МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

и пятерки не влияют на корень из 3^{17}, т.е.

а в данном случае не натуральное, т.е. $deg_3(a) \geq 9$

Значит, ~~$deg_3(b)$~~ $deg_3(abc) \geq 3^{30}$, т.е.

$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ (иначе, ~~какое~~-то из чисел $a, b, c \notin \mathbb{N}$

~~Приведем пример, когда равенство достигается, это~~

~~и будет минимальное abc~~!

$a = \cancel{2^4 \cdot 3^9}$. Рассмотрим пятерки, если $deg_5(abc) = 26$,

~~то из тех же неравенств, что мы делали для двойки~~

~~получим, $deg_5(a) = 13$~~ То ~~в~~ т.к. мы знаем, что $deg_5 b \geq 0$,

иначе число - ненатуральное и $ac \vdots 5^{28}$, то

$\min deg_5(abc) = 28 \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$.

Приведем пример, когда достигается равенство,

это и будет ответом на вопрос задачи:

$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$
$b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^0$
$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$

$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

$ab \vdots 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$ - верно $bc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{13}$ - верно

$ac \vdots 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$ - верно

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^6 3^{13} 5^{11}$ $\quad bc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{13}$ $\quad ac \vdots 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

Обозначим за $deg_2(x)$ – степень вхождения двойки в число x. Т.к. $ab \vdots 2^6$, то $deg_2(a) + deg_2(b) \geq 6$ (т.к. при умножении мы степени складываем)

Аналогично $deg_2(b) + deg_2(c) \geq 14$ $(bc \vdots 2^{14})$

$deg_2(a) + deg_2(c) \geq 16$ $(ac \vdots 16)$

Сложив три неравенства получаем:

$2(deg_2(a) + deg_2(b) + deg_2(c)) \geq 36$

$deg_2(a) + deg_2(b) + deg_2(c) \geq 18$

Т.е. $abc \vdots 2^{18} \xRightarrow{\text{т.к. } a,b,c>0} \min deg_2(abc) = 18 \Rightarrow abc \geq 2^{18}$

Аналогичные действия проводим с тройкой и пятёркой, откуда получаем $\min deg_3(abc) = 29{,}5$; $\min deg_5(abc) = 26$

Значит, $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{29,5} \cdot 5^{26}$

Т.к. у тройки нецелая степень, посмотрим внимательнее на то, что выходит. $deg_3(a) + deg_3(b) \geq 13$

$deg_3(b) + deg_3(c) \geq 21$

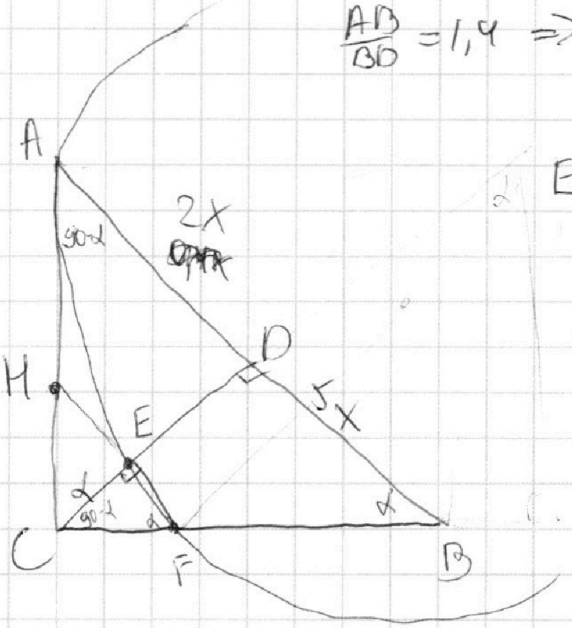
$deg_3(c) + deg_3(a) \geq 25$

Пусть $deg_3(a) = x$. Если мы в неравенствах рассматриваем равенство, то $deg_3(c) = x + 8 \Rightarrow$ из третьего получаем $deg_3(a) = 8{,}5$, т.е. $\frac{17}{2}$ ~~⇒~~, но $a \in \mathbb{N}$, а степени двойки

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{AB}{BD}=1{,}4 \Rightarrow BD=5x$; $AB=7x \Rightarrow$
$\Rightarrow AD = 2x$

$EF \parallel AB \Rightarrow$ т.к. $\angle CDB = 90^\circ$ (CD – высота), то
$\angle CEF = 90^\circ \Rightarrow \triangle CEF$ – прямоуг.

CD – высота из прямого угла $\Rightarrow CD = \sqrt{2x\cdot 5x} = \sqrt{10}\,x$

$\triangle CDB$ – прямоугольный $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ найдем из теоремы Пифагора: $CB = \sqrt{CD^2+DB^2} = \sqrt{35}\,x$

прямоуг. $\triangle CEF \sim \triangle CBD$ ($\angle C$ – общий) $\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB} = \sqrt{\frac{10}{35}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$. Продлим EF до пересечения с AC.
$EF \cap AC = H$. $\triangle HCF \sim \triangle ABC$ (оба прямоугольные и
и $HF \parallel AB \Rightarrow \angle CFH = \angle B$

$\triangle ABC$ – прямоугольный $\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{14}\,x$

Обозначим $HC = y \Rightarrow AH = \sqrt{14}\,x - y$

Т.к. $\triangle ABC \sim \triangle HCF$, то и CE и CD – соотв. высоты
у этих треугольников, то $\frac{HE}{EF} = \frac{AD}{DB} = \frac{2}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Итак. Также $\frac{HF}{HC}=\frac{AB}{AC}=\frac{7x}{\sqrt{14}x}=\frac{7\sqrt{14}}{14}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

$HF=\frac{\sqrt{14}}{2}HC=\frac{\sqrt{14}}{2}y$

$HE=\frac{2}{7}HF$; $EF=\frac{5}{7}HF \Rightarrow HE=\frac{\sqrt{14}}{7}y$

Рассмотрим степень точки H относительно этой окружности, т.к. HA - касательная, то HF - секущая, то $HA^2=HE\cdot HF \Rightarrow (\sqrt{14}x-y)^2=\frac{\sqrt{14}}{7}y\cdot\frac{\sqrt{14}}{2}y=y^2$

$(\sqrt{14}x-y)^2=y^2 \Rightarrow 14x^2-2\sqrt{14}xy+y^2=y^2$

$\sqrt{14}\cdot x(\sqrt{14}x-2y)=0$

$x\neq 0 \Rightarrow \sqrt{14}x=2y \Rightarrow y=\frac{\sqrt{14}x}{2}$

$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2}{7}S_{\triangle ABC}$ (CD - общая высота △; а $\frac{AD}{AB}=\frac{2}{7}$)

Из того, что $y=\frac{\sqrt{14}x}{2}$ получаем $y=\frac{AC}{2}$. Т.к. $HF\parallel AB$, то HF - средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow S_{\triangle HCF}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$

($k=\frac{1}{2}$, а $\frac{S_{\triangle HCF}}{S_{\triangle ABC}}=k^2=\frac{1}{4}$)

$\frac{EF}{HF}=\frac{5}{7} \Rightarrow$ т.к. CE - общая высота $\triangle CEF$ и $\triangle HCF$,

то $S_{\triangle CEF}=\frac{5}{7}S_{\triangle HCF}=\frac{5}{28}S_{\triangle ABC}$

$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}}=\frac{\frac{2}{7}S_{\triangle ABC}}{\frac{5}{28}S_{\triangle ABC}}=\frac{8}{5}=1,6$ Ответ: 1,6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(2): I случай: $-54a-b \geq 0 \Rightarrow -54a \geq 5\sqrt{25+36a^2}$

Тогда $\frac{-54a+5\sqrt{25+36a^2}}{\sqrt{25+36a^2}} = 2$

$-54a = -3\sqrt{25+36a^2}$

$18a = \sqrt{25+36a^2}$ $a>0 \to$ возв. в квадрат

$324a^2 = 25+36a^2$

$288a^2 = 25$

$a^2 = \frac{25}{288}$

$a = \frac{5}{12\sqrt{2}}$ $\Rightarrow b = -5\sqrt{25+\frac{36\cdot 25}{288}} = -5\frac{5\cdot 3}{2\sqrt{2}} = -\frac{75}{2\sqrt{2}}$

Неравенство выполняется.

~~Очевидно, что при втором случае:~~

$\cancel{-54a-b<0}$

$\cancel{\frac{54a+b}{\sqrt{25+36a^2}}=2}$

$\cancel{54a = 7\sqrt{25+36a^2}}$

При втором случае a нет корней.

Значит, прямая имеет вид:

$y = -2\sqrt{2}x \cancel{+} 12$ $\frac{b}{6a} = \frac{-75\cdot 12\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot 6\cdot 5} = -15$

Очевидно при других a не получится

т.к. $a \in [\frac{5}{12\sqrt{2}}; +\infty)$

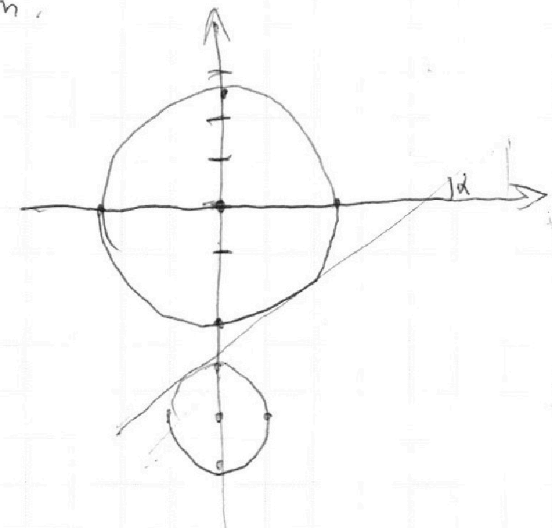
Аналогично $a \in (\frac{-5}{12\sqrt{2}}; -\infty; -\frac{5}{12\sqrt{2}})$ и $a=0$

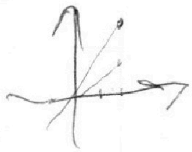
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Предположим, что вторую окружность пересекает, первую нет.





$5x+6ay-b=0$

$y=\frac{b-5x}{6a}$ $\quad -\frac{5}{6a}=\operatorname{tg}\alpha$

$\frac{b}{6a}=c$

Т.е. $\frac{|-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}} \geq 5$

$\frac{|-54a-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}} < 2$

Рассмотрим случай касания обеих окружностей (см. рис)

Тогда естественно, что параллельно перенося прямую ничего не получится. ~~Увеличив~~ Уменьшив ~~так~~ угол α, у нас также точно не пропадает пересечения обеих окружностей

Посмотрим на вид внутр. кас.

$\frac{|-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}}=5$ $\qquad \frac{|-54a-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}}=2$

$b<0 \Rightarrow (1) = 5\sqrt{5^2+36a^2}=b$. ~~Нет~~ решений левая часть ≥ 0 правая <0

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Прямая вида $y = kx + c$. Рассмотрим $k > 0$,

т.е. $\frac{-5}{6a} > 0 \Rightarrow a < 0$ $(a \neq 0)$

Для того, чтобы рассмотреть это,

нужно проверить $a = 0$, т.е. $5x - b = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{b}{5}$. Очевидно, что $b = 0$ подходит,

потому что прямая $x = 0$ проходит через

диаметры обеих окружностей.

Также т.к. центры окружностей лежат

на прямой $x = 0$, то в силу симметрии, если

$a > 0$ подходит, то $-a$ подходит.

Если происходит пересечение с окружностью, то

расстояние от центра до прямой меньше

радиуса. Напишем уравнение для каждой окружности.

Формула: $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} < r$

Для первой окружности получаем: $\frac{|-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}} < 5$ (1)

Для второй окружности: $\frac{|-54a-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}} < 2$

Если $b > 0$, то $(1) \Rightarrow 5\underline{\sqrt{5^2+36a^2}} > b$ $b > 0 \Rightarrow$ возв. в кв.

$25 \cdot 25 + 25 \cdot 36a^2 - b^2 > 0$

$25 \cdot 36a^2 + 625 - b^2 > 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Во (2) ~~модуль~~ $-54a - b < 0$ $(b>0;\ a>0) \Rightarrow$

$\Rightarrow |-54a-b| = 54a+b$

$\frac{54a+b}{\cancel{25a}+\sqrt{25+36a^2}} < 2 \quad |\cdot \sqrt{25+36a^2} > 0$

$54a+b < 2\sqrt{25+36a^2}$ $\quad 54a+b>0 \Rightarrow$ возв. в квадр. обе части.

$54^2a^2 + 108ab + b^2 < 100 + 72a^2$

$\cancel{2916a^2}\ -2844a^2 - 108ab + 100 - b^2 > 0$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 900a^2 + 625 - b^2 > 0 \\ -2844a^2 - 108ab + 100 - b^2 > 0 \end{cases}$$

$D_1 = -4\cdot 900\cdot(625-b^2) = -3600\cdot 625 + 3600b^2$

$D_2 \geq 0$, иначе т.к. $-2844<0$ не будет подходящих

a, т.е. $D_2 = 108^2b^2 + 4\cdot 2844\cdot(100-b^2) = \cancel{-11268}\,b^2 +$ 288

$+1137600 > 0$ при любом $b>0$ верно

$\cancel{1137600 > 11268b^2}$ $\quad a = \frac{108b \pm \sqrt{288b^2+1137600}}{-5688}$

$\cancel{b^2 < 101 \Rightarrow b < 11}$ $\quad a \in \left(\frac{108b+\sqrt{288b^2+1137600}}{-5688}; \frac{108b-\sqrt{288b^2+1137600}}{-5688}\right)$

Заметим, что подставив во D_1 значение

b, получаем, что $D_1 < 0 \Rightarrow$ при всех подходящих

a для второго, для первого тоже будет получаться

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

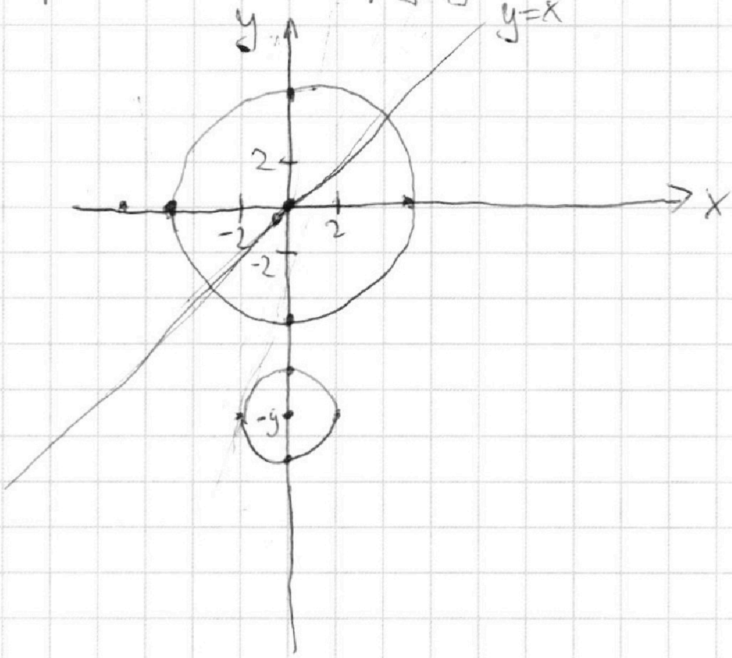
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases}$$

Рассмотрим (2): ~~~~ $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+y^2+18y+77=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x^2+(y+9)^2=4 \end{array}\right.$

Графиком первого является окружность с центром $(0;0)$ и радиусом 5. Графиком второго является окружность с центром $(-9;0)$ и радиусом 2.



Посмотрим на (1): $5x+6ay-b=0 \Rightarrow y=\frac{b-5x}{6a}=\frac{-5x}{6a}+\frac{b}{6a}$, $(a\neq 0)$

Т.е. графиком первого является прямая.

Прямая имеет с окружностью не более 2 точек пересечения, значит, для того, чтобы система имела 4 решения, нужно, чтобы прямая пересекала обе окружности.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$t^5+5t-\frac{16}{3}=0$. Если $t<0$, то $t^5<0$; $5t<0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow t^5+5t-\frac{16}{3}<0$. Противоречие.

$t\neq 0 \Rightarrow t>0$. Значит, t^5 - монотонно возр. функция

при $t>0$; $5t$ - монотонно возраст. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ t^5+5t - монотонно возрастающая.

Значит, у нас будет ровно одно значение, когда

$t^5+5t=\frac{16}{3}$. Обозначим искомое t за b.

Аналогично заметим, что $a^5+\frac{16}{3}+5a=0$

Если $a>0$, то $a^5+5a>0$ $\Rightarrow$ может быть

не может (знач. 0 при прибавл. $\frac{16}{3}$).

$a<0$ $(a\neq 0)$ $\Rightarrow$ ~~a^5 при~~ $a<0$ мон. ~~убыв.~~

Заметим, что нам подходит $-b$. Действительно, $-b^5-5b+$
$+\frac{16}{3}=b^5+5b-\frac{16}{3}=0$ (из первого).

Больше значений нет. Т.к. a^5+5a - мон. возр.

Значит, $\log_{11}x=b \Rightarrow x=11^b$

$\log_{11}0{,}5y=-b \Rightarrow 0{,}5y=\frac{1}{11^b}$

$0{,}5xy=11^b\cdot\frac{1}{11^b}=1 \Rightarrow xy=2$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$ $\quad x>0,\ x\neq 1$

$\log_{11} x = \frac{1}{\log_x 11} \Rightarrow$ ~~$\frac{1}{\log_x 11^4} - 6\log_x 11 = -\frac{2}{3}\log_x 11 - 5$~~

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3\log_{11} x} - 5$

$\log_{11} x = t$

$t \neq 0$ ~~отдельно рассмотрим для $t=0$~~ т.к. $x\neq 1$

~~$\frac{1}{t^4} - 6t = -\frac{2}{3}t - 5$~~ $\quad t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5$

~~$\frac{1}{t^4} - \frac{16}{3}t + 5 = 0$~~ $\quad t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$

~~$-\frac{16}{3}t^5 + 5t^4 - 1 = 0$~~

$\log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}(11^{-13}) - 5$ $\quad y>0,\ y\neq 2$

$\frac{1}{\log_{0{,}5}}\ \log_{11}^4(0{,}5y) + \frac{1}{\log_{11} 0{,}5y} = -\frac{13}{3}\log_{0{,}5y} 11 - 5$

$\log_{11} 0{,}5y = a$ $\quad a \neq 0$ ~~отдельно рассм. $a=0$~~ т.к. $y\neq 2$

$a^4 + \frac{1}{a} = -\frac{13}{3a} - 5$

$a^5 + \frac{16}{3} + 5a = 0$

Получаем, что $a^5 + t^5 + 5(a+t) = 0$

1) $a>0;\ t>0$. Но тогда $a^5+t^5>0$; $5(a+t)>0$
не может быть

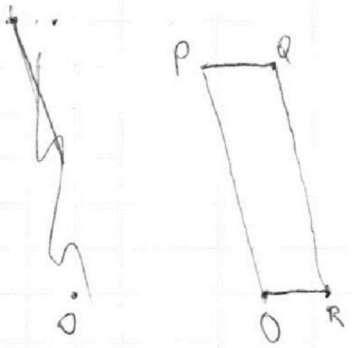
2) $a<0;\ t<0$ Но тогда $a^5+t^5<0$; $5(a+t)<0$
не может быть

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ и $48 \vdots 6$ и $6x_2 - 6x_1 \vdots 6$, то $y_2 - y_1 \vdots 6$.



PO – прямая, имеющая вид:
$y = kx$, подставив знач. точки P, получим
$90 = -15k \Rightarrow k = -6$
$y = -6x$

Прямая QR – прямая, имеющая вид $y = -6x + 102$

Значит, точки внутри или на границе параллелограмма – точки, имеющие вид:

$y \geq 0$; $y \leq 90$; $y \geq -6x$; $y \leq -6x + 102$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

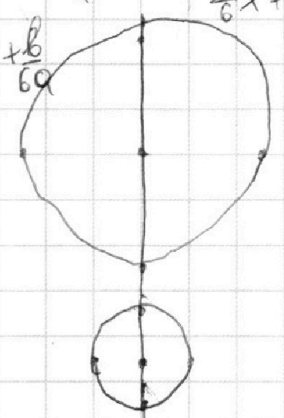
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sin x = \sqrt{1-\cos^2}$

$y = \frac{5x-b}{6a}$ $\quad \frac{b-5x}{6a} = \frac{-5x}{6a} + \frac{b}{6a}$

$a=1$ $\quad -\frac{5}{6}x + \frac{b}{6a} = y$



$\begin{cases} 5x\cdot(x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

$(y+9)^2 + x^2 = 4$

$(y+9)^2 + x^2 = 4$

$\times\frac{108}{108}$, 864, 108, 11664

$QR =$

11664

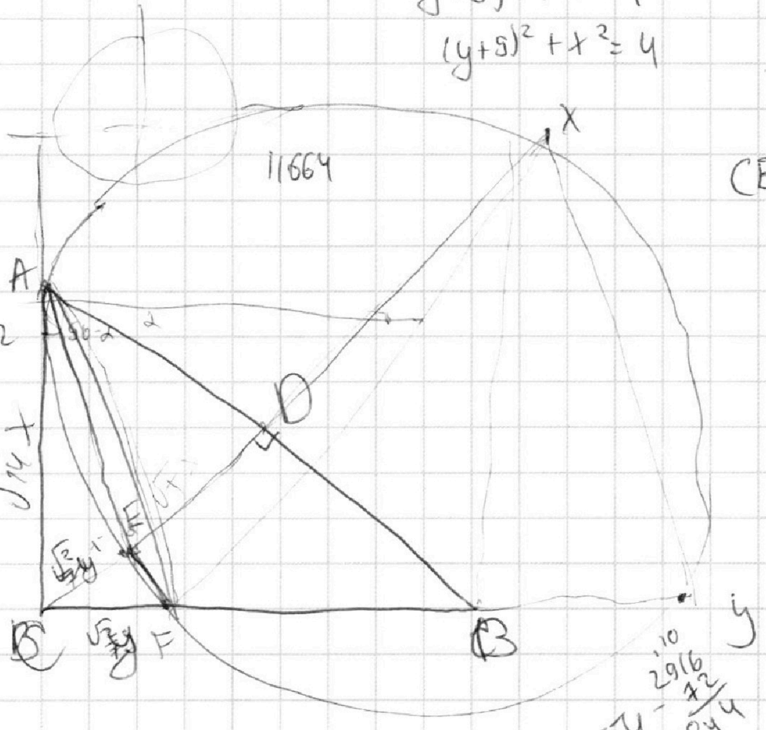
$0 = 17x + b$

$90 = 2x + b$

102

$x = -6$

$y =$



$CE \cdot CX = CF \cdot CY = AC^2 = 14x^2$

$CX = \frac{14x^2}{y}$

$CY = \frac{14x^2}{\sqrt{\frac{2}{7}}y}$

$\frac{196x^4}{\frac{2}{7}y^2} - \frac{196x^4}{\frac{8}{7}y^2}$

$\frac{198\cdot 2{,}5x^4}{y^2} =$

$= \frac{14\cdot 0{,}5\sqrt{10}x^2}{y} =$

$= \frac{7\sqrt{10}x^2}{y}$

54, 2916, 72, 2844, 154, 216, 270, 2916

$\begin{cases} x^2+y^2=25 \quad (y+9)^2 \end{cases}$

$y = x-4$

$x - 4 - y = 0$

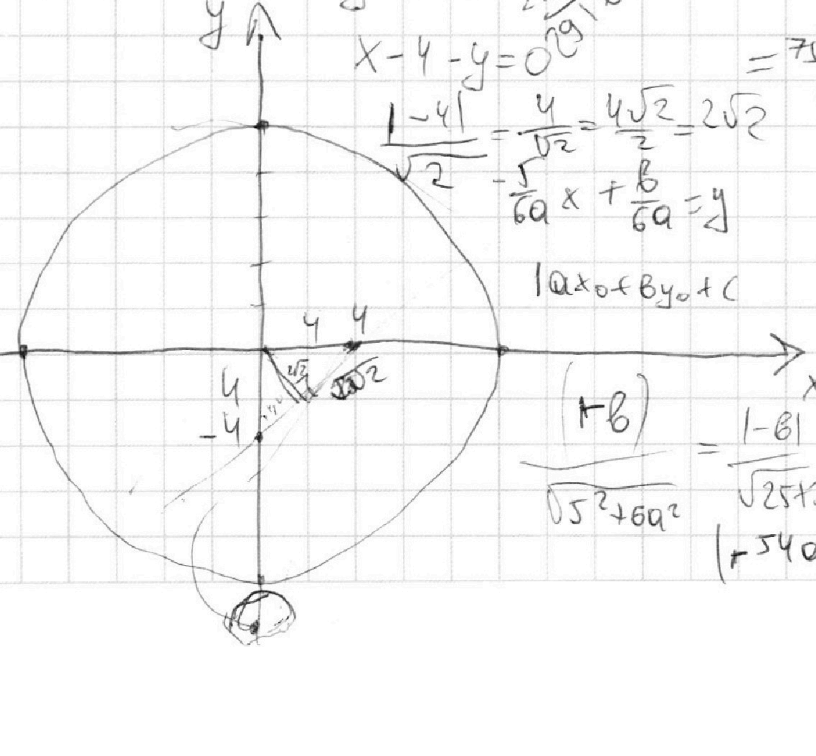
$\frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$-\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} = y$

$|ax_0 + by_0 + c$

$\frac{5x-b}{6a} = y$

$\frac{5}{6a}x - \frac{b}{6a} = y$



$\frac{|-b|}{\sqrt{5^2+6a^2}} = \frac{|-b|}{\sqrt{25+36a^2}} < 5$

$|-54a| = \frac{54a}{\sqrt{25+36a^2}} < 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab: 2^6 3^{13} 5^{11}$

$bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13}$

$ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

$\deg_2(a)+\deg_2(b) \geq 6$

$\deg_2(b)+\deg_2(c) \geq 14$

$\deg_2(a)+\deg_2(c) \geq 16$

$1 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{32}{243}+\frac{810}{243}=$

$=\frac{842}{243}$

$\deg_2(a+b+c) \geq 18$

$\deg_3(a+b+c) \geq 29,5$

$\deg_5(a+b+c) \geq 26$

$\deg_5(a)+\deg_5(b) \geq 11$

$\deg_5(b)+\deg_5(c) \geq 13$

$\deg_5(c)+\deg_5(a) \geq 28$

$2x+2=28$

$x=13 \quad b=-2$

$\min\ 2^{18} \cdot 3^{29,5} \cdot 5^{26}$

$\deg_3(a)+\deg_3(b) \geq 13$

$\deg_3(b)+\deg_3(c) \geq 21$

$\deg_3(a)+\deg_3(c) \geq 25$

$2x+8=25$

$x=8,5$

$\frac{AC}{CF}=\frac{AD}{EC}$

$a=2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$

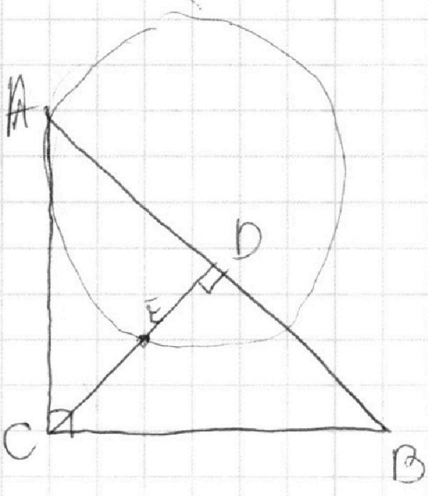
$b=2^2 \cdot 3^0$

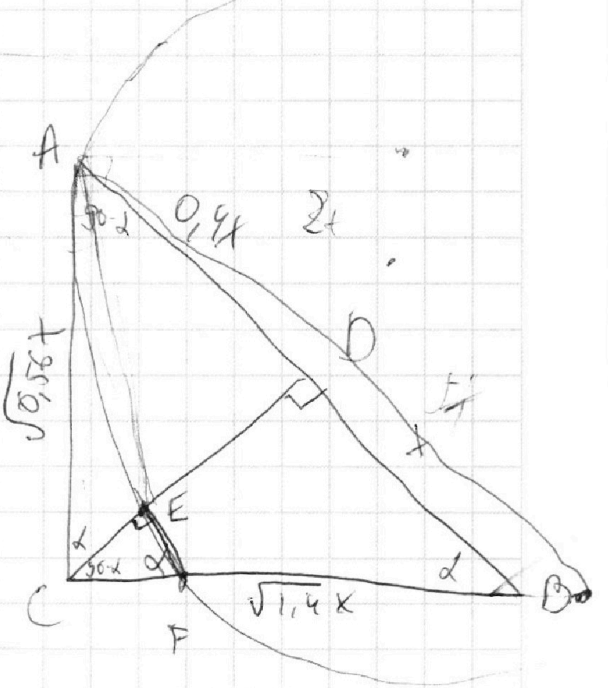
$\begin{array}{r} 2844 \\ \times \quad 4 \\ \hline 11376 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1137600 \\ -11268 \\ \hline 10800 \end{array} \quad 11268 \,|\, 100$

$\cancel{\frac{AC \cdot AD}{DE \cdot EF}}$

$\frac{BC}{CD}=\frac{CF}{CE}$





$\frac{\sqrt{1,4}\,x}{\sqrt{0,4}\,x}=$

$=\sqrt{3,5}$

$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{BD}$

$BC^2=AB \cdot BD$

$1,4x^2$

$BC=\sqrt{1,4}\ x$

$0,4x^2=CD^2$

$CD=x \cdot \sqrt{0,4}$

$S_{\Delta ACD}=0,4x^2\sqrt{0,4}$

$\frac{CE}{CD}=\frac{CF}{CB}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10\sqrt{1-x^2} = 9\sqrt{1-2x}$

$a^5+t^5+5(a+t)=0$

Если $a>0$ $t<0$

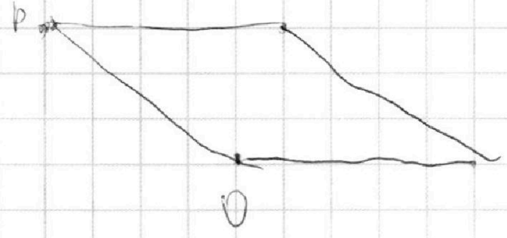
$\begin{cases} t^5+5t-\frac{16}{3}=0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} \end{cases}$ $t\neq0$ t ~~возр~~ строго монотон

$t>0$

t^5 - возр. $5t$ - возр.

$t(t^4+5)=\frac{16}{3}$

$\frac{1}{3}$



$\frac{28}{3}$

$\frac{2}{\sqrt{14}}y \cdot \frac{7}{\sqrt{14}}y = y^2$

$t=6$

$a=-6$

$(\sqrt{14}x-y)^2=y^2$

$\log_{11}x=6$ $\log_{11}0{,}5y=-6$

$14x^2-2\sqrt{14}xy+y^2=y^2$

$x=11^6$ $0{,}5y=\frac{1}{11^6}$

$\sqrt{14}x(\sqrt{14}x-2y)=0$

$0{,}5xy=1 \Rightarrow xy=2$

$\sqrt{14}x=2y$

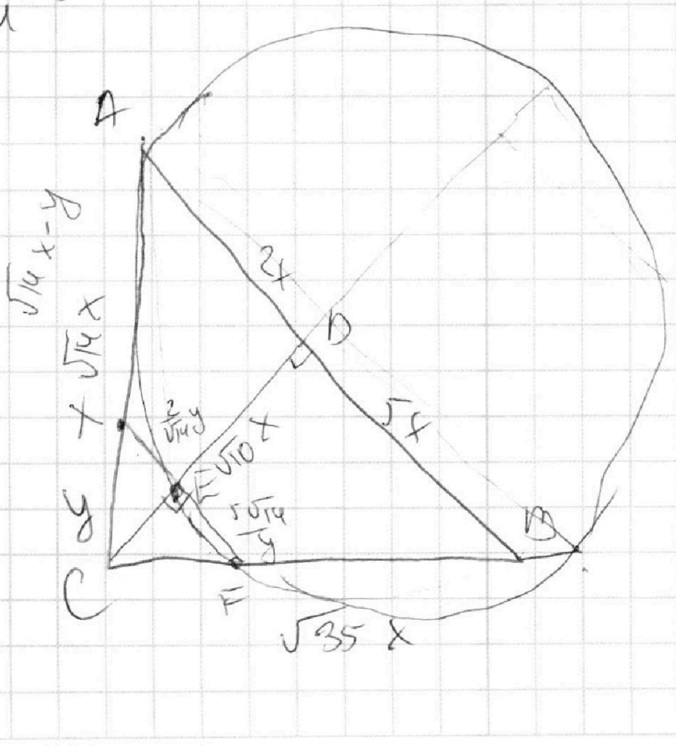
$y=\frac{\sqrt{14}}{2}x$

$\frac{7}{\sqrt{14}}Ay$

$\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{14}x}{7x}=\frac{\sqrt{14}}{7}$

$AC=\frac{\sqrt{14}}{7}AB$

$XF=\frac{7}{\sqrt{14}}$



$\frac{2}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$