot 3^{25}\cdot 5^{28}$ - верно

Ответ: $2^{18}\cdot 3^{30}\cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^6 3^{13} 5^{11}$ $bc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{13}$ $ac \vdots 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

Обозначим за $\deg_2(x)$ - степень вхождения двойки в число x. Т.к. $ab \vdots 2^6$, то $\deg_2(a) + \deg_2(b) \geq 6$ (т.к. при умножении мы степени складываем)

Аналогично $\deg_2(b) + \deg_2(c) \geq 14$ $(bc \vdots 2^{14})$

$\deg_2(a) + \deg_2(c) \geq 16$ $(ac \vdots 16)$

Сложив три неравенства получаем:

$2(\deg_2(a) + \deg_2(b) + \deg_2(c)) \geq 36$

$\deg_2(a) + \deg_2(b) + \deg_2(c) \geq 18$

Т.е. $abc \vdots 2^{18} \overset{\text{т.к. } a,b,c>0}{\Rightarrow} \min \deg_2(abc) = 18 \Rightarrow abc \geq 2^{18}$

Аналогичные действия проводим с тройкой и пятёркой, откуда получаем $\min \deg_3(abc) = 29{,}5$; $\min \deg_5(abc) = 26$

Значит, $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{29{,}5} \cdot 5^{26}$

Т.к. у тройки нецелая степень, посмотрим внимательнее на то, что выходит. $\deg_3(a) + \deg_3(b) \geq 13$
$\deg_3(b) + \deg_3(c) \geq 21$
$\deg_3(c) + \deg_3(a) \geq 25$

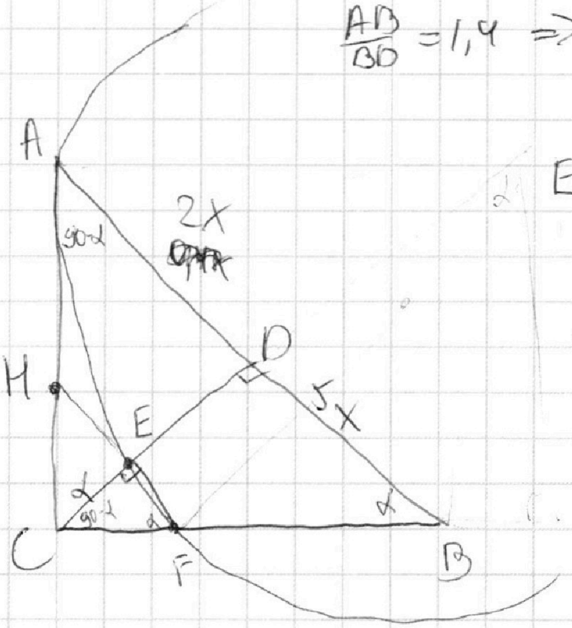
Пусть $\deg_3(a) = x$. Если мы в неравенствах рассматриваем равенство, то $\deg_3(c) = x + 8 \Rightarrow$ из третьего получаем $\deg_3(a) = 8{,}5$, т.е. $\frac{17}{2}$, но $a \in \mathbb{N}$, а степени двойки

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\frac{AB}{BD} = 1{,}4 \Rightarrow BD = 5x$; $AB = \cancel{1{,}4}7x \Rightarrow$
$\Rightarrow AD = 2x$

$EF \parallel AB \Rightarrow$ т.к. $\angle CDB = 90^\circ$ (CD - высота), но $\angle CEF = 90^\circ \Rightarrow \triangle CEF$ - прямоуг.

CD - высота из прямого угла $\Rightarrow CD = \sqrt{2x \cdot 5x} = \sqrt{10}x$

$\triangle CDB$ - прямоугольный $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ найдем из теоремы Пифагора: $CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{35}x$

прямоуг. $\triangle CEF \sim \triangle CBD$ ($\angle C$ - общий) $\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB} = \sqrt{\frac{10}{35}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$. Продлим EF до пересечения с AC.

$EF \cap AC = H$. $\triangle HCF \sim \triangle ABC$ (оба прямоугольные и и $HF \parallel AB \Rightarrow \angle CFH = \angle B$)

$\triangle ABC$ - прямоугольный $\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{14}x$

Обозначим $HC = y \Rightarrow AH = \sqrt{14}x - y$

Т.к. $\triangle ABC \sim \triangle HCF$ и CE и CD - соотв. высоты у этих треугольников, то $\frac{HE}{EF} = \frac{AD}{DB} = \frac{2}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Аналогично. Также $\frac{HF}{HC}=\frac{AB}{AC}=\frac{4x}{\sqrt{14}x}=\frac{4\sqrt{14}}{14}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

$HF=\frac{\sqrt{14}}{2}HC=\frac{\sqrt{14}}{2}y$

$HE=\frac{2}{7}HF$; $EF=\frac{5}{7}HF \Rightarrow HE=\frac{\sqrt{14}}{7}y$

Рассмотрим степень точки H относительно этой окружности, т.к. HA - касательная, а HF - секущая, то $HA^2=HE\cdot HF \Rightarrow (\sqrt{14}x-y)^2=\frac{\sqrt{14}}{7}y\cdot\frac{\sqrt{14}}{2}y=y^2$

$(\sqrt{14}x-y)^2=y^2 \Rightarrow 14x^2-2\sqrt{14}xy+y^2=y^2$

$\sqrt{14}\cdot x(\sqrt{14}x-2y)=0$

$x\neq 0 \Rightarrow \sqrt{14}x=2y \Rightarrow y=\frac{\sqrt{14}x}{2}$

$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2}{7}S_{\triangle ABC}$ (CD - общая высота △; а $\frac{AD}{AB}=\frac{2}{7}$)

Из того, что $y=\frac{\sqrt{14}x}{2}$ получаем $y=\frac{AC}{2}$. Т.к. HF ∥ AB, то HF - средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow S_{\triangle HCF}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$

($k=\frac{1}{2}$, а $\frac{S_{\triangle HCF}}{S_{\triangle ABC}}=k^2=\frac{1}{4}$)

$\frac{EF}{HF}=\frac{5}{7} \Rightarrow$ т.к. CE - общая высота △ CEF и △ HCF, то $S_{\triangle CEF}=\frac{5}{7}S_{\triangle HCF}=\frac{5}{28}S_{\triangle ABC}$

$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}}=\frac{\frac{2}{7}S_{\triangle ABC}}{\frac{5}{28}S_{\triangle ABC}}=\frac{8}{5}=1,6$ Ответ: 1,6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(2): I случай: $-54a - b \geq 0 \Rightarrow -54a \geq 5\sqrt{25+36a^2}$

Тогда $$\frac{-54a + 5\sqrt{25+36a^2}}{\sqrt{25+36a^2}} = 2$$

$$-54a = -3\sqrt{25+36a^2}$$

$$18a = \sqrt{25+36a^2} \quad a > 0 \to возв. в квадрат$$

$$324a^2 = 25 + 36a^2$$

$$288a^2 = 25$$

$$a^2 = \frac{25}{288}$$

$$a = \frac{5}{12\sqrt2} \Rightarrow b = -5\sqrt{25 + \frac{36\cdot 25}{288}} = -5\frac{\sqrt{5\cdot 3}}{2\sqrt2} = -\frac{75}{2\sqrt2}$$

Неравенство выполняется.

~~Очевидно, что при втором случае:~~

~~$-54a - b < 0$~~

~~$\frac{54a+b}{\sqrt{5^2+36a^2}} = 2$~~

~~$54a = 7\sqrt{25+36a^2}$~~

При втором случае a не получится.

Значит, прямая имеет вид:

$y = -2\sqrt2 x + 12$ $\quad \frac{b}{6a} = \frac{-75\cdot 12\sqrt2}{2\sqrt2\cdot 6\cdot 5} = -15$

Очевидно при других a не получится

Т.е. $a \in \left(\frac{5}{12\sqrt2}; +\infty\right)$

Аналогично $a \in \left(-\frac{5}{12\sqrt2}; -\infty; -\frac{5}{12\sqrt2}\right)$ и $a = 0$

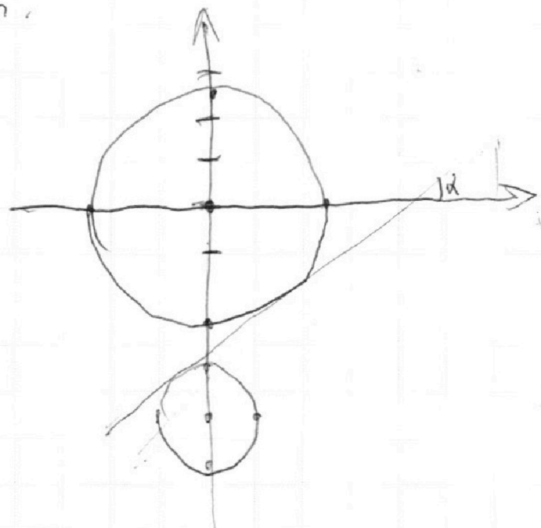
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

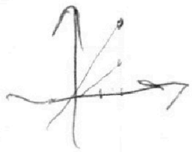
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Предположим, что вторую окружность пересекает, первую нет.





$5x+6ay-b=0$

$y=\frac{b-5x}{6a}$ $\quad -\frac{5}{6a}=tg\alpha$

$\frac{b}{6a}=c$

Т.е. $\frac{|-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}} \geq 5$

$\frac{|-54a-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}} < 2$

Рассмотрим случай касания обеих окружностей (ан. мс)

Тогда естественно, что параллельно перенося прямую ничего не получится. ~~Увеличив~~ Уменьшив ~~так~~ угол α, у нас также точно не пропадает пересечения обеих окружностей.

Посмотрим на вид внутр. кас.

$\frac{|-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}}=5 \qquad \frac{|-54a-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}}=2$

$b<0 \Rightarrow (1) = 5\sqrt{5^2+36a^2}=b$ ~~Нет~~ решений левая часть ≥ 0 правая <0

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Прямая вида $y = kx + c$. Рассмотрим $k > 0$,

т.е. $\frac{-5}{6a} > 0 \Rightarrow a < 0$ $(a \neq 0)$

Для того, чтобы рассмотреть это,

нужно проверить $a = 0$, т.е. $5x - b = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{b}{5}$. Очевидно, что $b = 0$ подходит,

потому что прямая $x = 0$ проходит через

диаметры обеих окружностей.

Также т.к. центры окружностей лежат

на прямой $x = 0$, то в силу симметрии, если

$a > 0$ подходит, то $-a$ подходит.

Если происходит пересечение с окружностью, то

расстояние от центра до прямой меньше

радиуса. Напишем уравнение для каждой окружности.

Формула: $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} < r$

Для первой окружности получаем: $\frac{|-b|}{\sqrt{5^2 + 36a^2}} < 5$ (1)

Для второй окружности: $\frac{|-54a - b|}{\sqrt{5^2 + 36a^2}} < 2$

Если $b > 0$, то (1) $\Rightarrow$ $5\sqrt{5^2 + 36a^2} > b$ $b > 0 \Rightarrow$ возв. в кв.

$25 \cdot 25 + 25 \cdot 36a^2 - b^2 > 0$

$25 \cdot 36a^2 + 625 - b^2 > 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Во (2) ~~модуль~~ $-54a-b<0$ $(b>0;\ a>0) \Rightarrow$

$\Rightarrow |-54a-b| = 54a+b$

$\frac{54a+b}{\cancel{25a}+\sqrt{25+36a^2}} < 2$ $\quad |\cdot \sqrt{25+36a^2}>0$

$54a+b < 2\sqrt{25+36a^2}$ $\quad 54a+b>0 \Rightarrow$ возв. в квадр. обе части.

$54^2a^2+108ab+b^2 < 100+72a^2$

$\cancel{2916a^2} -2844a^2-108ab+100-b^2>0$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 900a^2+625-b^2>0 \\ -2844a^2-108ab+100-b^2>0 \end{cases}$$

$D_1 = -4\cdot 900\cdot(625-b^2) = -3600\cdot 625+3600b^2$

$D_2 > 0$, иначе т.к. $-2844<0$ не будет подходящих

a, т.е. $D_2 = 108^2b^2+4\cdot 2844\cdot(100-b^2) = \cancel{-11268}b^2+$ 288

$+1137600>0$ при любом $b>0$ верно

$1137600 > \cancel{11268}b^2$ $\qquad a = \frac{108b \pm \sqrt{288b^2+1137600}}{-5688}$

$b^2<101 \Rightarrow b<11$ $\qquad a \in \left(\frac{108b+\sqrt{288b^2+1137600}}{-5688};\ \frac{108b-\sqrt{288b^2+1137600}}{-5688}\right)$

Заметим, что подставив во D_1 значение

b, получаем, что $D_1<0 \Rightarrow$ при всех подходящих

a для второго, для первого тоже будет получаться

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

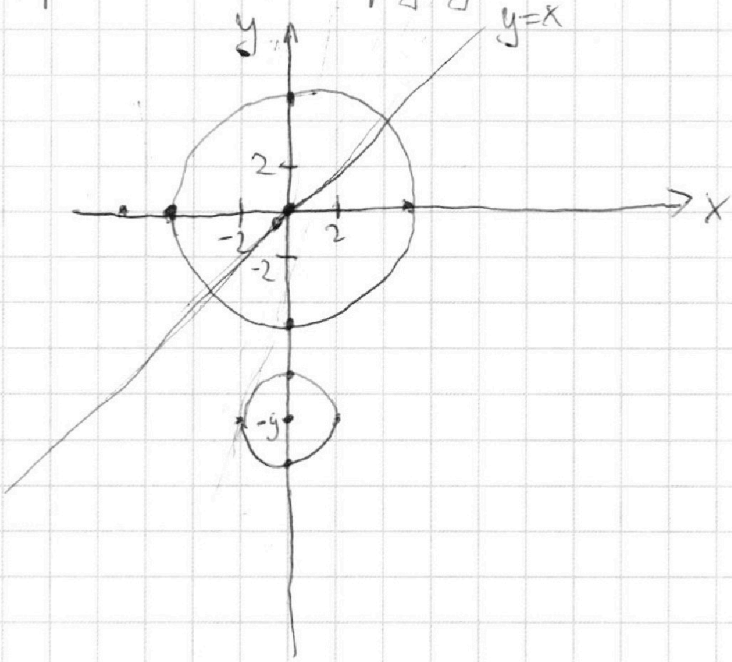
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases}$$

Рассмотрим (2): $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+y^2+18y+77=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+(y+9)^2=4 \end{array}\right.$

Графиком первого является окружность с центром $(0;0)$ и радиусом 5. Графиком второго является окружность с центром $(-9;0)$ и радиусом 2.



Посмотрим на (1): $5x+6ay-b=0 \Rightarrow y=\frac{b-5x}{6a}=\frac{-5x}{6a}+\frac{b}{6a}$, $(a\neq0)$

Т.е. графиком первого является прямая.

Прямая имеет с окружностью не более 2 точек пересечения, значит, для того, чтобы система имела 4 решения, нужно, чтобы прямая пересекала обе окружности.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$t^5+5t-\frac{16}{3}=0$. Если $t<0$, то $t^5<0$; $5t<0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow t^5+5t-\frac{16}{3}<0$. Противоречие.

$t\neq 0 \Rightarrow t>0$. Значит, t^5 - монотонно возр. функция

при $t>0$; $5t$ - монотонно возраст. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ t^5+5t - монотонно возрастающая.

Значит, у нас будет ровно одно значение, когда

$t^5+5t=\frac{16}{3}$. Обозначим искомое t за b.

Аналогично заметим, что $a^5+\frac{16}{3}+5a=0$

Если $a>0$, то $a^5+5a>0$ $\Rightarrow$ может быть

не может, (знач. 0 при прибавл. $\frac{16}{3}$).

$a<0$ $(a\neq 0)$ $\Rightarrow$ ~~a^5 при $a<0$ мон. убыв.~~

Заметим, что нам подходит $-b$. Действительно, $-b^5-5b+$

$+\frac{16}{3}=b^5+5b-\frac{16}{3}=0$ (из первого).

Больше значений нет. Т.к. a^5+5a - мон. возр.

Значит, $\log_{11}x=b \Rightarrow x=11^b$

$\log_{11}0{,}5y=-b \Rightarrow 0{,}5y=\frac{1}{11^b}$

$0{,}5xy=11^b\cdot\frac{1}{11^b}=1 \Rightarrow xy=2$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$ $\quad x>0,\ x\neq 1$

$\log_{11}x = \frac{1}{\log_x 11} \Rightarrow$ ~~$\frac{1}{\log_x 11^4} - 6\log_x 11 = \frac{-2}{3}\log_x 11 - 5$~~

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11}x} = -\frac{2}{3\log_{11}x} - 5$

$\log_{11} x = t$

$t \neq 0$ ~~отдельно рассмотрим для t=0~~ т.к. $x\neq 1$

~~$\frac{1}{t^4} - 6t = -\frac{2}{3}t - 5$~~ $\quad t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5$

~~$\frac{1}{t^4} - \frac{16}{3}t + 5 = 0$~~ $\quad t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$

~~$-\frac{16}{3}t^5 + 5t^4 - 1 = 0$~~

$\log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}(11^{-13}) - 5$ $\quad y>0,\ y\neq 2$

$\frac{1}{\log_{0,5}}\ \log_{11}^4(0{,}5y) + \frac{1}{\log_{11} 0{,}5y} = -\frac{13}{3}\log_{0{,}5y} 11 - 5$

$\log_{11} 0{,}5y = a$ $\quad a \neq 0$ ~~отдельно расм. a = 0~~ т.к. $y \neq 2$

$a^4 + \frac{1}{a} = -\frac{13}{3a} - 5$

$a^5 + \frac{16}{3} + 5a = 0$

Получаем, что $a^5 + t^5 + 5(a+t) = 0$

1) $a>0;\ t>0$. Но тогда $a^5+t^5>0$; $5(a+t)>0$
не может быть

2) $a<0;\ t<0$ Но тогда $a^5+t^5<0$; $5(a+t)<0$
не может быть

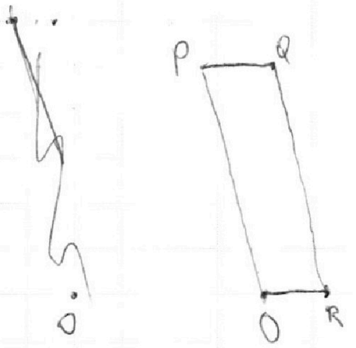
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. $6x_2^2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ и $48 \vdots 6$ и $6x_2 - 6x_1 \vdots 6$,

то $y_2 - y_1 \vdots 6$.



PO — прямая, имеющая вид:

$y = kx$, подставив знач. точки P, получим

$90 = -15k \Rightarrow k = -6$

$y = -6x$

Для QR — прямая, имеющая вид $y = -6x + 102$

Значит, точки внутри или на границе параллелограмма — точки, имеющие вид:

$y \geq 0$; $y \leq 90$; $y \geq -6x$; $y \leq -6x + 102$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

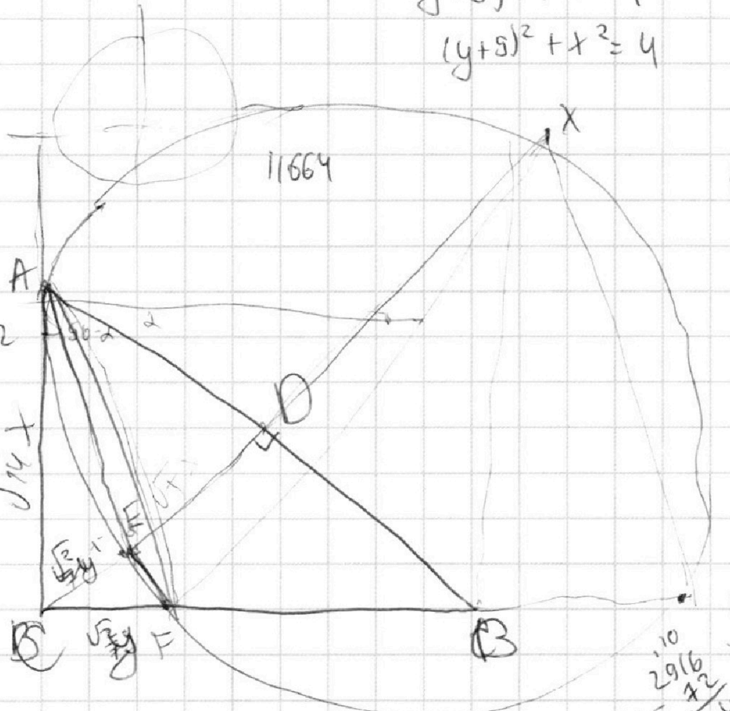
МФТИ

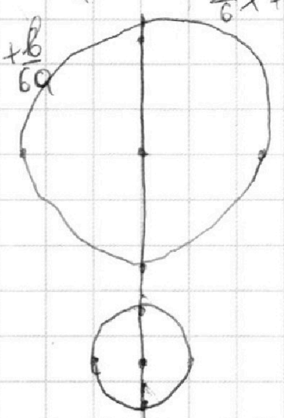
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

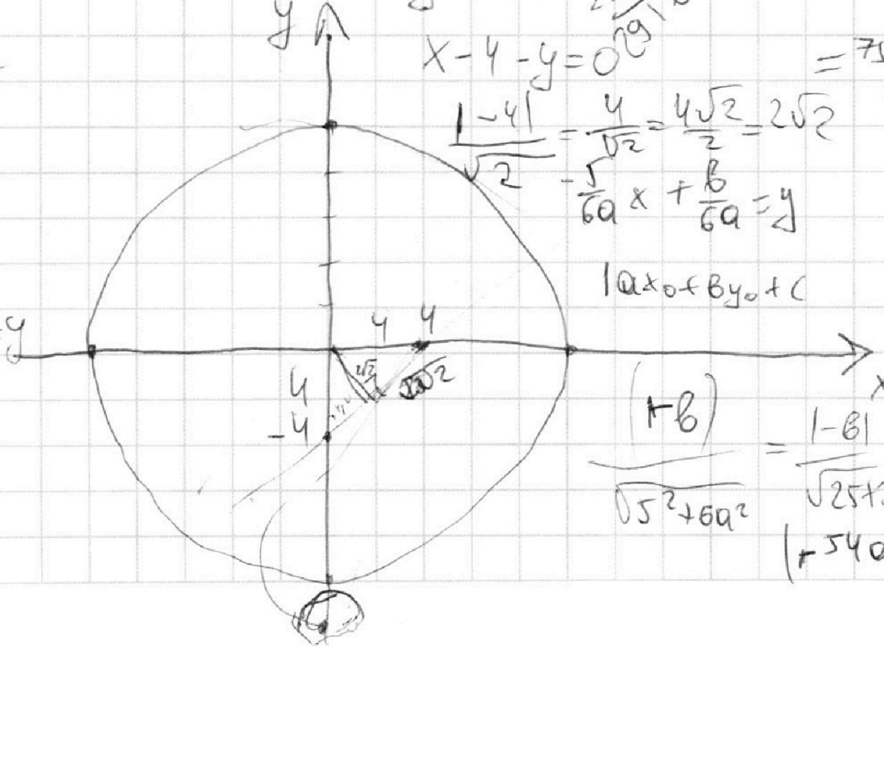
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ







$y = \frac{5x - b}{6a}$ $\frac{b - 5x}{6a} = \frac{-5x}{6a} + \frac{b}{6a}$

$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2}$

$\begin{cases} 5x \cdot (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

$(y+9)^2 + x^2 = 4$

$(y+9)^2 + x^2 = 4$

$a = 1$ $-\frac{5}{6}x + \frac{b}{6a} = y$

$CE \cdot CX = CF \cdot CY = AC^2 = 14x^2$

$CX = \frac{14x^2}{y}$

$CY = \frac{14x^2}{\sqrt{\frac{2}{7}}y}$

$\frac{196x^4}{\frac{2}{7}y^2} - \frac{196x^4}{\frac{2}{7}y^2}$

$\frac{196 \cdot 2{,}5x^4}{y^2} =$

$= \frac{14 \cdot 0{,}5\sqrt{10}x^2}{y} =$

$= \frac{7\sqrt{10}x^2}{y}$

$\times \frac{108}{108}$ 864 108 11664

$QR =$

11664

$0 = 17x + b$

$90 = 2x + b$

$x = -6$

$y =$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \quad (y+9)^2 \end{cases}$

$54 \cdot \frac{2916}{42}$ 154 2844 216 270 2916

$y = x - 4$

$x - 4 - y = 0$

$\frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$-\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} = y$

$\frac{5x - b}{6a} = y$

$\frac{5}{6a}x - \frac{b}{6a} = y$

$|ax_0 + by_0 + c$

$\frac{|-b|}{\sqrt{5^2 + 6a^2}} = \frac{|-b|}{\sqrt{25 + 36a^2}} < 5$

$\frac{|-54a|}{\sqrt{25+36a^2}} = \frac{54a}{\sqrt{25+36a^2}} < 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab: 2^6 3^{13} 5^{11}$

$bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13}$

$ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

$\deg_2(a)+\deg_2(b) \geq 6$

$\deg_2(b)+\deg_2(c) \geq 14$

$\deg_2(a)+\deg_2(c) \geq 16$

$\deg_2(a+b+c) \geq 18$

$\deg_3(a+b+c) \geq 29{,}5$

$\deg_5(a+b+c) \geq 26$

$1 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{32}{243}+\frac{810}{243}=$

$=\frac{842}{243}$

$\deg_5(a)+\deg_5(b) \geq 11$

$\deg_5(b)+\deg_5(c) \geq 13$

$\deg_5(c)+\deg_5(a) \geq 28$

$2x+2=28$

$x=13 \quad b=-2$

$\min \ 2^{18} \cdot 3^{29,5} \cdot 5^{26}$

$\deg_3(a)+\deg_3(b) \geq 13$

$\deg_3(b)+\deg_3(c) \geq 21$

$\deg_3(a)+\deg_3(c) \geq 25$

$2x+8=25$

$x=8{,}5$

$\frac{AC}{CF}=\frac{AD}{EC}$

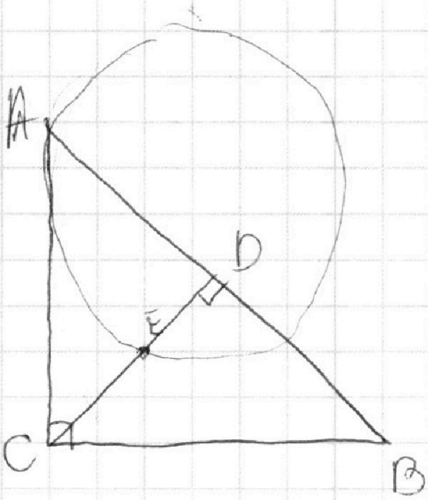
$a=2^{4}\cdot 3^{17}\cdot 5^{13}$

$b=2^2\cdot 3^0$

$2844 \times 4 = 11376$

$11376 - 11268 = 10800$

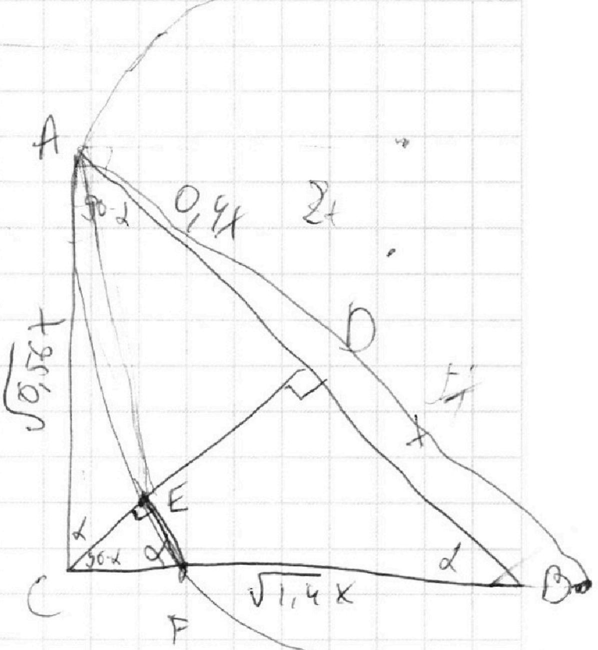
$\frac{AC \cdot AD}{DE \cdot EF}$



$\frac{BC}{CD}=\frac{CF}{CE}$

$\frac{\sqrt{1,4}\,x}{\sqrt{0,4}\,x}=$

$=\sqrt{3,5}$



$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{BD}$

$BC^2=AB\cdot BD$

$1{,}4x^2$

$BC=\sqrt{1,4}\,x$

$0{,}4x^2=CD^2$

$CD=x\cdot\sqrt{0,4}$

$S\,\triangle ACD=0{,}4x^2\sqrt{0,4}$

$\frac{CE}{CD}=\frac{CF}{CB}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10\sqrt{1-x^2} = 9\sqrt{1-2x}$

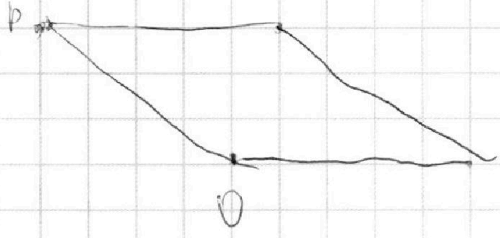
$a^5+t^5+5(a+t)=0$

Если $a>0$! $t<0$

$t^5+5t-\frac{16}{3}=0$ $t\neq 0$ t возр бывшие может $t>0$

t^5-возр. $5t$-возр.

$t(t^4+5)=\frac{16}{3}$



$\frac{2}{\sqrt{14}}y\cdot\frac{7y}{\sqrt{14}}y=y^2$

$t=6$
$a=-6$

$(\sqrt{14}x-y)^2=y^2$

$\log_{11}x=6$ $\log_{11}0{,}5y=-6$

$x=11^6$ $0{,}5y=\frac{1}{11^6}$

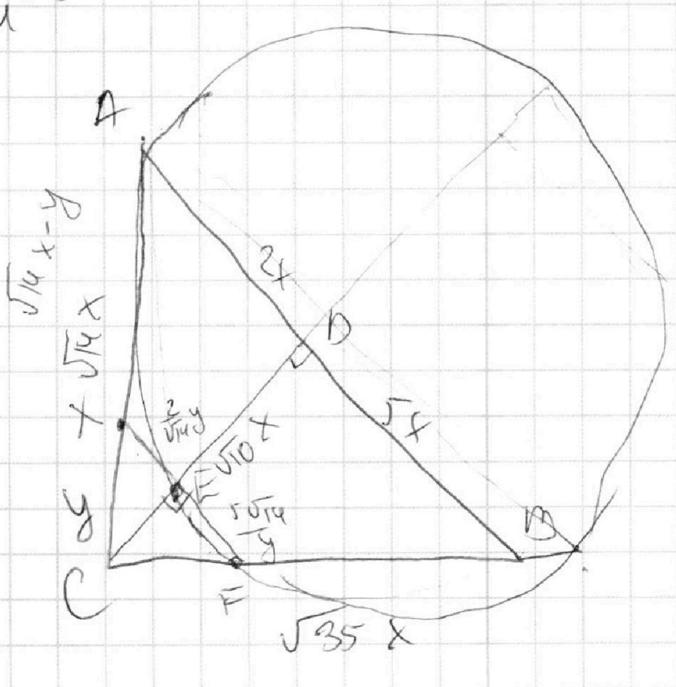
$14x^2-2\sqrt{14}xy+y^2=y^2$

$\sqrt{14}x(\sqrt{14}x-2y)=0$

$0{,}5xy=1 \Rightarrow xy=2$

$\sqrt{14}x=2y$
$y=\frac{\sqrt{14}}{2}x$

$\frac{7}{\sqrt{14}}Ay$



$\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{14}x}{7x}=\frac{\sqrt{14}}{7}$

$AC=\frac{\sqrt{14}}{7}AB$

$XF=\frac{7}{\sqrt{14}}$

$\frac{2}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$